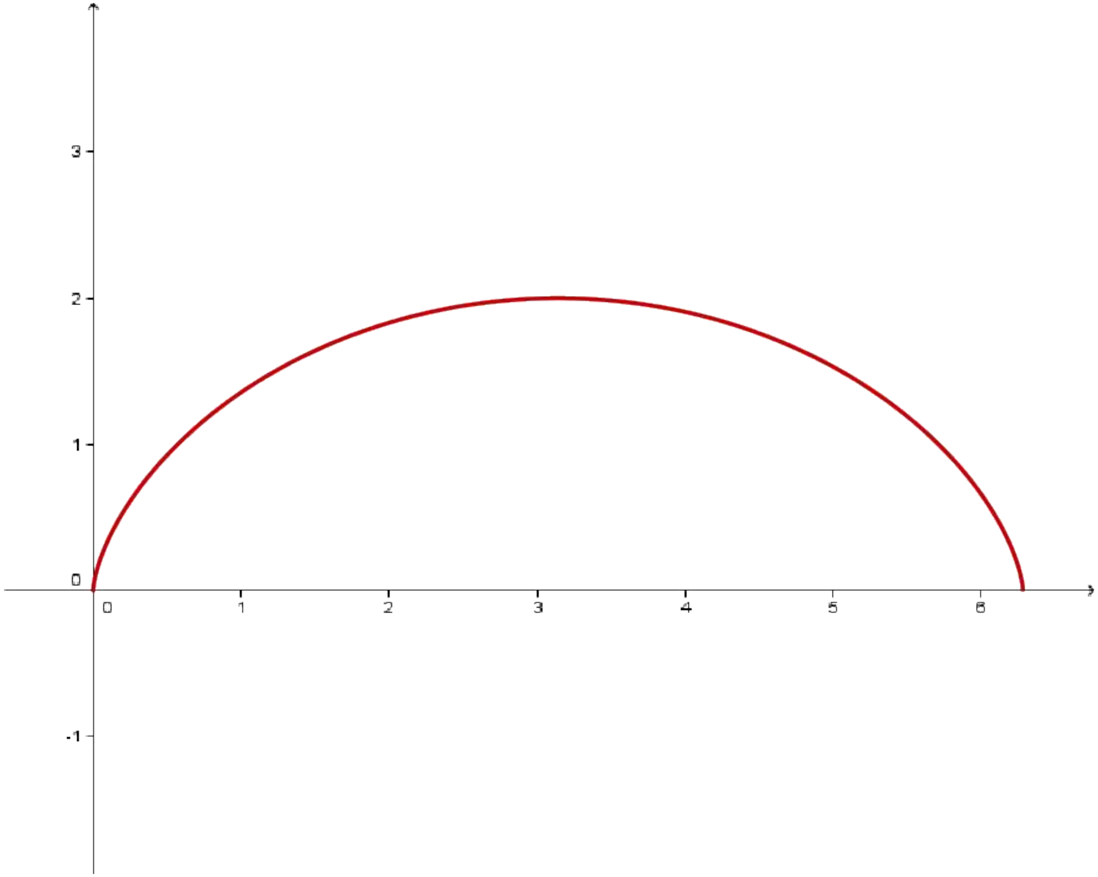
Berzsenyi Dániel Gimnázium
Matektábor 2011 – Tata

A ciklois

A 11. évfolyam előadása

Bevezető

- Mi az a ciklois?
  - Egy olyan görbe, amelyet egy irányított görbén csúszás nélkül legördülő kör egy meghatározott pontja ír le.

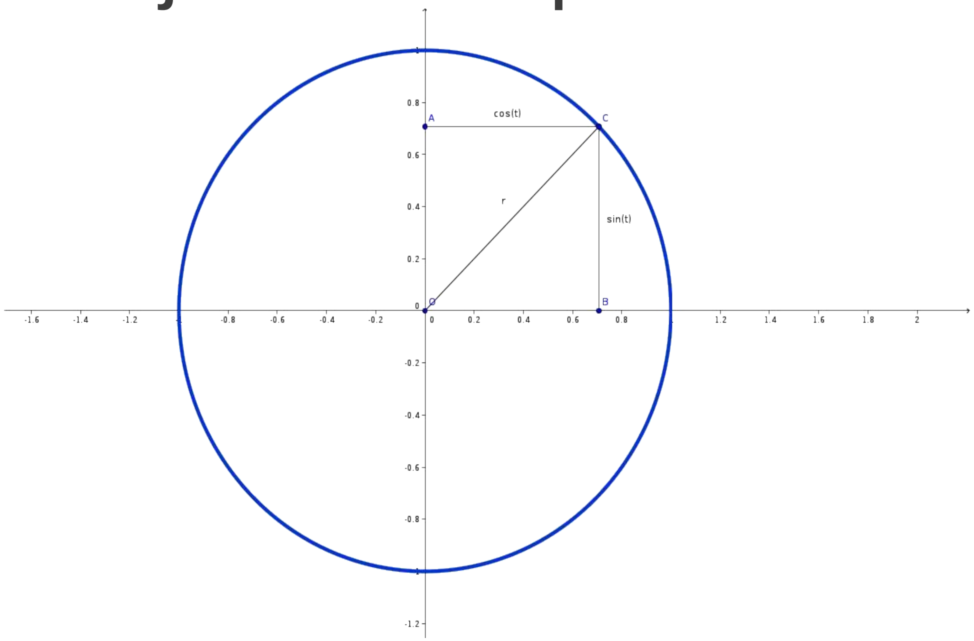


Felfedezése

- Korábban felmerült a kérdés, hogy I.e. 3000 környékén ismertek-e cikloishoz hasonló görbét, ám erre máig nincsen biztos válasz
- 17. században kezdtek el komolyabban foglalkozni vele
- A cikloist kutatta: Gilles de Roberval, Galilei, Cavalieri, Mersenne, Huygens stb.
- Az évek során kiderült, hogy a ciklois nagyon sok szép tulajdonsággal rendelkezik

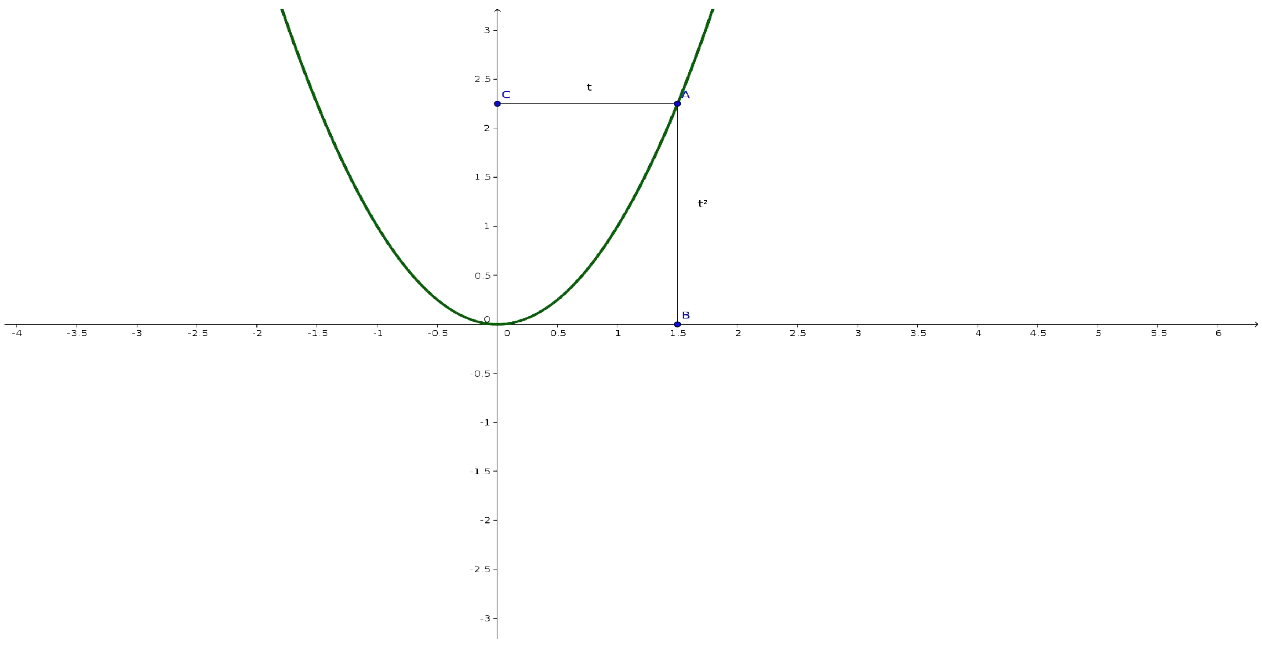
A görbék paraméteres egyenlete - 1

- Origó kp.-ú, r sugarú kör paraméteres egyenlete:
  - $x = r * \cos(t),\ y = r * \sin(t)$
  - Ahol t befutja a számegyenest, de 0 és 2π között már teljes kört kapunk



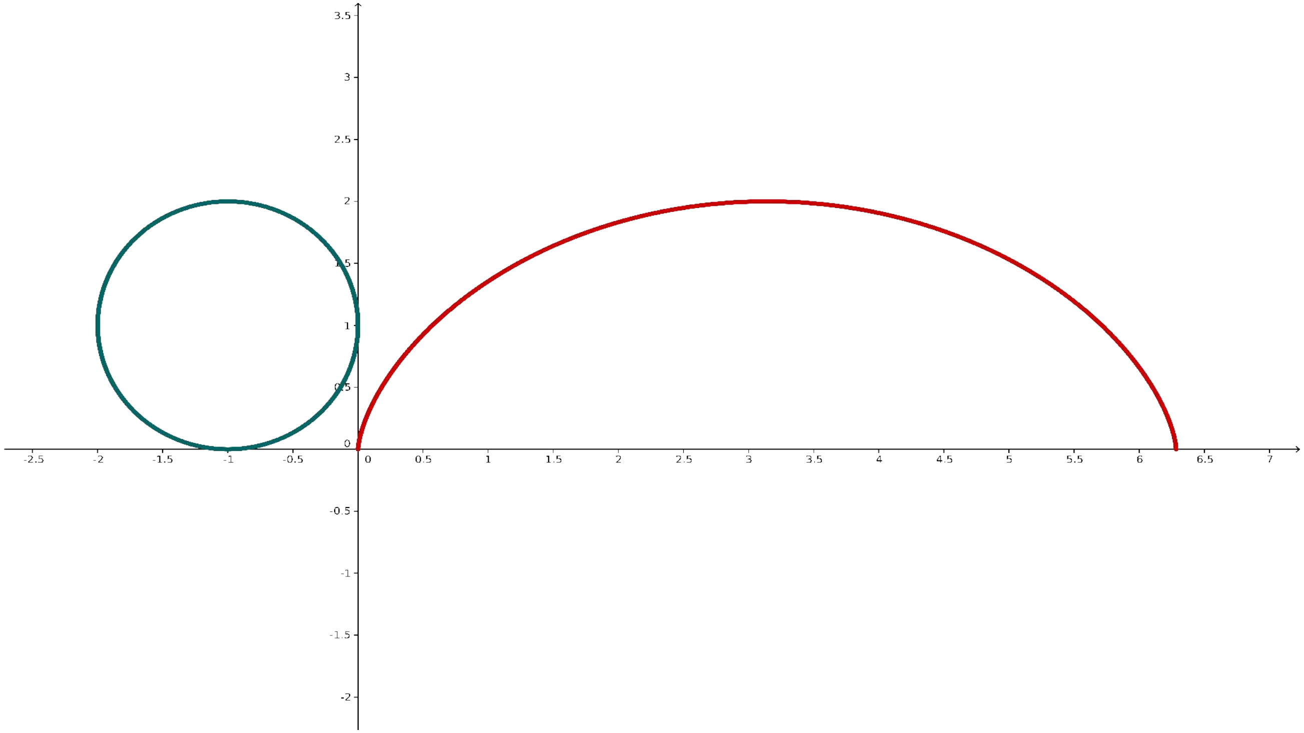
A görbék paraméteres egyenlete - 2

- Parabola
  - Nem paraméteres egyenlet: $y = x^2$
  - Paraméteres egyenlet:
    $x = t$ ebből, $y = t^2$



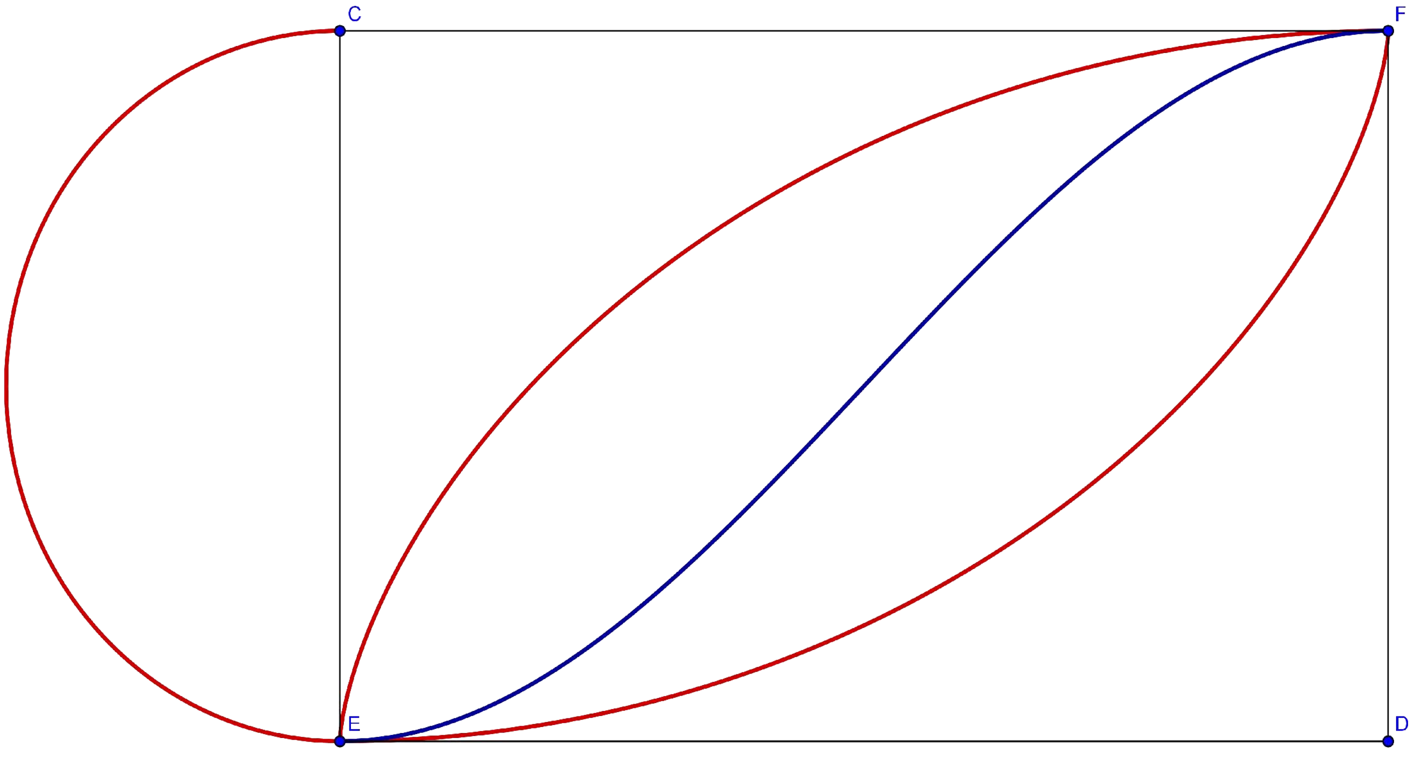
A ciklois felírása

- Egy egység sugarú kör által generált ciklois paraméteres egyenlete:
  - $x = t - \sin(t),\ y = 1 - \cos(t)$



A görbe alatti terület

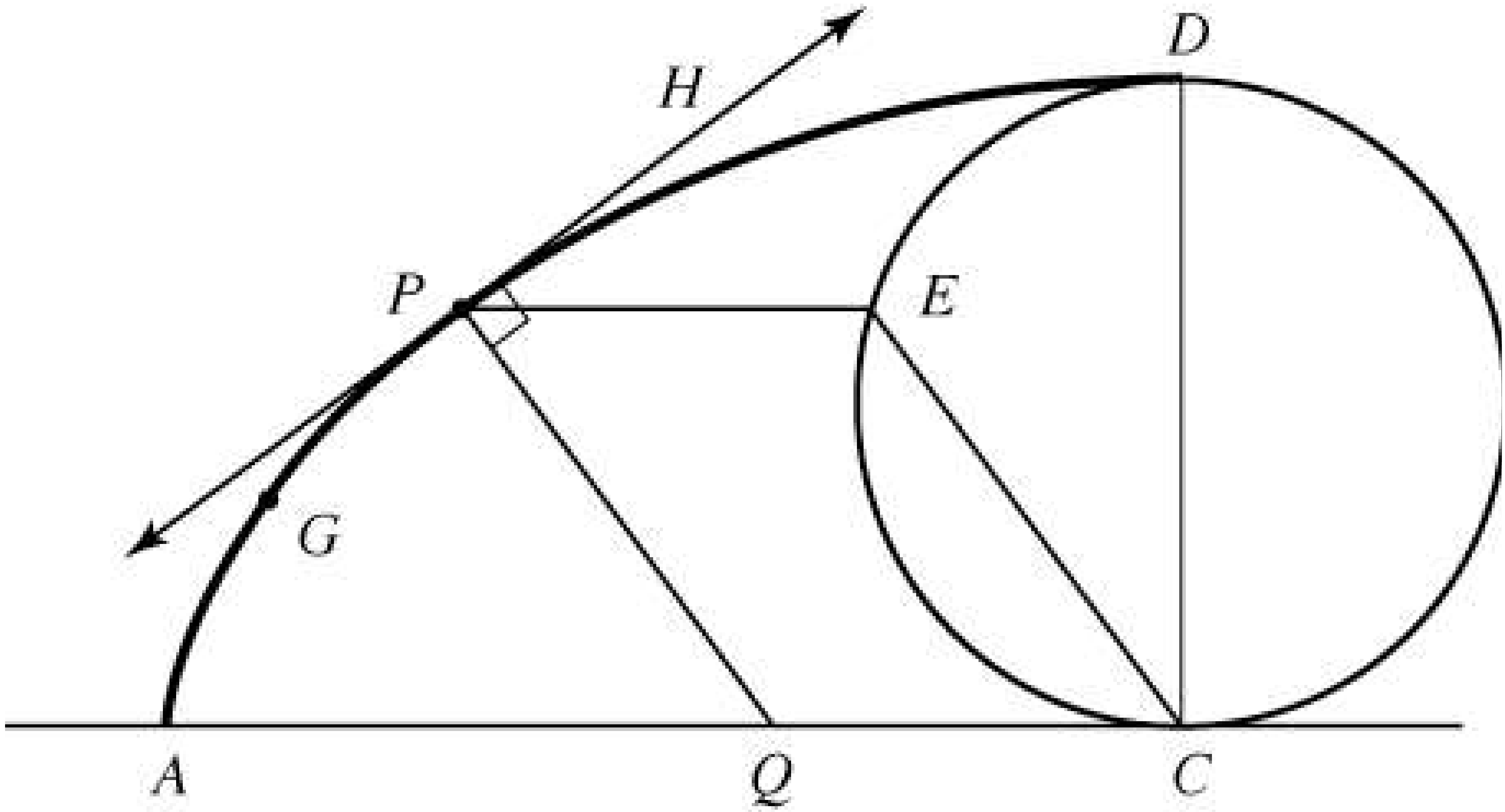
- Egy egység sugarú generáló körhöz tartozó ciklois egy ívenek görbe alatti területe:
  - $3*\pi$, *tehát* $3*$ *a generáló kör területe*



A ciklois egy ívének a hossza

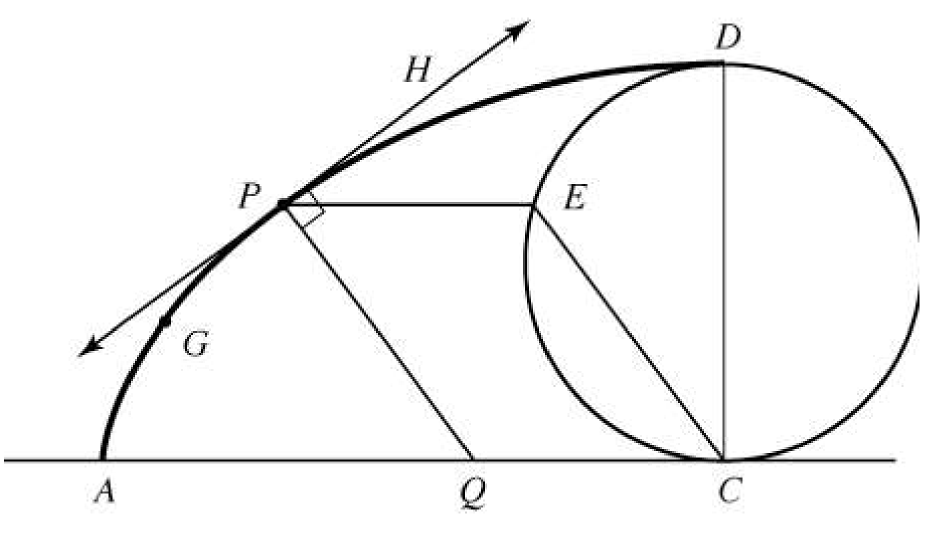
- Felfedezése:
  - Már 1650-es évek előtt próbáltak keresni egy olyan szakaszt ami ezzel az értékkel egyenlő, ám ez nem sikerült
  - 1650-es években egy Pascal által meghírdetett versenyen, Christopher Wren kiszámolta az értékét ám olyan eszközöket használt amiket mi még nem ismerünk
  - Wren számításai alapján, egy r sugarú körhöz tartozó ciklois egy ívének a hossza: 8*r

Descartes féle érintő szerkesztés



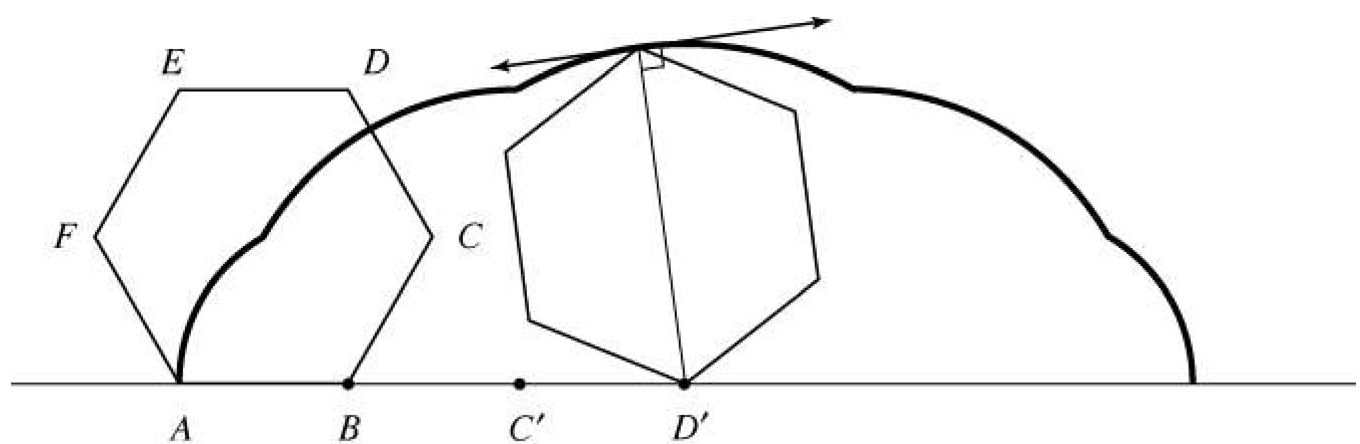
Descarets féle érintő szerkesztés - 1

- E: E rajta van a körön
  PE || AC alap
- Q: Q rajta van AC alapon
  PQ || EC
- PH: P-ben merőleges PQ-ra



Descartes féle érintő szerkesztés - 2

- Bizonyítás:
  - Tfh. egy hatszög gördül egy egyenesen, és egy pontját származtatjuk



Descartes féle érintő szerkesztés - 3

- Ha hatszög gördül, egy csúcsa körívek sorozatát írja le, melyek középpontjai rendre az eggyel távolabbi csúcsok (B, C', D', stb.). A körívek érintői merőlegesek az érintési pontot az ív középpontjával, azaz a sokszögnek jelenleg alapon található pontjával összekötő szakaszra. Ugyanez történne egy százmilliárdoldalú sokszöggel, tehát a körrel is.

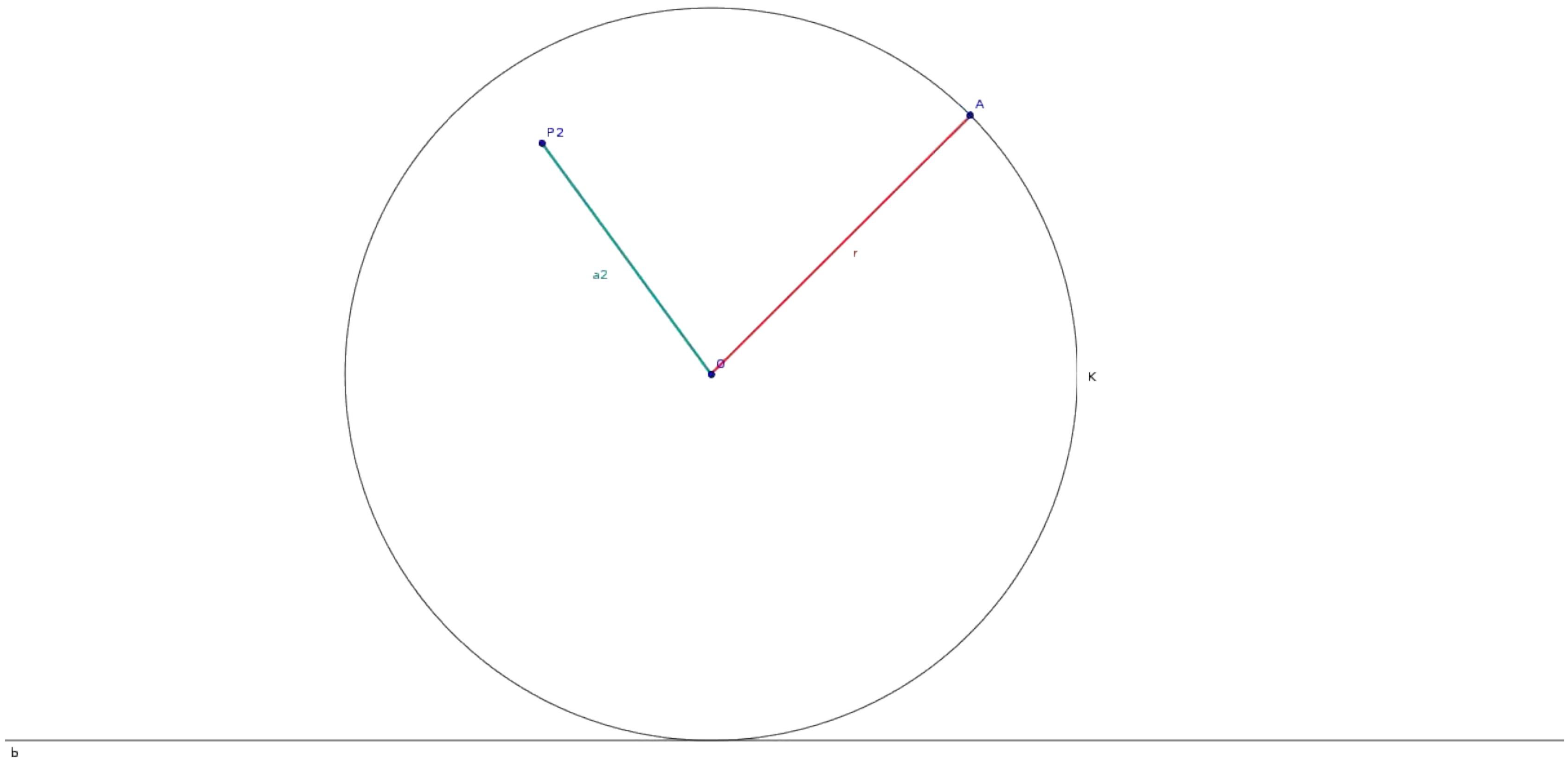
Rokon görbék - 1

- Nyújtott ciklois
  - A nyújtott ciklois hasonlóan jön létre mint a sima ciklois, de a pont aminek a nyoma lesz a körön belül található
  - Paraméteres egyenlete:

$$x = a * t - r * \sin(t),\ y = a - r * \cos(t)$$

$$akkor\ lesz\ nyújtott\ ciklois\ ha\ a < r$$

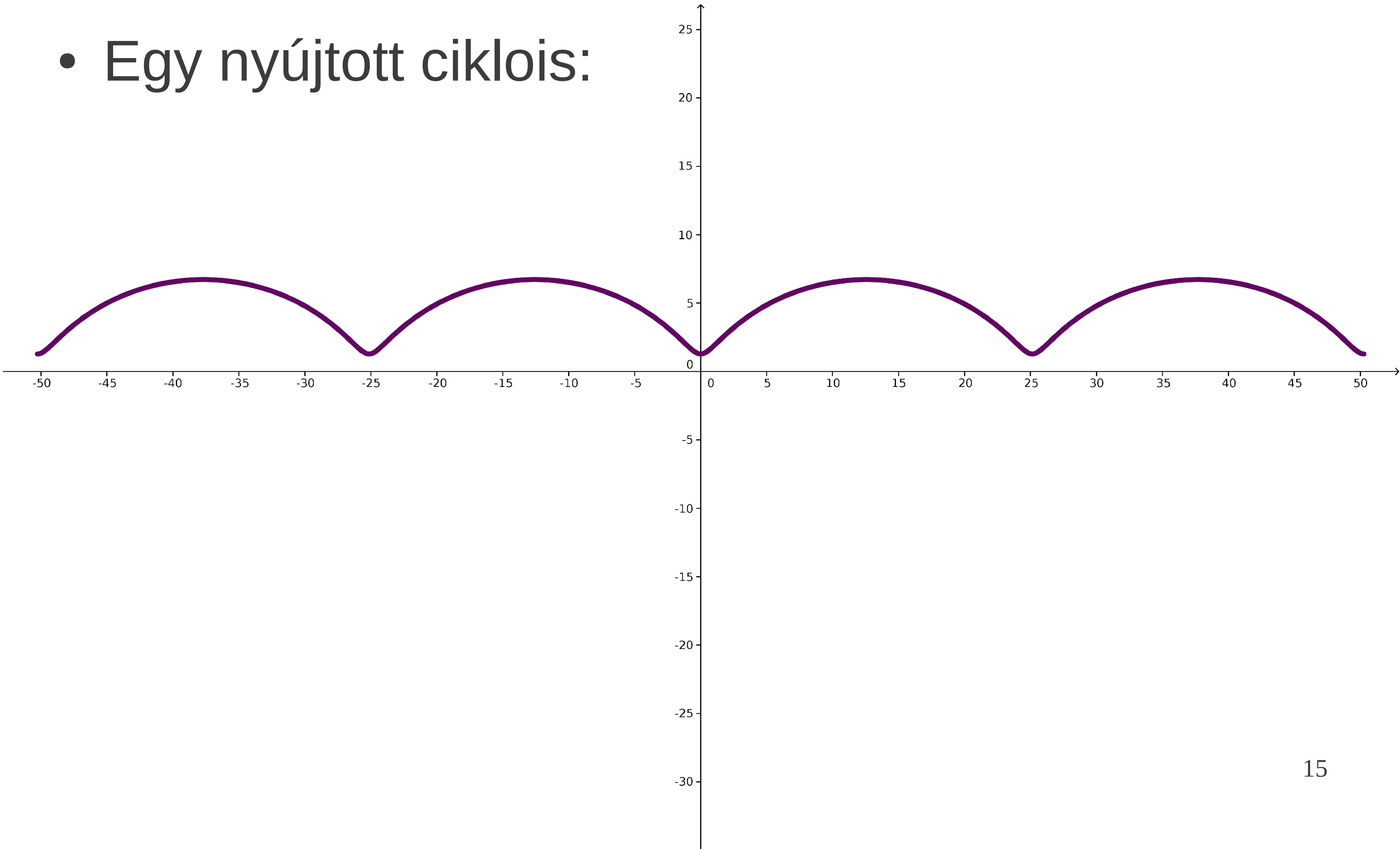
Rokon görbék - 2



a P2 pont a körön belül van, emiatt a2 < r, tehát ha gördítjük a kört a P2 nyomvonalának a képe egy nyújtott ciklois lesz

Rokon görbék - 3

- Egy nyújtott ciklois:

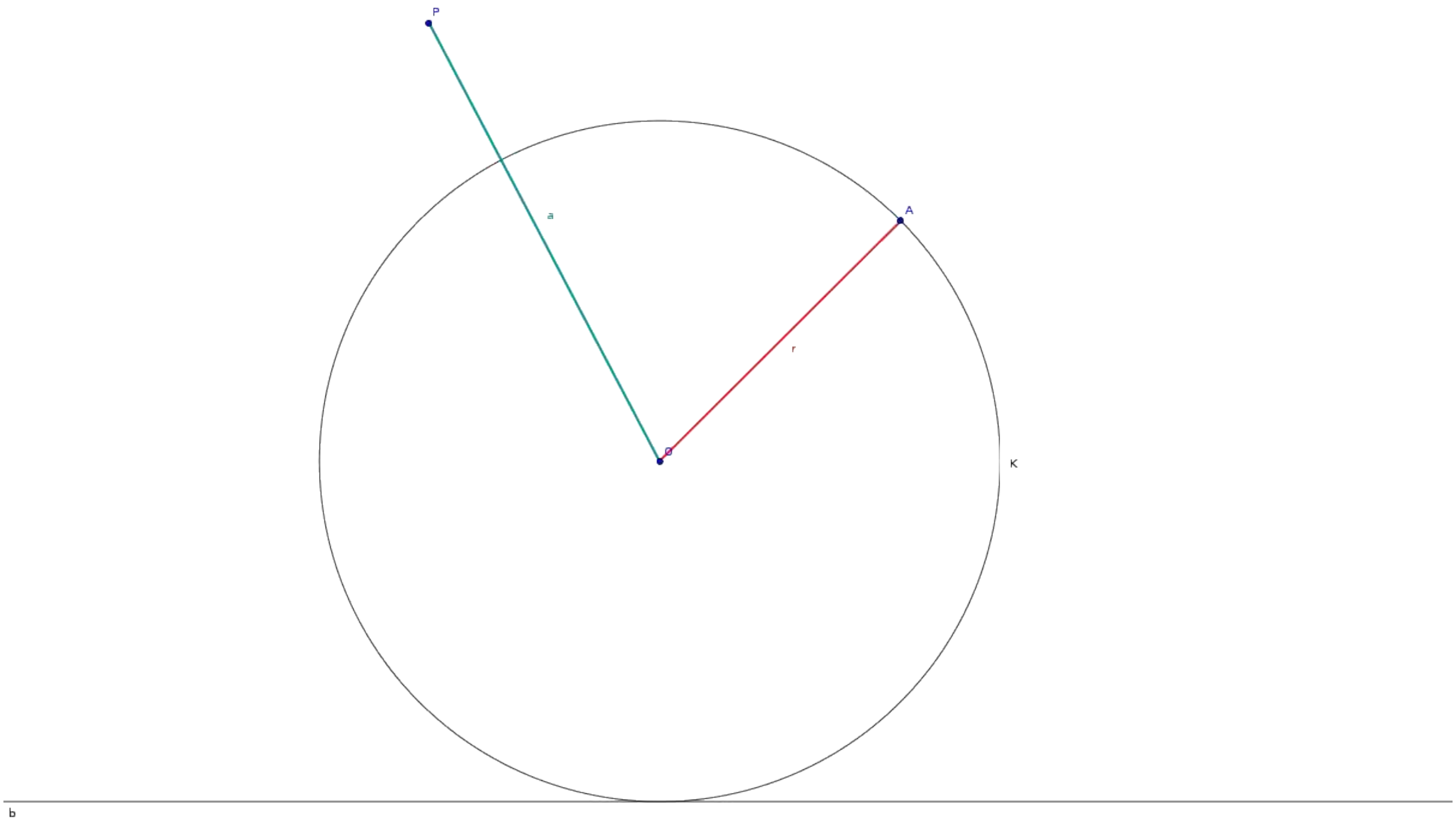


Rokon görbék – 4

- Hurkolt ciklois
  - A hurkolt ciklois hasonlóan jön létre mint a sima ciklois, de a pont aminek a nyoma lesz a körön kívül található
  - Paraméteres egyenlete

$$x = a*t - r*\sin(t),\ y = a - r*\cos(t)$$
$$akkor\ lesz\ hurkolt\ ciklois\ ha\ a > r$$

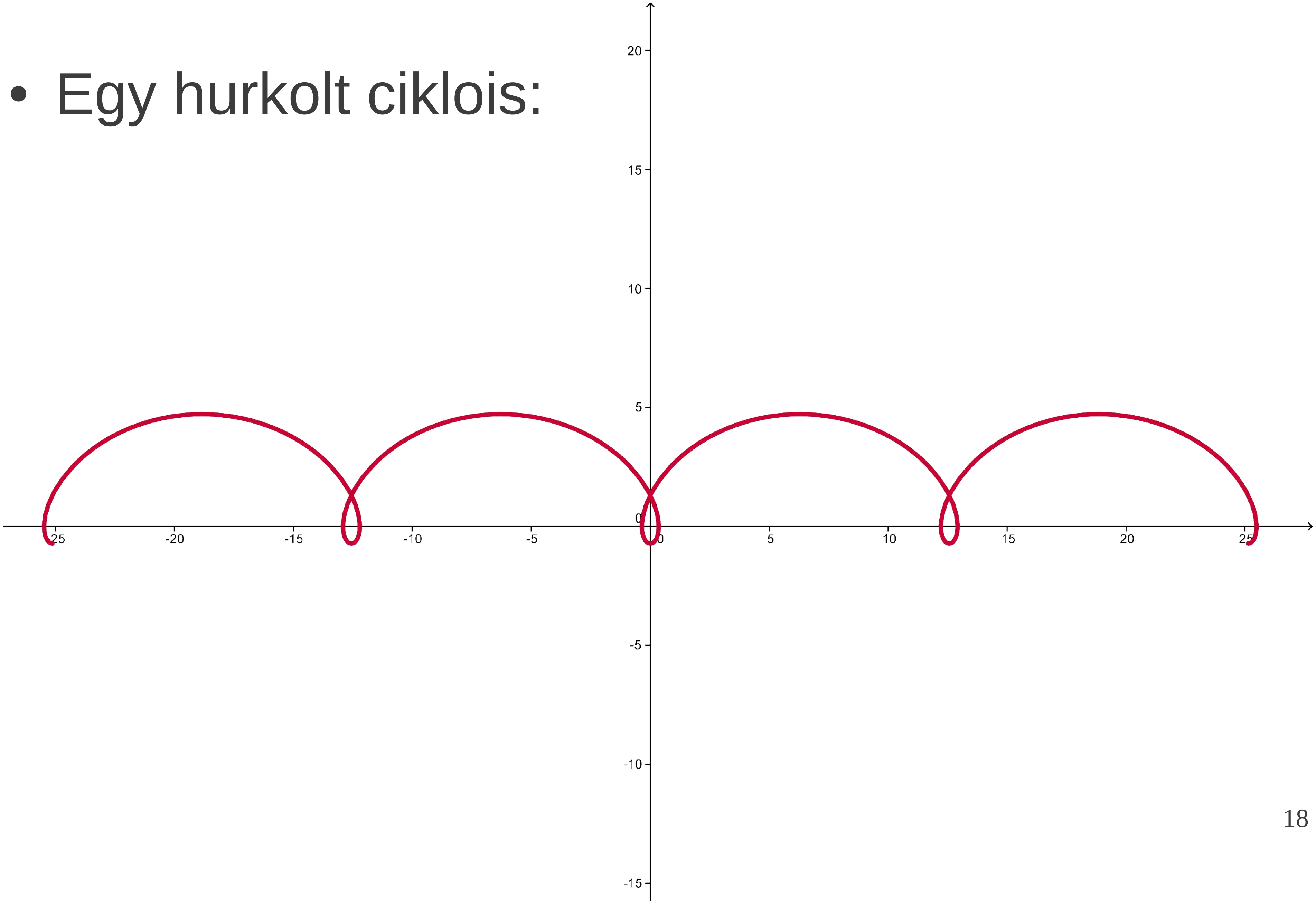
Rokon görbék - 5



a P pont a körön kívül van, emiatt $a > r$, tehát ha gördítjük a kört a P nyomvonalának a képe egy hurkolt ciklois lesz

Rokon görbék – 6

- Egy hurkolt ciklois:



Hipociklois - 1

- A hipociklois egy síkgörbe, mely úgy származtatható, hogy egy kör kerületén belül csúszásmentesen legördítünk egy másik kört, ennek egy kerületi pontjának nyomvonala a hipociklois.
- A gördülő kör sugara r, a nagy kör sugara R = k*r, ahol k valós szám.
- Ha k egész szám a görbe zárt, és k csúcsa van
- Ha k racionális, k = p/q, akkor a görbe p csúccsal rendelkezik és zárt
- Ha k irracionális szám, akkor a görbe nem záródik és kitölti a nagy kör és egy R-2*r sugarú kör közötti gyűrű területét

Hipociklois - 2

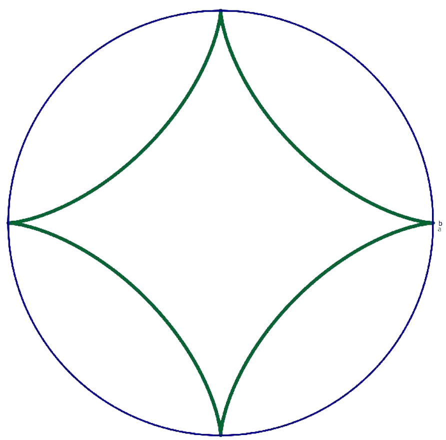
- Paraméteres egyenlete:

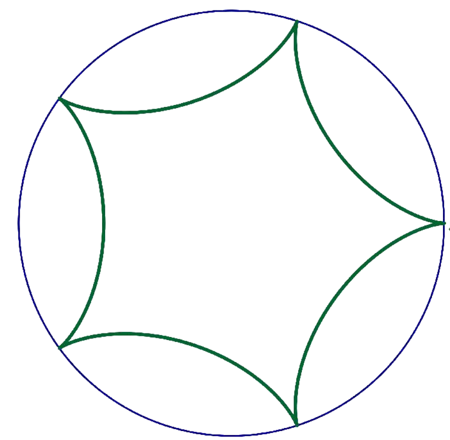
$$x=(R-r)*\cos(t)+r*\cos\left(\frac{R-r}{r}*t\right)$$

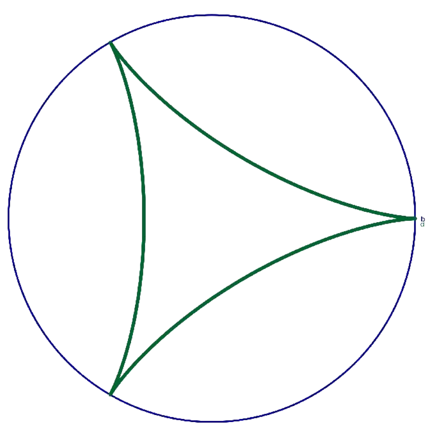
$$y=(R-r)*\sin(t)-r*\sin\left(\frac{R-r}{r}*t\right)$$

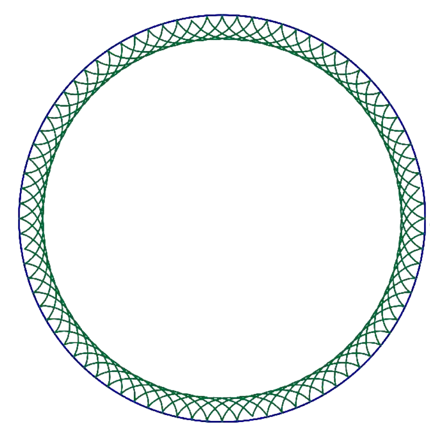
$$ahol\ \frac{R}{r}=k$$

Hipociklois - 3









Epiciklois - 1

- Az epiciklois egy síkgörbe, mely úgy származtatható, hogy egy kör kerületén csúszásmentesen legördítünk egy másik kört, ennek egy kerületi pontjának nyomvonala az epiciklois.
- A gördülő kör sugara r, a nagy kör sugara R = k*r, ahol k valós szám.
- Ha k egész szám a görbe zárt, és k csúcsa van
- Ha k racionális, k = p/q, akkor a görbe p csúccsal rendelkezik
- Ha k irracionális szám, akkor a görbe nem záródik és kitölti a nagy kör és egy R+2*r sugarú kör közötti gyűrű területét

Epiciklois - 2

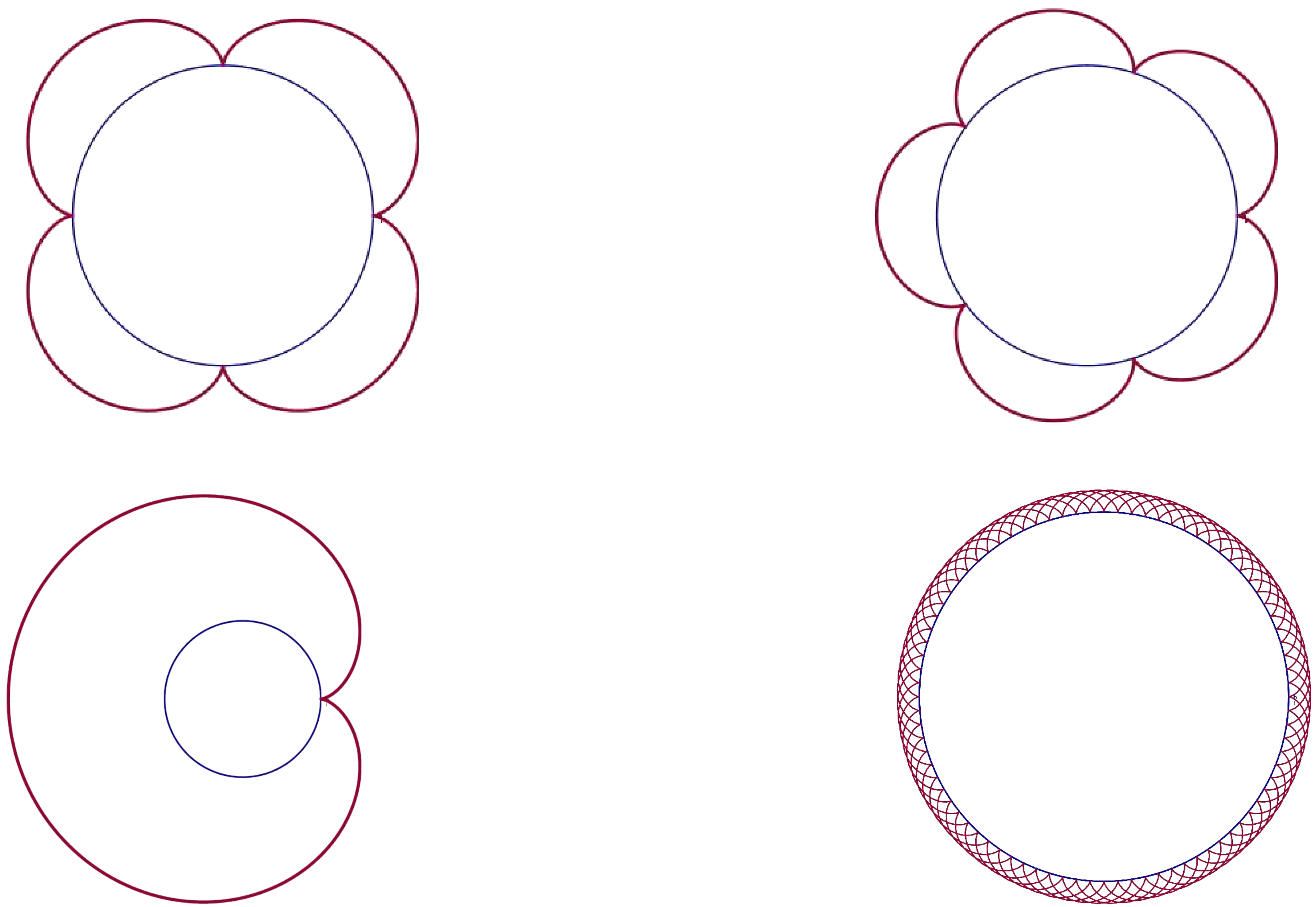
- Paraméteres egyenlete:

$$x=(R+r)*\cos(t)-r*\cos\left(\frac{R+r}{r}*t\right)$$

$$y=(R+r)*\sin(t)-r*\sin\left(\frac{R+r}{r}*t\right)$$

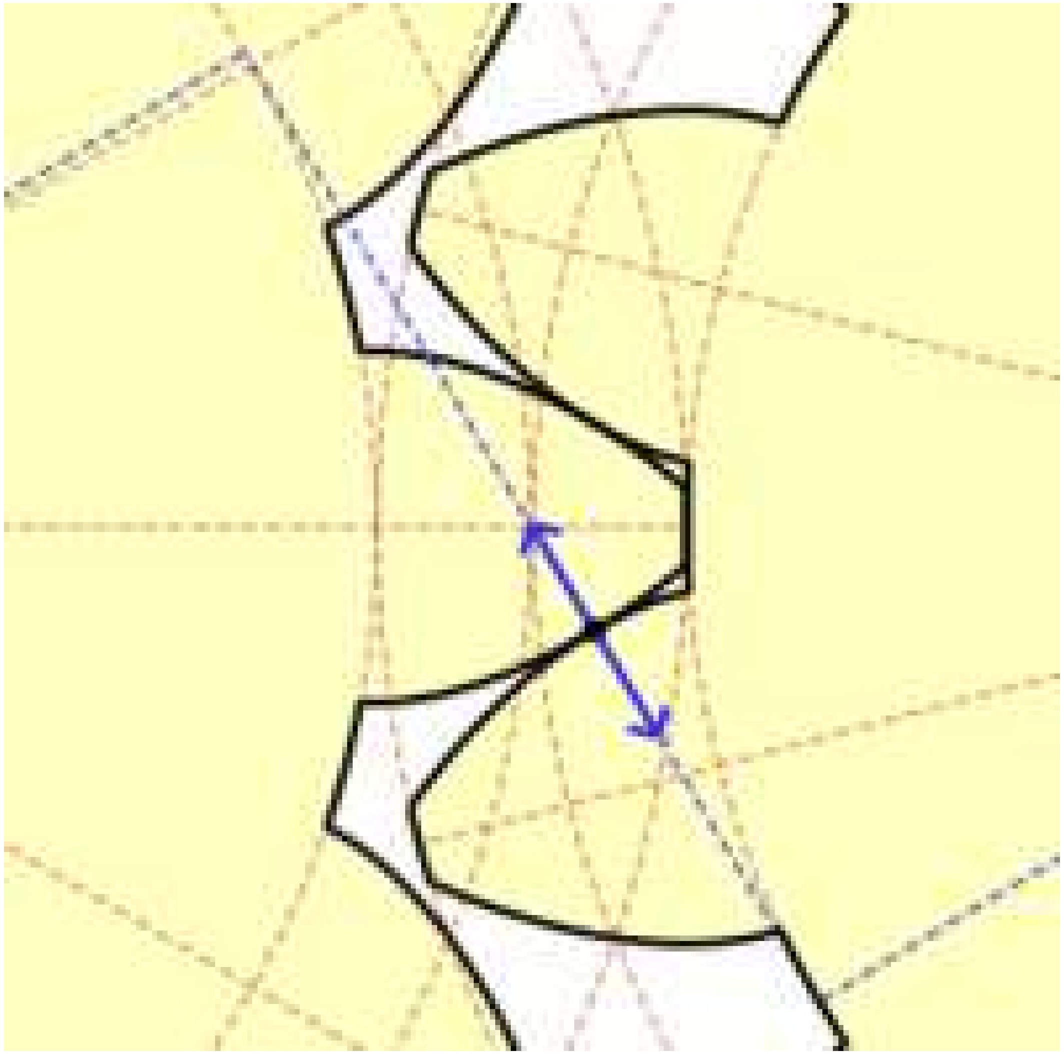
$$ahol\ \frac{R}{r}=k$$

Epiciklois - 3

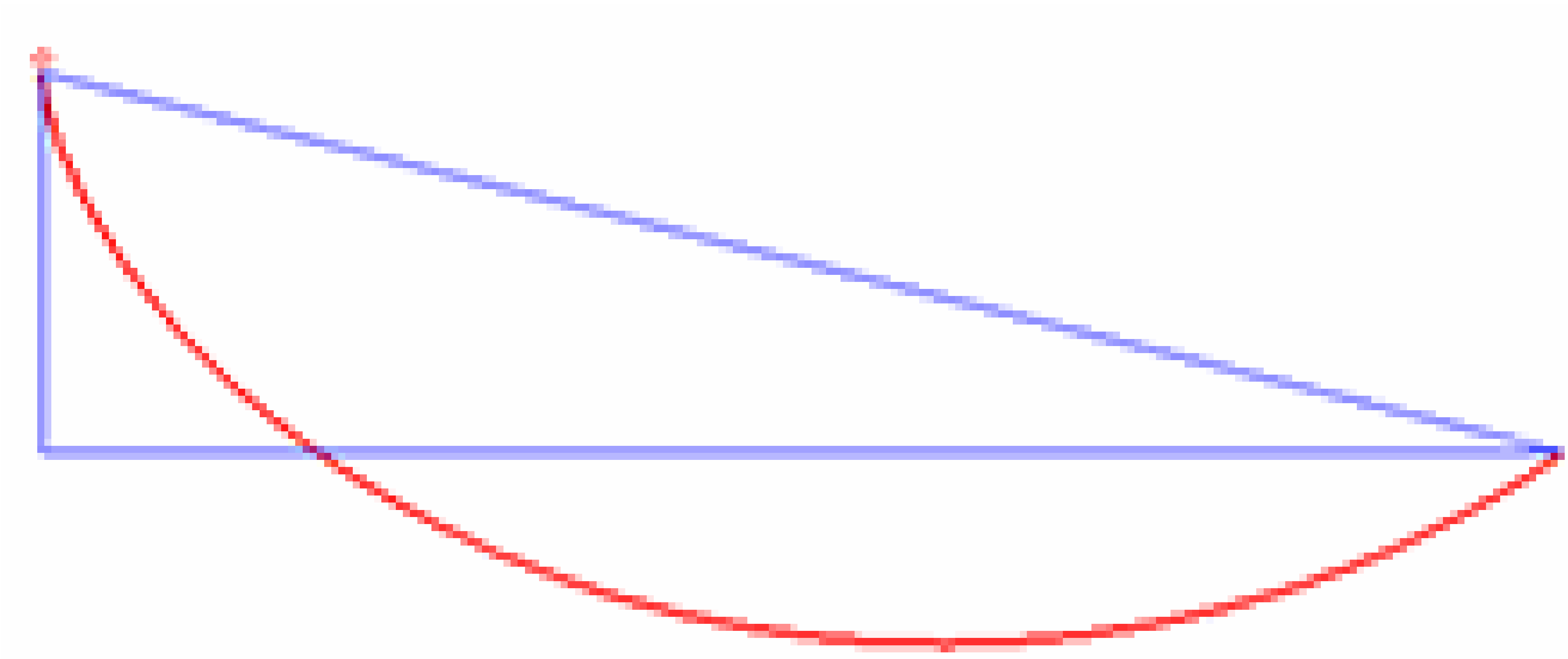


Ciklois a fizikában

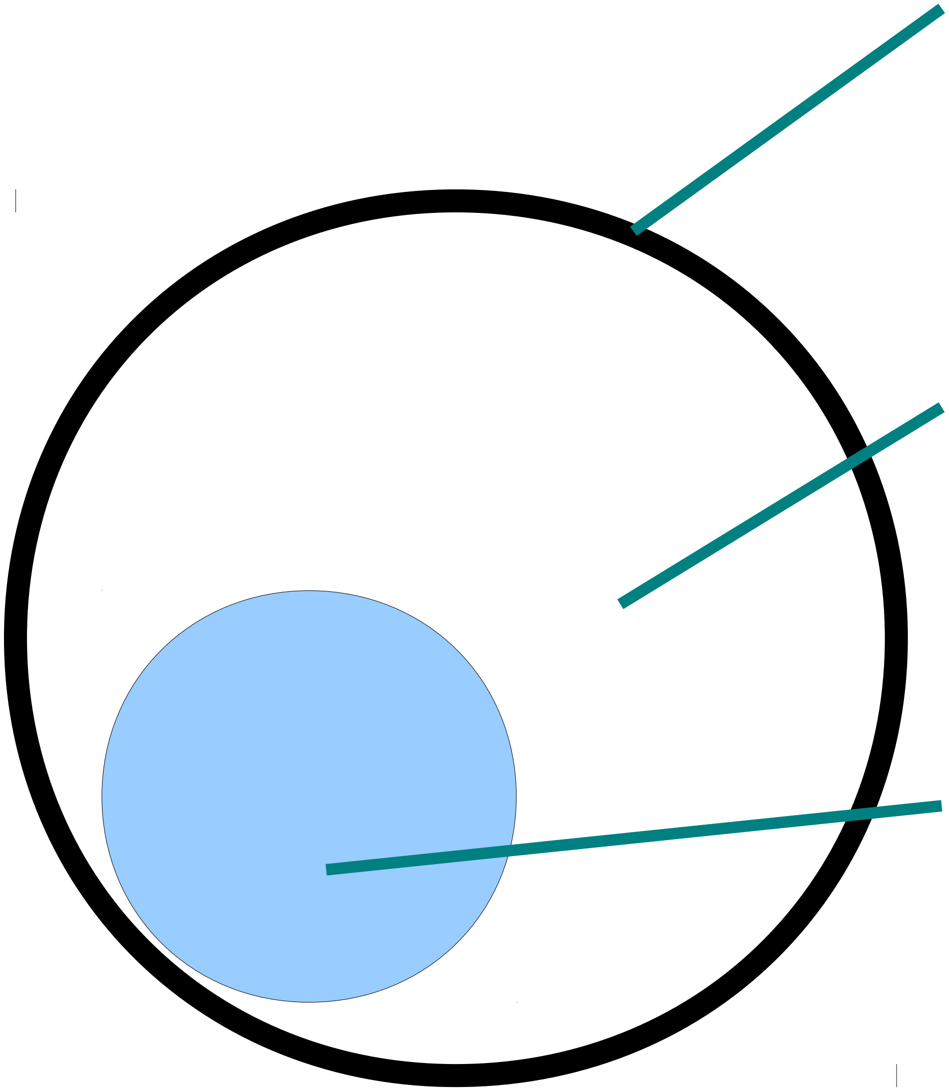
Fogaskerekek



Brachitochrome probléma



Csiga labda



- Külső héj
- Vizkózus folyadék
- Tömör mag

- Készítették:
  - Berkes Bence 11.b
  - Bodnár Dávid 11.c
  - Gulyás Lóránt 11.b
  - Kocsis Mátyás 11.b
  - Sztanka-Tóth Tamás 11.c
  - Venczel Tünde 11.c
- Felkészítő tanárok:
  - Baranyai Klára
  - Mahler Attila
- Források:
  - John Martin: The Helen of Geometry
VOL. 41, NO. 1, JANUARY 2010 THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL
  - http://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid
- Eszközök:
  - Geogebra
  - LibreOffice Impress

Köszönjük a figyelmet!