Elveszi, amit hozzáadott, mégis jól jár

Andrey Yegorov

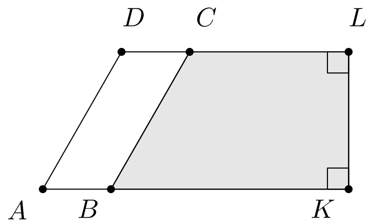
Ezt a cikket egy széles körben ismert régi történettel kezdem, amelyet az Ignatyev E. I. által írt *V tsarstve smekalki* (*A természetes ész birodalma*) című régi orosz könyvben találtam (első kiadás 1908-ban).

> Egy öregembernek három fia volt. Úgy rendelkezett, hogy halála után osszák el tevecsordáját három fia között a következőképpen. A legidősebb fiú kapja a csorda felét, a középső fiú a csorda harmadát, a legkisebb fiú a csorda kilencedét. Az öregember meghalt, 17 tevét hagyva fiaira. A fivérek megpróbálták elosztani az örökséget, de szembesültek azzal a problémával, hogy 17 sem kettővel, sem hárommal, sem kilenccel nem osztható. Reménytelennek tűnő dilemmájukkal a bölcshöz fordultak. A bölcs átlovagolt hozzájuk saját tevéjén, és elosztotta az apa csordáját a végrendeletnek megfelelően. Hogyan tehette meg ezt?

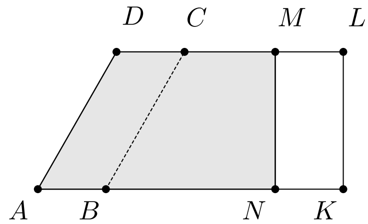
Ne törje a fejét túl hosszan ezen a zavarba ejtő rejtvényen, ez csak egy vicc: a bölcs hozzáadta saját tevéjét a csordához, majd az új tevecsorda felét (9 tevét) a legidősebb testvérnek, harmadát (6 tevét) a középső testvérnek, kilencedét (2 tevét) a legkisebb testvérnek adta, és elvette a maradék tevét ($18-9-6-3=1$), ami történetesen a sajátja volt. Ezután eltávozott, a fivéreket – és kétségtelenül Önt is – teljes mértékben összezavarva.

Biztos vagyok benne, hogy rá fog jönni a bölcs trükkjére (habár első ránézésre roppant rejtélyesnek tűnik, ugye?). Mindazonáltal a célom nem az volt, hogy bolonddá tegyem vagy megmosolyogtassam (bár szerintem ez elég jó mentség lenne). A bölcs trükkje jól illusztrálja a matematikai objektumok átalakításában egyik leggyakrabban használt technikát. Például az algebrában gyakran adunk hozzá és vonunk ki egy kifejezésből egyenlő tagokat, így megőrizve az összértéket, de egyszerűbbé téve az átalakítást. E cikkben számos hasonló algebrai átalakítással találkozhat majd, előbb azonban le kell szögeznünk, hogy az algebra közel sem az egyetlen matematikai ág, ahol a „hozzáadok és kivonok” fogást alkalmazzuk. Valójában szinte mindenütt találkozhatunk vele; az első komolyabb példa éppen geometriai lesz. Vezessük le a paralelogramma területére vonatkozó közismert képletet: a terület egyenlő az alap és a magasság szorzatával (a levezetés során ismertnek tekintjük, hogy a téglalap területe egyenlő két szomszédos oldalának szorzatával).

Tekintsük az $ABCD$ paralelogrammát, és bővítsük ki a $CBKL$ trapézzal (lásd 1. ábra), amelynek BK és CL alapjai az AB és DC meghosszabbításai, és KL szára merőleges alapjaira. Most meghúzzuk az LK-val párhuzamos MN szakaszt úgy, hogy az $ANMD$ trapéz egybevágó legyen a $BKLC$ trapézzal (2. ábra). Így az $AKLD$ trapézból megmarad a $KLMN$ téglalap, amely az egybevágóság miatt azonos területű $ABCD$-vel. $KLMN$ területe viszont $NK \cdot KL$, és NK a paralelogramma alapjával, KL pedig a magasságával egyezik meg.



1. ábra



2. ábra

Feladatok.

1. Egy szórakozott matematikus ahelyett, hogy tejet öntött volna a csészényi kávéjához, egy kanál kávét öntött a kancsónyi tejhez, majd a kancsó tartalmát gondosan összekeverte. Ezután észrevette a hibát, és a keverékből egy kanálnyit öntött vissza a kávéhoz. Melyikből van több: tejből a kávéban vagy kávéból a tejben? Függ-e a válasz attól, hogy mennyire gondosan voltak a folyadékok összekeverve? És mi köze van ennek a problémának a paralelogramma területének fenti kiszámítási módjához?

2. Mutassuk meg, hogyan lehet egy trapézt azonos területű paralelogrammává alakítani egybevágó síkidomok hozzáadásával és elvételével. Ezekből a képletekből vezessük le a trapéz és a háromszög területképletét.

3. Bizonyítsuk be, hogy egy ferde hasáb térfogata egyenlő az alkotókra merőleges síkmetszet területének és az egyik alkotó hosszának szorzatával.

4. Adjunk olyan képletet a 3. feladatban szereplő hasáb oldallapjának területére, melynek változói az oldalél hossza és az alkotókra merőleges síkmetszet kerülete.

Teljes négyzetté alakítás

Algebrával folytatjuk.

A „hozzáadunk és elveszünk”-technika egyik leggyakoribb alkalmazása algebrai kifejezések átalakítása egy összeg vagy különbség négyzetévé. Például a következőképpen:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= u^2 + 2uv + v^2 - 2uv \\ &= (u+v)^2 - 2uv, \end{aligned}$$

hasonlóan

$$u^2 + v^2 = (u-v)^2 + 2uv.$$

E két egyszerű átalakítás közül az elsőt fogjuk használni a következő példában.

1. példa. Milyen n pozitív egészekre lesz $n^4 + 4$ prímszám?

Megoldás. Az $n^4 + 4$ kifejezés átalakítható $u^2 + v^2$ alakba $u = n^2$, $v = 2$ értékekkel. Ekkor

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 \\ &= (n+2)^2 - 4n^2 \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2). \end{aligned}$$

Tehát n^4+4 mindig két egész szám szorzata, amelyek közül a kisebbik $(n-1)^2+1$, ami mindig nagyobb, mint 1, kivéve, ha $n=1$. Tehát $n>1$-re n^4+4 összetett szám, $n=1$-re pedig értéke az 5 prímszám.

E példa megoldása közben a n^4+4 polinomot két másodfokú tényező szorzatára bontottuk. A következő példa is egy hasonló szorzattá alakítás.

2. példa. Alakítsuk szorzattá az x^4+x^2+1 polinomot.

Megoldás. Adjunk hozzá és vonjunk ki x^2-et:

$$\begin{aligned} x^4+x^2+1 &= x^4+2x^2+1-x^2 \\ &= (x+1)^2-x^2 \\ &= (x^2-x+1)(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Hasonló módon vezetjük le az $x^2+px+q=0$ másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= x^2+2\cdot\tfrac{p}{2}x+\tfrac{p^2}{4}+q-\tfrac{p^2}{4} \\ &= \left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2-\left(\tfrac{p^2}{4}-q\right) \\ &= \left(x+\tfrac{p}{2}-\sqrt{\tfrac{D}{4}}\right)\left(x+\tfrac{p}{2}+\sqrt{\tfrac{D}{4}}\right), \end{aligned}$$

ahol $D=p^2-4q$-ról feltesszük, hogy nemnegatív. A szorzattá alakításból egyértelműen következik a megoldóképlet:

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{D}}{2}.$$

A következő példa egy negyedfokú egyenlet megoldása.

3. példa Oldjuk meg a következő egyenletet: $x^4+4x-1=0$.

Megoldás. Egyszerre két teljes négyzetet hozunk létre $2x^2+1$ hozzáadásával és kivonásával:

$$\begin{aligned} x^4+4x-1 &= x^4+2x^2+2-2x^2+4x-2 \\ &= \left(x^2+1\right)^2-2\left(x-1\right)^2=0. \end{aligned}$$

Ebből az következik, hogy $x^2+1=\pm\sqrt{2}(x-1)$, azaz $x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0$ vagy $x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}=0$. Ezen egyenletek megoldásával megkapjuk a gyököket:

$$x_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2},$$

$$x_{3,4}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}$$

(ahol $i=\sqrt{-1}$ az imaginárius egység).

Később meg fogjuk nézni, hogyan lehet egy tetszőleges negyedfokú polinomot másodfokú tényezők szorzatára bontani teljes négyzetté való kiegészítéssel. Ezen a ponton szeretnék megemlíteni egy történeti érdekességet, amely az x^4+a^4 kifejezés szorzattá alakításával kapcsolatos. G. W. Leibniz (egyike a matematikai analízis megalkotóinak) úgy vélte, ez a kifejezés nem bontható fel másodfokú polinomok szzorzatára. Ennek ellenére ezt most rögtön megtesszük:

$$\begin{aligned} x^4+a^4 &= x^4+2x^2a^2+a4-2x^2a^2 \\ &= \left(x^2+a^2\right)^2-\left(\sqrt{2}xa\right)^2 \\ &= \left(x^2+\sqrt{2}xa+a^2\right)\left(x^2-\sqrt{2}xa+a^2\right). \end{aligned}$$

Feladatok.

5. Milyen n pozitív egészre lesz $n^4 + 4^n$ prímszám?
6. Alakítsuk másodfokú polinomok szorzatává (lásd az előző példát)!
   (a) $x^4 - a^2x^2 + a^4$;
   (b) $x^4 + bx^2 + c$.
7. Oldjuk meg az egyenleteket!
   (a) $x^4 + 8x - 7 = 0$;
   (b) $\left(x^2 - 1\right)^2 = 4(2x + 1)$;
   (c) $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$.

Ezt a problémasort egy olyan feladattal zárom, amiben a „hozzáadunk és elveszünk"-trükköt arra használjuk, hogy az $u^2 + uv + v^2$ „majdnemteljes négyzetet" hozzuk létre, amely az $u^3 - v^3$ szorzattá alakításában jelenik meg.

4. példa Írjuk fel $a^5 + a + 1$-et két egész együtthatós polinom szorzataként.
Megoldás.

$$\begin{aligned} a^5 + a + 1 &= a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 \\ &= a^2(a^3 - 1) + a^2 + a + 1 \\ &= \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^3 - a^2 + 1\right). \end{aligned}$$

(Itt az $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$ átalakítást használtuk $u = a$, $v = 1$ értékekkel.)

Ebből a szorzatalakból levonhatjuk a következtetést, hogy a^5+a+1 összetett szám minden $a > 1$ egészre.

Feladatok.

8. Alakítsuk szorzattá a polinomokat!
   (a) $a^{10} + a^5 + 1$;
   (b) $a^8 + a + 1$.
9. Bizonyítsuk be, hogy 1 208 000 401 összetett szám.

Szorzás és osztás

Eddig csak hozzáadás és kivonás segítségével hajtottunk végre átalakításokat. Bizonyos esetekben hasznos lehet még egy inverz műveletpárt alkalmazni: a szorzást és az osztást.

5. példa Határozzuk meg a

$$P = \prod_{i=0}^{n-1} \cos 2^i x = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos 2^{n-1} x$$

szorzat értékét.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $\sin x \neq 0$, és szorozzuk meg és osszuk el P-t $\sin x$-szel:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos 2^{n-1}x}{\sin x} \\
&= \frac{\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos 2^{n-1}x}{2 \sin x} \\
&= \ldots \\
&= \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}.
\end{aligned}$$

(Ha $\sin x = 0$, $P = \pm 1$.)

Így megkaptunk egy szép képletet, aminek segítségével levezethetjük Viète képletét π-re. Ennek eléréséhez vegyük a

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

egyenlet mindkét oldalának határértékét – az egyenlet azonnal következik az 5. példából (x helyére $2^{-n}x$-et helyettesítve) –, ha $n \to \infty$.

A jól ismert $(\sin \alpha)/(\alpha) \to 1$, ahogy $\alpha \to 0$ használatával észrevehetjük, hogy a jobb oldali tört nevezője x-hez tart, ha $n \to \infty$:

$$2^n \sin \frac{x}{2^n} = x \cdot \frac{\sin (x/2^n)}{x/2^n} \to x,$$

mert $x/2^n \to 0$, ahogy $n \to \infty$. A bal oldal végtelen szorzattá válik, így a következőt kapjuk:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^i} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \cdot \ldots = \frac{\sin x}{x}.$$

$x = \pi/2$ behelyettesítésével kapjuk:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \cos \frac{\pi/2}{2^i} = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \ldots = \frac{2}{\pi}.$$

De minden x hegyesszögre

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Ezért $n \geq 2$-re

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{2^n} &= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^{n-2}}}} \\
&= \dots \\
&= \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}_{n-1 \text{ gyökjel}},
\end{aligned}$$

és így

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\dots}.$$

10. feladat. Határozzuk meg a következő végtelen szorzat értékét:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\cdot\ldots$$

$$\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}}}.$$

A „szorzás és osztás"-módszer használatával bizonyos öszegek értékét is ki lehet számolni.

6. példa Határozzuk meg az

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{n}$$

összeg értékét.

Megoldás. Szorozzuk meg (és később majd osszuk el) mindkét oldalt 9-cel:

$$\begin{aligned}
9S_n &= 9 + 99 + \dots + \underbrace{9\dots9}_{n} \\
&= 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1 \\
&= 10 + 10^2 + \dots + 10^n - n \\
&= \frac{10^{n+1}-10}{9} - n.
\end{aligned}$$

Tehát a válasz

$$S_n = \frac{10^{n+1}-9n-10}{81}.$$

7. példa Határozzuk meg az

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sin ix = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$$

összeg értékét.

Megoldás. Az olvasó bizonyíthatja (vagy emlékezhet rá), hogy $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[(\cos(A-B) - \cos(A+B)]$. Ha $\sin x/2 \neq 0$, akkor ennek a képletnek a használatával kapjuk:

$$\begin{aligned}
S_n \sin\frac{x}{2} &= \sin\frac{x}{2}\cdot\sin x + \sin\frac{x}{2}\cdot\sin 2x + \ldots + \sin\frac{x}{2}\cdot\sin nx \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \ldots + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x\right) \\
&= \sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}.
\end{aligned}$$

Ebből következően

$$S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

(Természetesen ha $\sin(x/2) = 0$, akkor $S_n = 0$.)

11. feladat. Számítsuk ki az összegek értékét!

(a) $x + 2x^2 + \ldots + nx^n$;

(b) $1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$.

Számelméleti példa következik.

8. példa Melyik 2-nek a legnagyobb hatványa, ami osztója P_n-nek, ha

$$P_n = \prod_{i=1}^{n}(n+i) = (n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot 2n?$$

Megoldás. Szorozzuk meg és osszuk el P_n-et $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$-nel és alakítsuk át a számlálót:

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{n! \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (2n)}{n!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!} \\
&= \frac{2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1))}{n!} \\
&= \frac{2^n \cdot n! \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1))}{n!} \\
&= 2^n \cdot (2n-1)!!,
\end{aligned}$$

ahol $(2n-1)!!$ a $(2n-1)$ *szemifaktoriálisát* jelöli, azaz az adott számmal azonos paritású számok szorzatát 1-től a számig, ebben az esetben a páratlan számok szorzatát $(2n-1)$-ig. Az utolsó sorból látszik, hogy a válasz 2^n.

Egyszerűen lehetetlen egyetlen cikkben többé vagy kevésbé teljes fogalmat alkotni a „hozzáadás és elvétel”-, illetve a „szorzás és osztás”-módszerrel megoldható példák sokféleségéről. (Például még csak nem is érintettem ezen technikák alkalmazásait egyenlőtlenségeknél.) Remélem, hogy Ön sok példát fog megtalálni és megoldani egyedül is. Most szeretném teljesíteni a fentiekben tett ígéretemet és megmutatni, hogyan lehet negyedfokú polinomokat másodfokú polinomok szorzatává alakítani.

Ferrari-módszer

Lodovico Ferrari (1522–1565) útját fogjuk követni, aki felfedezett egy módszert negyedfokú egyenletek megoldására másodfokú egyenletekre való redukálással (egy harmadfokú segédegyenlet használatával).

Tekintsük a

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

egyenletet, és módszerünk alkalmazásával írjuk át

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^4 + 2\frac{a}{2}x^3 + \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{a^2}{4}x^2 + bx^2 + cx + d \\
&= \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)x^2 + cx + d
\end{aligned}$$

alakba.

Most próbáljuk meg a fenti kifejezést két négyzet különbségeként felírni, hogy szorzattá tudjuk alakítani. Ennek eléréséhez $P(x)$-hez hozzáadunk és elveszünk belőle $2\alpha\left(x^2 + ax/2\right)$-t, ahol α egy egyelőre ismeretlen szám. Ekkor $P(x)$ a következő alakot ölti:

$$P(x) = \left(x^2 + \frac{ax}{2} + \alpha\right)^2 - \left(Ax^2 + Bx + C\right),$$

ahol $A = 2\alpha + a^2/4 - b$, $B = a\alpha - c$, $C = \alpha^2 - d$. Az $Ax^2 + Bx + C$ háromtagú kifejezésről szeretnénk elérni, hogy teljes négyzet legyen, ami akkor és csak akkor igaz, ha teljesülnek a következő feltételek: $A > 0$ és $B^2 - 4AC = 0$, azaz ha

$$(a\alpha - c)^2 = 4\left(2\alpha + \frac{a^2}{4} - b\right)\left(\alpha^2 - d\right).$$

Ezt a harmadfokú egyenletet α-ra $P(x)$ Ferrari-rezolvensének nevezzük. Ha α_0 a rezolvens olyan gyöke, amire $2\alpha_0 + a^2/4 - b > 0$ (vagyis $A > 0$), akkor $P(x)$ felírható két négyzet különbségeként:

$$P(x) = \left(x^2 + \frac{ax}{2} + \alpha\right)^2 - (kx - l)^2,$$

ahol k-t és l-t $P(x)$-ből és α_0-ból fejezzük ki. Tehát az eredeti egyenletet két máaodfokú egyenletre redukáltuk. (És természetesen képesek leszünk $P(x)$-et másodfokú polinomok szorzatára bontani.)

Bizonyosodjunk meg arról, hogy a rezolvens szükséges gyöke valóban létezik. A fent írt harmadfokú egyenletet a következőképpen írhatjuk:

$$Q(\alpha) = 4\left(2\alpha + \frac{a^2}{4} - b\right)\left(\alpha^2 - d\right) - (a\alpha - c)^2.$$

Ha behelyettesítünk $\alpha = 1/2\left(b - a^2/4\right)$-et, azt kapjuk, hogy $Q(\alpha) = -(a\alpha - c)^2 < 0$, míg elég nagy α-ra $Q(\alpha) > 0$ (mert $Q(\alpha) = 8\alpha^3 + \alpha$ egy másodfokú polinomja). Ebből következően létezik egy olyan $\alpha_0 > 1/2\left(b - a^2/4\right)$ szám, amire $Q(\alpha_0) = 0$ – és pontosan ezt akartuk bizonyítani.

A Ferrari-módszer alkalmazásához szükséges tudni, hogyan kell harmadfokú egyenleteket megoldani. Létezik egy képlet (az ún. *Cardano-képlet*[1]), amely megadja egy harmadfokú egyenlet gyökeit a négy alapművelet és gyökvonás (négyzet- és köbgyökvonás) használatával. A másodfokú egyenletek szintén megoldhatók gyökökkel. A Ferrari-módszerrel szintén kifejezhetjük egy negyedfokú egyenlet gyökeit – tehát létezik *megoldóképlet* a négy alapművelet és négyzet- illetve köbgyökvonás felhasználásával negyedfokú egyenlet megoldására. Paolo Ruffini (1765-1822) és Niels Henrik Abel (1802–1829) bebizonyították, hogy magasabb fokú egyenletekre nem létezik ilyen megoldóképlet. Sőt, Galois munkájából (lásd „The Short, Tubrulent Life of Évariste Galois” c. cikket a *Quantum* 1991-es november/decemberi számában) kiderül, hogy létezik olyan egész együtthatós ötödfokú egyenlet, amelynek gyökei nem fejezhetők ki együtthatóinak (tehát egészek) véges számú összeadásával, kivonásával, szorzásával, osztásával és tetszőleges kitevőjű gyökvonással. Ilyen egyenlet például az $x^5 - 25x - 5 = 0$, amelynek három valós és két komplex gyöke van.

Az olvasó esetleg vissza kíván térni a 3. feladatra, hogy megnézze, hogy működött ott a Ferrari-módszer. Vagy inkább nézzünk meg egy példát, amely a Ferrari-módszer közvetlen alkalmazását mutatja be.

8. példa Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^4 - 10x^2 - 88x + 5 = 0.$$

Megoldás. A már levezetett képlet alkalmazása helyett inkább járjuk végig a Ferrari-módszer lépéseit újra. Először írjuk át az egyenletet:

$$x^4 = 10x^2 + 8x - 5.$$

[1] *Szerkesztői megjegyzés:* Ferrari tanára, Girolamo Cardano (1501–1576) volt az első, aki publikálta ezt a képletet. A megoldóképlet felfedezésének története egyike a matematikatörténet legérdekesebb fejezeteinek, és a témáról egy különleges cikk megjelentetését is tervezzük.

Adjunk $2\alpha x^2 + \alpha^2$-et mindkét oldalhoz:

$$\left(x^2 + \alpha\right) = (10 + 2\alpha)\, x^2 + 8x + \alpha^2 - 5.$$

A jobb oldalon lévő másodfokú polinom diszkriminánsát tegyük egyenlővé nullával:

$$16 - (10 + 2\alpha)\left(\alpha^2 - 5\right) = 0.$$

Egyszerűsítés után kapjuk az egyenletet α-ra:

$$\alpha^3 + 5\alpha^2 - 5\alpha - 33 = 0.$$

Ezen egyenlet egyik gyökét könnyen kitalálhatjuk: $\alpha = -3$. Ezt az értéket behelyettesítve

$$\left(x^2 - 3\right)^2 = 4x^2 + 8x + 4 = 4(x+1)^2,$$

amelyből $x^2 - 3 = 2x + 2$ vagy $x^2 - 3 = -2x - 2$. Az $x^2 - 2x - 5 = 0$ és az $x^2+2x-1 = 0$ egyenletek megoldásával végül megkapjuk a választ: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Most próbálja meg a Ferrari-módszert egyedül alkalmazni.

Feladatok.

12. Oldjuk meg az egyenleteket!

   (a) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$;

   (b) $x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0$.

13. Alakítsuk másodfokú polinomok szorzatává!

(a) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 2$;

(b) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$.

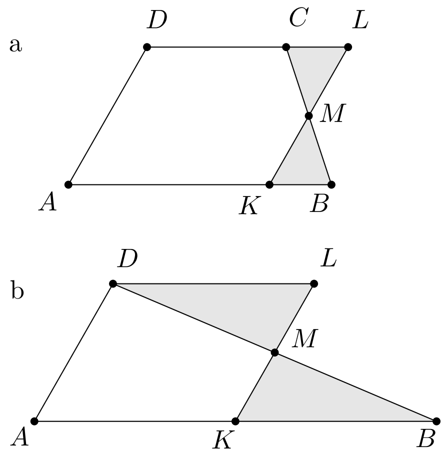
Megoldások

1. A kávé mennyisége a tejben megegyezik a tej mennyiségével a kávéban, és ez nem függ attól, milyen pontosan voltak összekeverve. Geometriailag gondolhatjuk a kanálnyi kávét a tejben a 2. ábrán lévő $ANMD$ trapéz területének, a $CBKL$ területe pedig a kanálnyi keverék visszaöntve. Ekkor $ABCD$ a „maradék kávé a kancsóban” és „mennyiségben” megegyezik $KLMN$-nel, ami „a tej a kávéba töltve”.

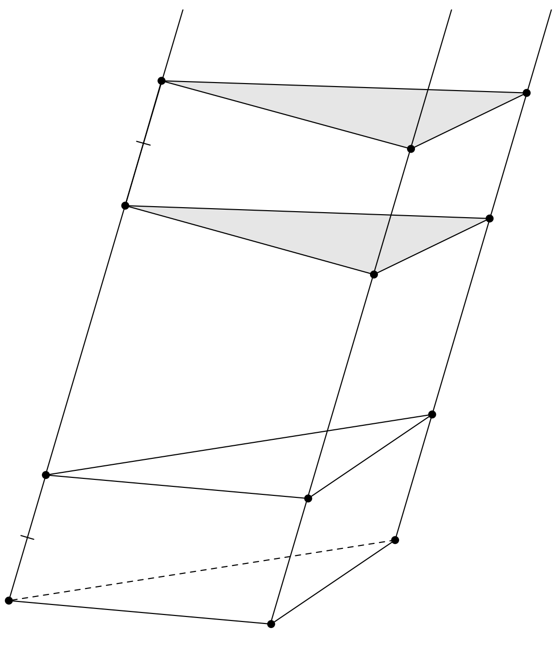
2. A 15a ábrán látható, hogyan lehet az $ABCD$ trapézt paralelogrammává alakítani a BMK háromszög levágásával és a CML egybevágó háromszög hozáadásával (M BC középpontja). Az $ABCD$ területére vonatkozó képlet így levezethető a paralelogramma területképletéből. A háromszögre vonatkozó képlet a 15b ábra alapján hasonlóan vezethető le.

3. Hosszabbítsuk meg a hasáb párhuzamos alkotóit (16. ábra), és metsszük el őket két rájuk merőleges síkkal úgy, hogy a síkok egymástól oldalhossznyi távolságra legyenek. Innentől használjuk a cikk paralelogrammára vonatkozó módszerét területek helyett térfogatokkal.

4. A feladatban szereplő terület egyenlő a kerület és az élhossz szorzatával.



15. ábra



16. ábra

5. Csak $n = 1$-re. Ha n páros, $n^4 + 4^n$ szintén páros. $n = 2k+1$-re a kifejezést szorzattá alakíthatjuk a következőképpen:

$$\begin{aligned} n^4 + 2^{2n} &= n^4 + 2 \cdot n^2 \cdot 2^n + 2^{2n} - 2^{n+1} \cdot n^2 \\ &= \left(n^2 + 2^n\right)^2 - \left(2^{k+1} \cdot n^2\right)^2 \\ &= \left(n^2 + 2^n - 2^{k+1} \cdot n^2\right)\left(n^2 + 2^n + 2^{k+1} \cdot n^2\right). \end{aligned}$$

A második tényező mindig, az első pedig akkor nagyobb 1-nél, ha $n > 1$, mert $n^2 + 2^n \geq 2\sqrt{n^2 \cdot 2^n} > n \cdot 2^{k+1}$.

6. (a) $x^4 - a^2x^2 + a^4 = x^4 + 2a^2x^2 + x^4 - 3a^2x^2 = \left(x^2 + a^2\right) - 3a^2x^2 = \left(x^2 - ax\sqrt{3} + a^2\right)\left(x^2 + ax\sqrt{3} + a^2\right)$.

(b) Ha $D = b^2 - 4c \geq 0$, akkor $x^4 + bx^2 + c = \left(x^2 - y_1\right)\left(x^2 - y_2\right)$, ahol y_1 és y_2 az $y^2 + by + c = 0$ egyenlet gyökei. Izgalmasabb a helyzet, ha $D < 0$, vagyis $4c > b^2$, ekkor ugyanis

$$\begin{aligned} x^4 + bx^2 + c &= x^4 + 2\sqrt{c}x^2 + c + (b - 2\sqrt{c})\, x^2 \\ &= \left(x^2 + \sqrt{c}\right)^2 - (2\sqrt{c} - b)\, x^2, \end{aligned}$$

amit két négyzet különbségeként tudunk szorzattá alakítani.

7. (a) $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}\sqrt{4\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}}$ és $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{8 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$.

Segítség: $x^4 + 8x - 7 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2\left(x^2 - 4x + 4\right) = \left(x^2 + 1\right)^2 - 2\,(x - 2)^2$.

(b) $1 \pm \sqrt{2}$ és $-1 \pm i\sqrt{2}$. Segítség: az egyenlet $\left(x^2 + 1\right)^2 = 4\,(x + 1)^2$ alakra hozható.

(c) $\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)^2 = 1 - \dfrac{2x^2}{x+1}$.

Segítség: mindkét oldalból kivonva $2x^2/(x+1)$-et és a bal oldalt az $x - x/(x+1)$ különbség négyzeteként felírva kapjuk, hogy

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 = 1 - \frac{2x^2}{x+1}.$$

Ezt az egyenletet a $t = x^2/(x+1)$ helyettesítéssel lehet megoldani.

8. (a) $a^{10} + a^5 + 1 = a^{10} + -a + a^5 + a + 1 = a\left(a^3 - 1\right)\left(a^6 + a^3 + 1\right) + a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = \left(a^2 + a + 1\right)\left[\left(a^2 - a\right)\left(a^6 + a^3 + 1\right) + a^2\,(a - 1) + 1\right] = \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1\right)$.

(b) $a^8 + a + 1 = a^8 - a^5 + a^5 + a + 1 = a^5\left(a^3 - 1\right) + \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^3 - a^2 + 1\right) = \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^6 - a^5 + a^3 - a^2 + 1\right)$.

9. $1\ 280\ 000\ 401 = a^7 + a^2 + 1$, ahol $a = 20$. Viszont $a^7 + a^2 + 1 = a^7 - a + a^2 + a + 1 = \left(a^2 + a + 1\right)\left[a\,(a - 1)\left(a^3 + 1\right) + 1\right]$.

10. Az eredmény $3\sqrt{3}/\left(2\pi\right)$, melyet $(\sin x)\,/\,(x)$ cikkben leírt végtelen szorzatként való kibontásából kapunk $x = 2\pi/3$ behelyettesítésével.

11. (a) $\dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$.

Szorozzuk meg S_n-et x-szel, majd vegyük az $xS_n - S_n$ különbséget.

Megjegyzés: az $x = 1$ esetben az összeg az első n természetes szám összege, értéke $n(n+1)/2$.

(b) $\dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$

Szorozzuk meg a összeget $\sin(x/2)$-vel, majd alakítsuk át a 7. példa lépéseit követve.

12. (a) $1 \pm \sqrt{3}$ és $1 \pm i\sqrt{2}$. Az egyenletet átalakítjuk a bal oldalon teljes négyzetté alakítással:

$$\left(x^2 - 2x\right)^2 = -x^2 + 2x + 6.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadunk $2\alpha\left(x^2 - 2x\right) + \alpha^2$-et:

$$\left(x^2 - 2x + \alpha\right) = (2\alpha - 1)\, x^2 - (4\alpha - 2)\, x + 6 + \alpha^2.$$

Az egyenlet Ferrari-rezolvense

$$(2\alpha - 1)^2 = (2\alpha - 1)\left(6 + \alpha^2\right),$$

és gyöke $\alpha = 1/2$. Ezen α behelyettesítésével az egyenlet az

$$\left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

alakot ölti.

(b) $1 \pm \sqrt{3}$ és $-3/2 \pm \sqrt{17}/2$.

13. (a) $\left(x^2 + x - 1\right)\left(x^2 + x + 2\right)$. (b) $x^4 + 2x^3 + x - \left(4x^2 + 4x + 1\right) = \left(x^2 + x\right)^2 - (2x + 1)^2 = \left(x^2 - x - 1\right)\left(x^2 + 3x + 1\right)$.