Utassy Katalin: Néhány feladat a sorozatok témaköréből

1. *Egy sorozat első tagja* 1*, s minden további tagot úgy képezünk, hogy az előző kétszeresét hárommal növeljük, azaz* $a_1 = 1$ *és* $a_n = 2a_{n-1} + 3$
   A sorozat első 100 *tagja közül hány osztható* 13*-mal?*

   Megoldás:

   A sorozat tagjai: $1, 5, 13, 29, 61, 125, 253, 509, 1021, 2045, 4093, 8189, 16381 \ldots.$

   13-as maradékai: $1, 5, 0, 3, 9, 8, 6, 2, 7, 4, 11, 12, 1$

   Innen kezdve a maradékok periodikusan ismétlődnek. Az első 100 tagban 8 teljes periódus és még négy tag szerepel.

   Így 9 db 13-mal osztható számot találtunk a sorozat első 100 tagja között.

   Megjegyzés:

   A sorozat szomszédos tagjainak különbségét vizsgálva a $4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ számokat, vagyis kettő hatványait kapjuk. Ezek alapján a sejtés

   (1) $a_n = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n$, ha $n > 1$

   (2) $2a_n = 2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{n+1}$.

   A két egyenletet egymásból kivonva az $a_n = 2^{n+1} - 3$ közvetlen képletet kapjuk a sorozat n-edik tagjára. A bizonyítás pl. teljes indukcióval történhet.

2. *Egy sorozat első tagja* 77*, s minden új tagja az előző tag számjegyei összegének* 13*-szorosa. Mi a sorozat* 2010*. tagja?*

   Megoldás:

   így a sorozat tagjai: 77, 182, 143, 104, 65, 143….. Tehát a sorozat tagjai két kezdőtag után periodikusan ismétlődnek, a periódus hossza 3. Mivel $2008 = 669 \cdot 3 + 1$, így a 2010. tag a 143.

3. *Tekintsünk egy* $\overline{ab}$ *kétjegyű számot* $(a, b$ *számjegyek,* $a \neq 0)$*, s a számból kiindulva képezzük az alábbi sorozatot:* $\overline{ab}, a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, \ldots$ *vagyis a negyedik tagtól kezdve mindegyik tag az előtte álló két tag összege. A sorozatot akkor mondjuk „sikeresnek”, ha visszakapjuk a kiindulási számot, vagyis valamelyik 1-nél nagyobb indexű tag értéke* $\overline{ab}$*. Határozzuk meg az összes olyan kiindulási számot, amely „sikeres” sorozatot eredményez!*

   Megoldás:

   A képzési szabály alapján a sorozat tagjai és az eredeti szám egyenlőségét az alábbi esetekben kell megvizsgálni:

$a_1 = 10a + b$				
$a_2 = a$	így	$10a + b = a$	ebből $9a + b = 0$	nincs megoldás
$a_3 = b$	így	$10a + b = b$	$10a = 0$	nincs megoldás
$a_4 = a + b$	így	$10a + b = a + b$	$9a = 0$	nincs megoldás
$a_5 = a + 2b$	így	$10a + b = a + 2b$	$9a = b$	a megoldás:19
$a_6 = 2a + 3b$	így	$10a + b = 2a + 3b$	$8a = 2b$	két megoldás van: 14, 28
$a_7 = 3a + 5b$	így	$10a + b = 3a + 5b$	$7a = 4b$	a megoldás: 47
$a_8 = 5a + 3b$	így	$10a + b = 5a + 3b$	$5a = 7b$	a megoldás: 75
$a_9 = 8a + 13b$	így	$10a + b = 8a + 13b$	$2a = 12b$	a megoldás: 61

$a_{10} = 13a + 21b > 10a + b$ és a sorozat szigorúan monoton növekvő, így a további sorozat tagokat már nem kell vizsgálni.

Tehát hat megfelelő kiindulási számot kaptunk: 14, 19, 28, 47, 61, 75.

4. *Egy számsorozat első tagja* 2*, második tagja* 3*, a továbbiakat pedig úgy képezzük, hogy minden egyes tag* 1*-gyel kisebb legyen, mint két szomszédjának szorzata. Mennyi a sorozat első* 1995 *tagjának összege?*

Megoldás:

$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1} - 1$ vagyis $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{a_{n-1}}$

A sorozat tagjai: $2, 3, 2, 1, 12, 3, 2, \ldots$ A sorozat tagjai periodikusan ismétlődnek, a periódushossz 5. Egy csoporton belül a tagok összege 9.

Az első 1995 tagban 399 teljes periódus ismétlődik, vagyis az első 1995 tag összege $399 \cdot 9 = 3591$

Megjegyzés:

Más kezdőtagokkal kipróbálva úgy tűnik a hatodik lépésben mindig visszakapjuk az eredeti számot. Legyenek a kezdőértékek, $a_1 = A$ és $a_2 = B$. Ekkor a képzési szabály alapján:

$$a_3 = \frac{B+1}{A}, \quad a_4 = \frac{\frac{B+1}{A} + 1}{B} = \frac{A+B+1}{AB}, \quad a_5 = \frac{\frac{A+B+1}{AB} + 1}{\frac{B+1}{A}} = \frac{A+1}{B},$$

$$a_6 = \frac{\frac{A+1}{B} + 1}{\frac{A+B+1}{AB}} = A, \quad a_7 = \frac{A+1}{\frac{A+1}{B}} = B.$$

Tehát a sorozat a kezdőtagoktól függetlenül valóban mindig periodikus, a periódus hossza 5.

5. *Az* $1, 9, 9, 9$ *számokból úgy képezzük a következő tagot, hogy az előző* 4 *szám összegének az utolsó számjegye. Igazak-e az állítások?*
a, Az első 17 *tag összege* 90.
b, Az első 1991 *tag összege páratlan.*
c, A sorozat 200. *eleme a* 9*-es*
d, Szerepel a sorozatban egymás után az $1, 2, 3, 4$.

Megoldás:

A sorozat tagjai: $1, 9, 9, 9, 8, 5, 1, 3, 7, 6, 7, 3, 3, 9, 2, 7, 1, 9, \ldots$.

Négy pártalan tag után egy páros következik, ezen tulajdonság ismétlődik, ezek alapján a válaszok:

a, igen

b, Minden ötös csoportban páros az összeg, az első 1990 tag összege páros, az 1991.tag páratlan, így az összeg is páratlan, tehát igaz.

c, Minden öttel osztható helyen páros szám áll, így nem igaz

d, A sorozatban négy páratlan számot követ egy páros, így nem igaz.

6. *Leírunk egymás után* 2001 *számjegyet úgy, hogy bármely két szomszédos számjegy* 17*-tel vagy* 23*-mal osztható kétjegyű számot alkot. Határozzuk meg az első számjegyet, ha tudjuk, hogy az utolsó számjegy a hetes!*

Megoldás:

A 17-tel osztható kétjegyű számok: 17, 34, 51, 68, 85.

A 23-mal osztható kétjegyű számok: 23, 46, 69, 92.

Az utolsó számjegy 7, így az utolsó előtti számjegy egyértelműen az 1 és így tovább a többi számjegy is egyértelműen meghatározott.

A kapott számsorozat ...92346 92346 8517. A 92346 számcsoport visszafelé az ötödik tagtól kezdve ismétlődik. A négy utolsó szám előtt 399 ötös csoport van így az első számjegy a 4.

7. *A koordináta-rendszer origójában él egy Krél. Ha elindul otthonról, akkor váltakozva vízszintesen és függőlegesen lép, lépéseinek hossza folyamatosan nő. Hazatérhet-e, ha az n-edik lépésének hossza*
   a, n *b,* 2^{n-1} *c,* n^2 *d,* $n!$

   Megoldás:

   a, Igen. $1-3-5+7=2-4-6+8$

   b, Nem. Csak az első lépés hossza páratlan, a többi páros.

   c, Igen. $1-9-25+49-81+121-169-225=4-16-36+64-100+144+196-256$

   d, Nem. Csak az első lépés hossza páratlan.

A feladatokat az alábbi kiadványokból válogattam:

Orosz Gyula: Néhány érdekes sorozat

Orosz Gyula: Periodikus sorozatok

Feladatok a Berzsenyiből (2001)

KöMal gy 1440. (4. feladat)