Urbán János: Néhány egyenlet a diofantikus egyenletek köréből

1. Egy egész hosszúságú négyzetet feldaraboltunk 15 darab 1×1-es négyzetre és egy nagyobb négyzetre. Mekkora volt az eredeti négyzet oldala?
2. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

   a.) $x^2 + 2xy - 3y^2 = 20$;

   b.) $6x^2 - xy - 12y^2 = 14$.
3. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:
$$2xy + 3y^2 = 24.$$
4. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán:

   a.) $x(y+1)^2 = 243y$;

   b.) $x^2 - xy + 2x - 3y = 11$.
5. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

   a.) $x(x+1) = 4y(y+1)$;

   b.) $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$.
6. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében a következő egyenletrendszert:
$$\begin{aligned} x + yz &= 19 \\ x + y + z &= 14 \end{aligned}$$
7. Hány megoldása van az egész számok körében a következő egyenletnek
$$x^2 - y^2 = 2^{100}?$$
8. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán:
$$3^x - 2^y = 1.$$
9. Két szomszédos pozitív egész szám köbének különbsége n^2 ($n > 0$, egész). Igazoljuk, hogy n két négyzetszám összege. (Például: $8^3 - 7^3 = 512 - 343 = 169 = 13^2, 13 = 2^2 + 3^2$.)
10. Vizsgáljuk egyszerre a következő két egyenlet megoldásait az egész számok halmazán:
$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 &= 1 \\ x^2 - 2y^2 &= -1. \end{aligned}$$
    Igazoljuk, hogy ha $(a; b)$ megoldása az egyik egyenletnek, akkor $(a + 2b; a + b)$ megoldása a másik egyenletnek és fordítva.

    Mutassuk meg ennek alapján, hogy mindkét egyenletnek végtelen sok megoldása van.

11. Mutassuk meg, hogy az $x^2 - 2y^2 = -1$ egyenletnek végtelen sok olyan megoldása van az egész számok halmazán, ahol x és y is páratlan szám.

12. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan derékszögű háromszög van, amelynek oldalhosszait egész számokkal lehet megadni, és a két befogó hossza két szomszédos egész szám.

13. A következő két egyenlőség nyilván igaz:

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 13 + 14 = 105 = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$$

Adjunk meg végtelen sok olyan n-et, amelyre teljesül, hogy az első n pozitív egész szám összege egyenlő a következő néhány szám összegével.

14. Igazoljuk, hogy az

$$x^2 - xy - y^2 = \pm 1$$

egyenleteknek végtelen sok megoldása van a nemnegatív egész számok halmazán. (Mutassuk meg, hogy $(0; 1)$ megoldás, és ha $(a; b)$ megoldás, akkor $(a + b; a)$ is megoldás.)

15. Írjuk fel a Pascal háromszög 14. és 15. sorát, és figyeljük meg, hogy $\binom{15}{5} = \binom{14}{6}$. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan $x, y > 0$ egész szám van, amelyre teljesül, hogy $\binom{x}{y-1} = \binom{x-1}{y}$.