7.-8. osztályos feladatok /NEF

1. Az igazmondók, hazugok és megalkuvók szigetén a következő párbeszéd hangzott el:
   $\mathcal{A}$: Megalkuvó vagyok.
   $\mathcal{B}$: Nincs hazudós köztünk.
   $\mathcal{A}$: $\mathcal{B}$ vagy $\mathcal{C}$ igazmondó.
   $\mathcal{C}$: $\mathcal{B}$ hazug.
   $\mathcal{B}$: $\mathcal{C}$ az előbb hazudott.
   $\mathcal{C}$: Az „Ön igazmondó vagy megalkuvó?” kérdésre egy igazmondó és egy hazug is ugyanazt mondaná.

   (A megalkuvók felváltva mondanak igazat és hazudnak)

   Melyikük melyik csoportba tartozik?

2. Melyik betű melyik számjegyet takarja az alábbi összeadásban?

```
   BABO
 + SNOB
 ------
  LOBAN
```

   (Különböző betűk különböző számjegyeket, azonos betűk azonosakat jelölnek.)

3. Van egy bástyánk és egy királyunk. Hányféleképpen tehetjük fel őket egy sakktáblára úgy, hogy semelyik se üsse a másikat? (A sakktábla mezői számozva vannak, ezért az egyébként egymásba forgatható esetek különbözőnek számítanak.)

4. Leírtuk 1-től 1000-ig az egész számokat. Melyik számjegyet használtuk legtöbbször és melyiket legkevesebbszer?

5. Egy tehén ugrál a számegyenesen. Egy ugrásával egy beosztást halad valamerre. A 0 pontból indulva 12 ugrással a +8 pontba jutott.
   Hányféleképpen tehette ezt meg?

9.-10. osztályos feladatok /KF

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{x-1981}{30}+\frac{x-1983}{28}+\frac{x-1985}{26}+\frac{x-1987}{24}=\frac{x-30}{1981}+\frac{x-28}{1983}+\frac{x-26}{1985}+\frac{x-24}{1987}$$

2. Van egy doboz benne 103 strucctojással. Wallace és Gromit felváltva vesznek ki minimum 1, de maximum 10 tojást. Amikor minden tojás elfogy a dobozbók, megszámolják, hogy külön-külön mennyijük van. Ha ez a két szám relatív prím, akkor Gromit a játék nyertese.
Létezik-e nyerő stratégia a játékot kezdő Gromit számára?

3. Rendelkezésünkre áll a 0-9 számjegyek mindegyikéből egy darab, illetve tetszőleges mennyiségű + jel. Ezeknek az egymás mellé írásával alkossunk egy kifejezést, amelynek értéke éppen 100. (A feladat során csak összeadni lehet, hatványozás, illetve egyéb trükkök bevetése tilos. Szintén nem megengedett a 6/9 számjegyek megfordítása.)

4. Határozzuk meg a 2010-nél kisebb pozitív egész számok számjegyei szorzatának összegét.

5. Egy $\mathfrak{W}$ tagú társaság elment túrázni. A csapatnak pontosan fele gyalog indult útnak. A gyalogúton $\mathfrak{W}$ km távolságra levő célt 1 óra alatt érték el. A társaság másik fele kerékpárra szállt és egy másik úton ment. Az átlagsebességük (a defektek miatti állást nem számítva) $\mathfrak{W}$ híján $\mathfrak{W}$-szerese volt a gyalogosokénak. Az egyik biciklisnek belsőt kellett cserélni, emiatt $\mathfrak{W}$ percet álltak, majd később egy másik kerékpárosnak a lánca szakadt el, ezért ismét megálltak még $\mathfrak{W}$-szer annyi időre. Továbbindulásuk után még $\mathfrak{W}$ percig egy addig defekt nélküli kerékpáros vezette a sort, ám végül megunta ezt, és átadta helyét valaki másnak. A kerékpáros csapat végül $\mathfrak{W}$ perccel korábban érkeztek meg, mint a gyalogosan túrázók.
Milyen hosszú volt a kerékpárosok, illetve a gyalogosok ösvénye?

11.-12. osztályos feladatok /NTB

1. Mi a $\cos 4x - \operatorname{tg} 5x = \operatorname{ctg} 5x - \sin 6x$ egyenlet megoldása a $[-\pi; \pi]$ intervallumon?

2. Hányféleképpen választható ki az {1; 2; …; *n*} halmaz két részhalmaza úgy, hogy egyik a másiknak részhalmaza legyen?

3. Határozzuk meg a $(2+\sqrt{3})^{100}$ kifejezés tizedesvessző utáni 43. számjegyét számológép (illetve más elektronikus készülék) használata nélkül.

4. Mi a $\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2009^2}+\frac{1}{2010^2}}$ kifejezés értéke?

5. Egy pozitív négyjegyű számot $\langle$*tetszőleges jópofa kifejezés*$\rangle$nek nevezünk, ha számjegyei két csoportba oszthatók úgy, hogy a számjegyek összege a két csoportban egyenlő, és ez igaz a nála eggyel nagyobb szám számjegyeire is.
   Hány négyjegyű $\langle$*tetszőleges jópofa kifejezés*$\rangle$ szám van?

Nehezebb feladatok /UC

1. Legyen adott egy π permutáció az {1; 2; …; n} halmazon. Az i számot π fixpontjának nevezzük, ha $\pi(i) = i$. Egy permutáció fixpontmentes, ha nincs fixpontja.
   A fixpontmentes permutációk közül miből van több: páros vagy páratlan inverziószámúból? Mennyivel?

2. Megadható-e $\mathbb{R}^n$-ben végtelen sok vektor úgy, hogy közülük bármely n lineárisan független?