Sztranyák Attila: Tantrix

DEF.: A (színtelen) tantrix egy olyan szabályos hatszög, ahol a hat oldalfelező pontból 3-3 párt képezünk, és a párokat összekötjük. Egy oldalfelező ponthoz háromféle összekötés lehet.

a.) szomszédos oldalfelező ponttal kötjük össze. (A, vagy ti – típusú)
b.) másodszomszédos oldalfelező ponttal kötjük össze. (B – típusú)
c.) szemközti oldalfelező ponttal kötjük össze. (C, vagy tá – típusú)

Az egyes eseteket az alsó ábra mutatja. Azért, hogy szebb ábráink legyenek az A/B típusú összekötést egy-egy körívvel ($120°, 60°$-os középponti szöggel), míg a C-típusút egy szakasszal „oldjuk meg”.

1.) Feladat: Hány különböző színtelen tantrix van? Mikor tekintsünk két színtelen tantrixot egyáltalán különbözőnek?

Megoldás: Amint az alsó ábra is mutatja az egyes eseteket számba véve 5 különböző színtelen tantrix van. (Ha két hexet akkor tekintünk azonosnak, ha egymásba forgathatók!)

Az első hex ABB (,vagy ti)-típusú a második BBC (,vagy tá)-típusú a harmadik ACA (, vagy ti-tá-ti)-típusú a negyedik CCC (, vagy tá-tá-tá)-típusú az ötödik AAA (, vagy ti-ti-ti)-típusú. (És több típus pl BBB, vagy ABA . . . nincs, mert kipróbáljuk, és nincs!)

Megjegyzés: A kereskedelmi forgalomban lévő tantrix-játékban a negyedik CCC-típus hiányzik. Hogy miért; nem tudom, szerintem oda kívánkozna, és nem is „csúnya”! A játék kétszemélyes játékként is játszható, és a magyar játékosok a világ élvonalába tartoznak az utóbbi években lezajlott világbajnokságok alapján, de szerintem a játék egyszemélyes „pasziánsz” üzemmódban is nagyon érdekes!

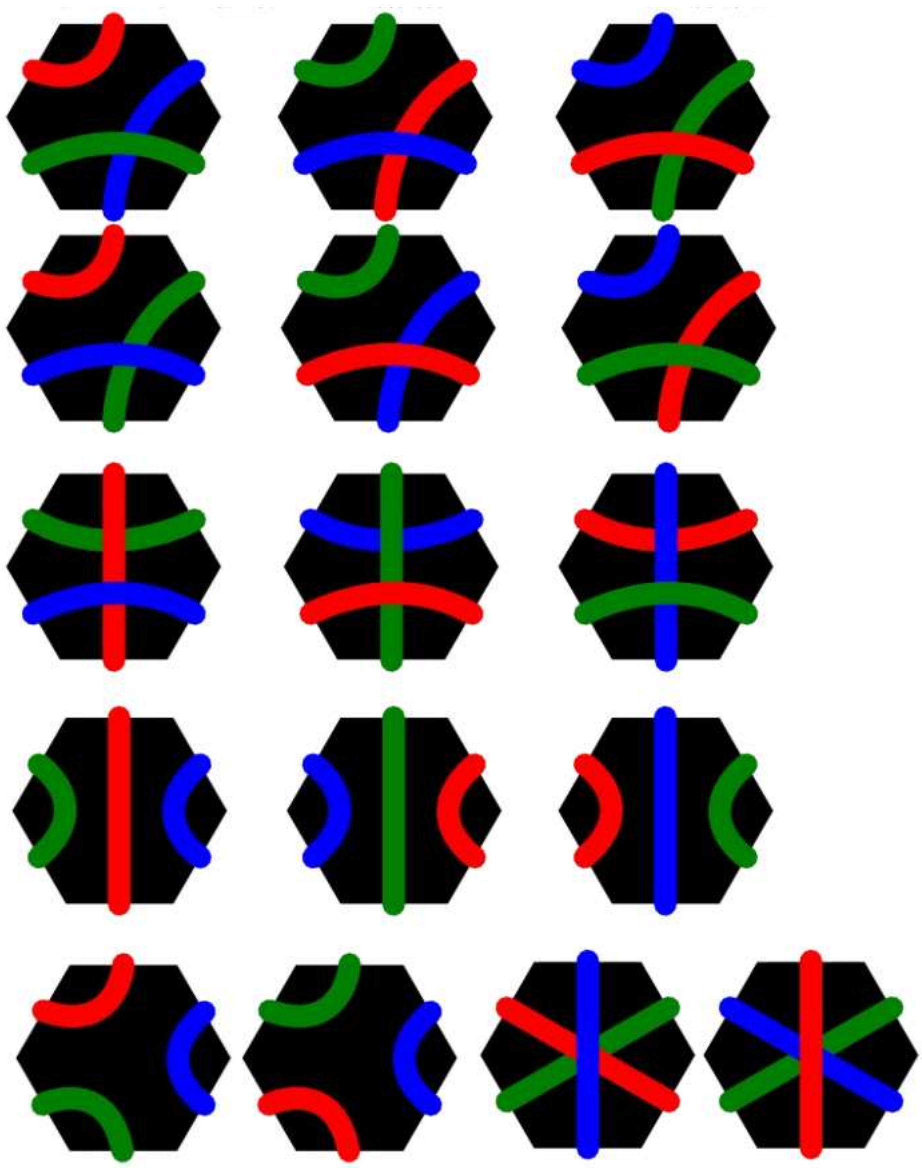
DEF.: A (színes) tantrix (a továbbiakban ezt hívjuk tantrixnak) olyan hatszög, ahol az oldalfelező pontokat összekötő íveket/szakaszokat színnel is ellátjuk a következő szabályok szerint: a.) A színek a piros/zöld/kék/sárga színek közül kerülnek ki. b.) Egy adott összekötést egyetlen színnel színezzük. c.) Egy hatszögben nem lehet két azonos színű összekötés.

Ha egy hatszögben (a továbbiakban hexben) a piros, kék és zöld színeket használjuk fel (és a sárga hiányzik), azt a továbbiakban PKZ-hexnek fogom rövidíteni!

2.) Feladat: Hány különböző PKZ-típusú hex van? Hány különböző színes hex van?

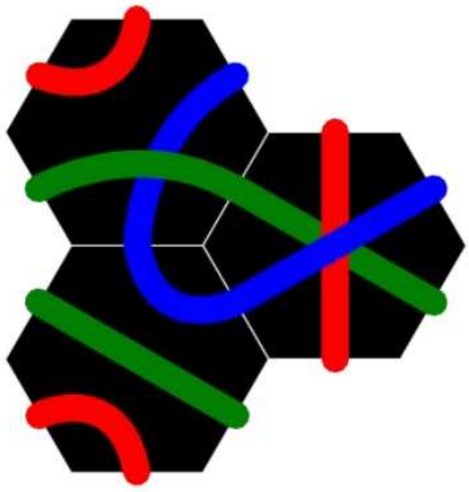
2'.) Házi feladat: Hány különböző PKZ-hex van, ha minden hexben két színt használunk csak fel (és így valamelyik színből két összekötés, míg egy másikból egy összekötés van)?!

Megoldás: Ez már egy kicsit nehezebb hiszen a fenti színtelen hexekhez különböző számú színes PKZ-hex tartozik:
Az ABB-hez 6
a BBC-hez 3
az ACA-hoz 3
a CCC-hez 2
az AAA-hoz 2 darab! Így összesen 16 db PKZ-hex van. (Lásd ábra!)



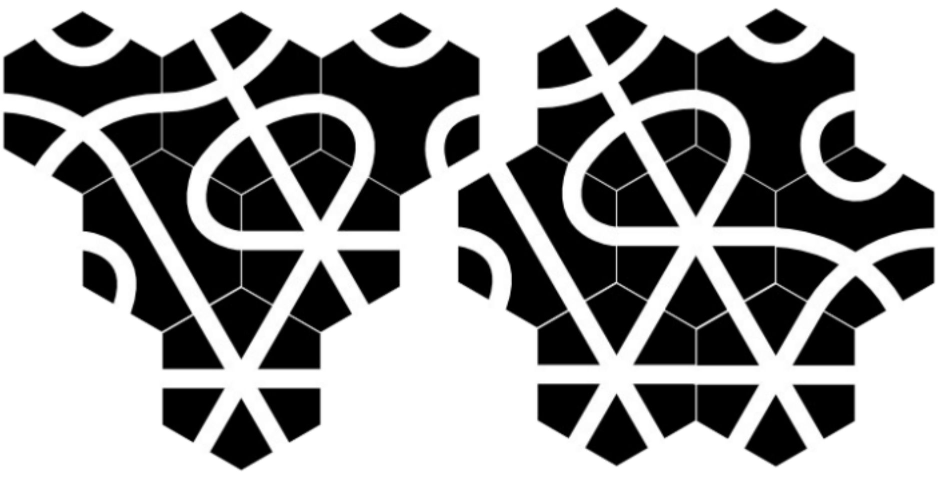
A második kérdésre pedig nyilván $4 \cdot 16 = 64$ a válasz, mert a négy szín (PKZS) közül pontosan egy marad ki mindig.

3.feladat. A gyerekek kapnak 10-10 színes hexet, építkezzenek belőle! Két hex úgy építhető össze, hogy egy-egy azonos színű oldalfelező pontjukat egymás mellé illesztjük oly módon, hogy a két hexnek legyen egy közös oldala. (Lásd ábra!)



Milyen alakzatokat sikerült felépíteni?! Vannak-e a felépített alakzatok között „szebbek”?

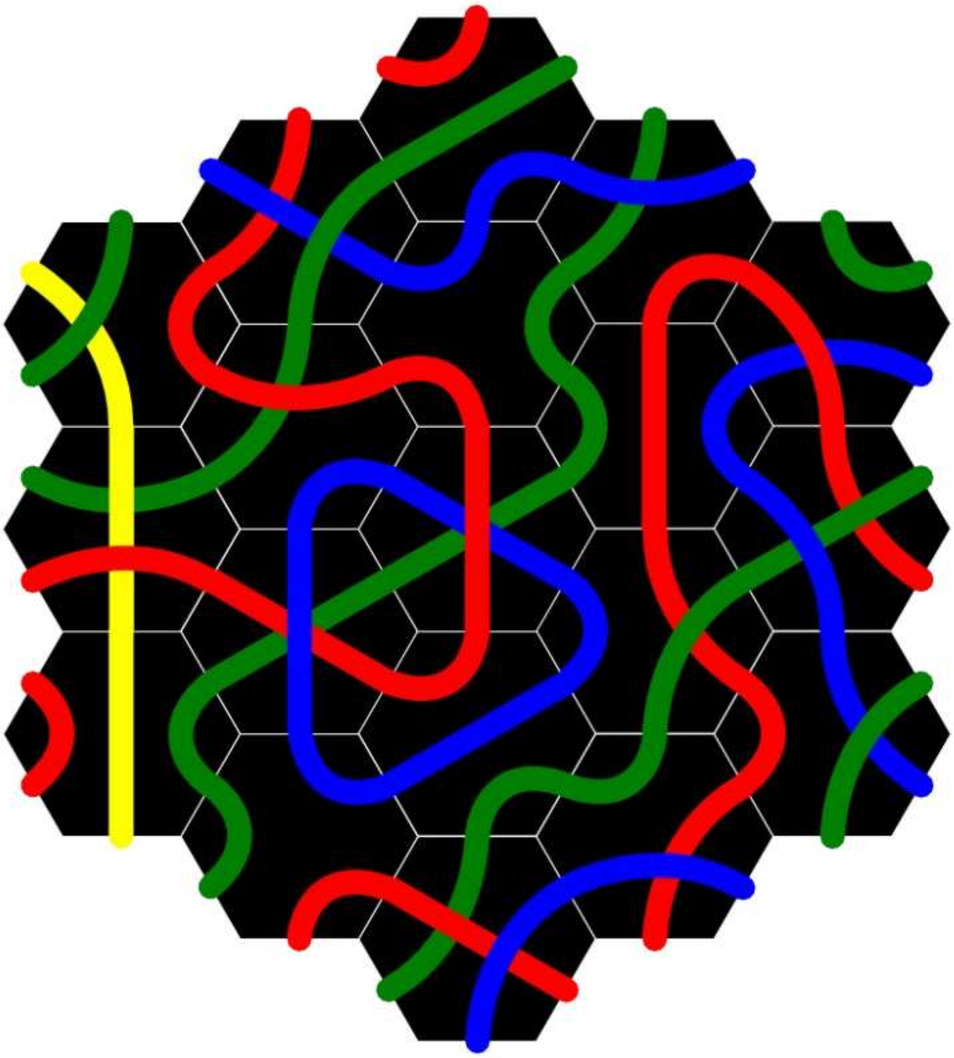
Az a helyzet, hogy ízlések és pofonok különböznek, de talán a következő ábrák szebbek, mint a szabálytalan ábrák. (Ha csak azt nézzük, hogy a hatszögekből kialakuló végeredménynek milyen az „alakja”, a belső kapcsolódásokat nem! - egyébként, ha kiszíneznénk szabálytalanok lennének az ábrák!)



A bal felső ábrához hasonló ábrákat háromszögnek, a jobb felsőhöz hasonlókat hatszögnek (a kis színes hexeket nem fogom a továbbiakban hatszögnek hívni, hanem mindig hexnek!), míg az alsó ábrához hasonlókat rombusznak fogom hívni.

4.feladat: A gyerekeknél a padtársukkal együtt most 20-20 hex van. Rakjanak ki a párok közösen egy maximális („3 oldalhosszú") hatszöget! (Megj. A pároknál – a színek permutációja mellett – ugyanaz a 20-20 hex van!)

A feladatra több (sok) megoldás is van. Ezek közül egyet a következő ábra mutat!



Megj.:
a.) Ha nem a sárgából kapott 3 hexet a pár, akkor a PKZS jelsorozat megfelelő „ciklikus" eltolásával (KZSP, ZSPK, SPKZ) adódik, hogy az itteni piros/kék... színeket mire cseréljük. (Pl ha kékből van 3 hex, akkor ami itt P, ott Z (és fordítva), míg ami itt K, ott S (és fordítva)!)
b.) Mivel ez az ábra csak 19 hexből áll, míg a pároknál 20 hex van, ezért egy hex kimarad. Ez jóval könnyebbé teszi a megfelelő ábra kirakását!

Vizsgáljuk meg most a háromszögeket, a rombuszokat, és a hatszögeket egy kicsit! A továbbiakban azt mondjuk, hogy egy hex egy oldalának a hossza 1 (hosszegység), míg egy hex területe szintén 1 (területegység) az egyszerűség kedvéért!

5.) Feladat: Van-e olyan háromszög, melynek
a.) kerülete 2010?
b.) területe 2010?

6.) Feladat: Van-e olyan rombusz, melynek

a.) kerülete 2010?
b.) területe 2010?

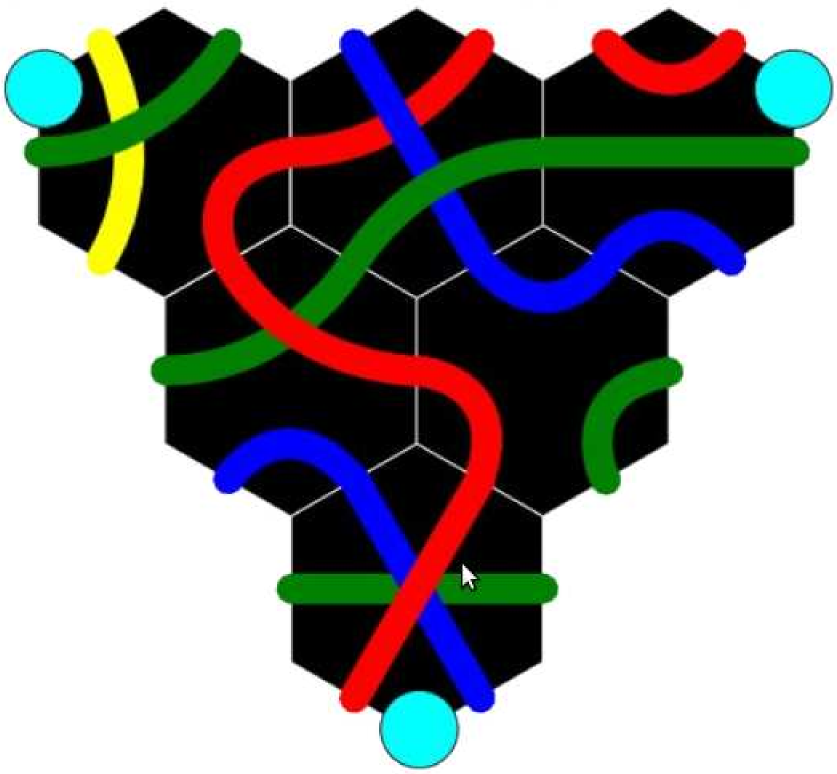
7.) Feladat: Van-e olyan hatszög, melynek
a.) kerülete 2010?
b.) területe 2010?

8.) Feladat: Add meg, hogy mekkora lesz az n-oldalú
a.) háromszög
b.) rombusz
c.) hatszög kerülete és területe n függvényében!

Megoldás:
Először a 8-as feladatot oldjuk meg, innen a többi már könnyű! (Megj. $n = 1$ mind a három esetben az egyetlen hexből álló „három/négy/hatszöget” fogja jelenteni!)

a.) Háromszögre?!
Jól látható, hogy ha n az oldalhossz akkor a hexek száma (és így a terület is) $T_n = H_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, az n-edik háromszögszám.

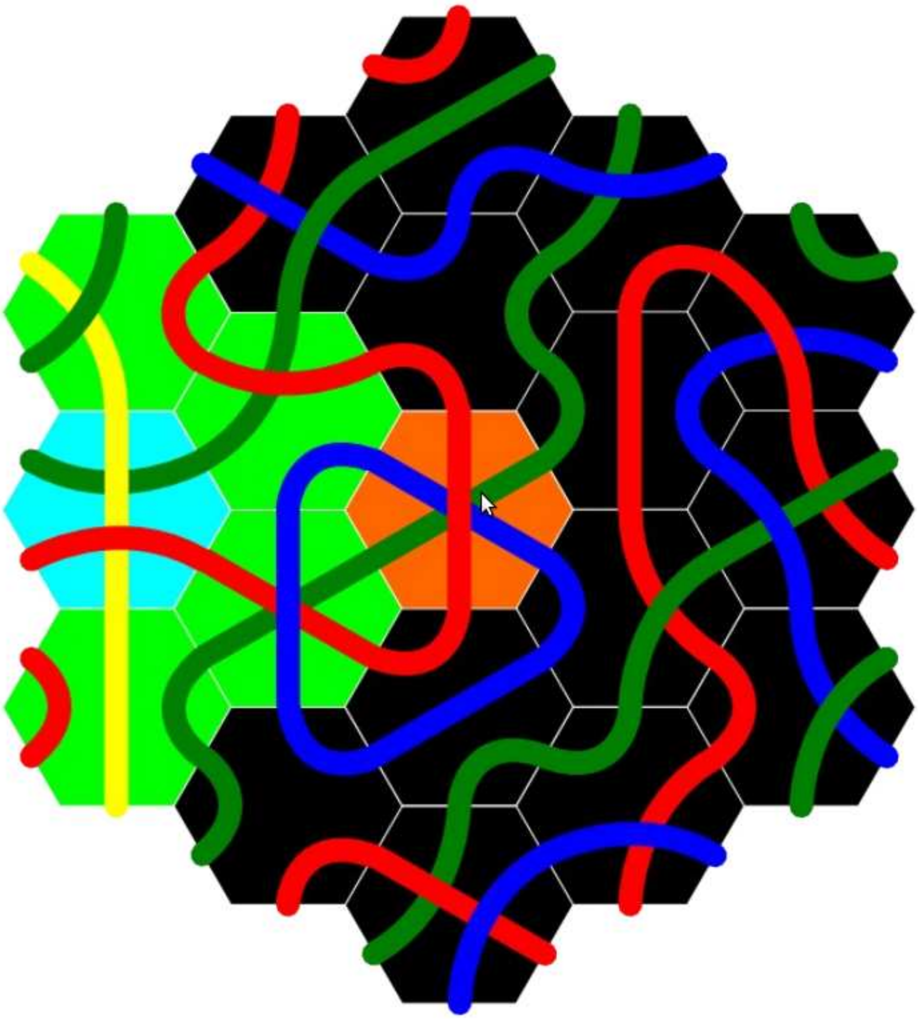
Az is természetes, hogy a három „csúcshex” azon pontjait megjelölve (lásd lenti ábra!), amelyen az ábra szimmetriatengelye megy át, a pontok közötti szakaszok száma a háromszög oldalhosszának duplája, így a kerület összesen $K_n = 6n$.



b.) Rombuszra?!
A terület természetesen $T_n = n^2$.
A kerület $n = 1$ esetre , $n = 2$-re , míg minden további esetben olyan, mintha az előző ábrába „betoldanánk” minden oldalhoz egy-egy új hexet úgy, hogy az adott oldalon 2-vel nő a szakaszok száma, így összesen $4 \cdot 2 = 8$-cal nő minden újabb rombusznál a kerület, és így: $K_n = 8n - 2$.

c.) Hatszögre?!
Itt a kerülettel kezdjük. A kerület n=1 esetre $K_1 = 6$, n=2-re $K_2 = 14$, és hasonlóan, mint imént a „betoldás” miatt az új ábra minden oldalánál kettővel nő a szakaszok száma, így a kerület $6 \cdot 2 = 12$-vel minden újabb hatszögnél, vagyis $K_n = 12n - 6$.

A terület egy kicsit nehezebb. Tekintsük a következő ábrát!



Itt a nem fekete alapszínű hexek egy olyan oldalhosszú háromszöget képeznek, amekkora a hatszög oldalhossza (, vagyis n, itt éppen $n = 3$)! Ezt a háromszöget 60°-kal elforgatva a középső hex középpontja körül, újabb háromszöget kapunk. Ezt folytatva az eredeti ábrát 6 darab háromszögre bontottam.

Most fogom és összeadom a 6 darab háromszög területét.

Igen ám, de bizonyos hexeket persze többször számoltam. A „középhexet" a „csúcshexekkel" összekötő összesen $6(n-1)$ darab (világoszöld) hexet kétszer, míg a (narancs) „középhexet" hatszor.

Így ezeket az eseteket „kiszitálva":
$T_n = 6H_n - 6(n-1) - 5 = 3n(n+1) - 6n + 6 - 5 = 3n^2 - 3n + 1.$

Megjegyzés: Néhány diákmegoldás vázlata következik a problémára.
1.vázlat: Ha a hatszög „minden második oldalához hozzácsapok" egy-egy megfelelő méretű háromszöget, egy „nagy háromszöget" kapok. Innen már csak számolni kell.
2.vázlat: A hatszög felbontható három rombuszra, amelyek között „kicsi átfedés" van. Innentől a megoldás: mint a részletes megoldás!
3. vázlat: (2-es továbbgondolva) „6-szög=kis rombusz + $n(2n-1)$ mezős sáv". Vagyis $T_n = (n-1)^2 + n(2n-1) = \cdots = 3n^2 - 3n + 1$.

Innen az 5-7 feladat megoldása már nem nehéz; egy-egy egyenletmegoldás csak!

5.) a.) $K_n = 6n = 2010 \Rightarrow n = 335$. (A 335 oldalhosszú háromszög jó!)
b.) $H_{62} = \frac{62 \cdot 63}{2} = 1953$, $H_{63} = 2016$, így háromszög 2010-es területtel nincs!

6.) a.) $K_n = 8n - 2 = 2010 \Rightarrow n = \frac{2012}{8} = 251{,}5$, ilyen rombusz nincs!
b.) A 2010 nem négyzetszám, így rombusz 2010-es területtel sincs!

7.) a.) $K_n = 12n - 6 = 2010 \Rightarrow n = 168$. (A 168 oldalhosszú hatszög jó!)
b.) $T_{27} = 3 \cdot 27^2 - 3 \cdot 27 + 1 = 2107$, $T_{26} = 1951$, így hatszög 2010-es területtel nincs!

Érdemes felírni egy táblázatba a 8-as pontnál kapott értékeket az első pár n-re!

Háromszögek				**Rombuszok**				**Hatszögek**		
N	K	T		N	K	T		N	K	T
1	**6**	**1**		**1**	**6**	**1**		**1**	**6**	**1**
2	**12**	**3**		**2**	**14**	**4**		**2**	**18**	**7**
3	**18**	**6**		**3**	**22**	**9**		**3**	**30**	**19**
4	**24**	**10**		**4**	**30**	**16**		**4**	**42**	**37**
5	**30**	**15**		**5**	**38**	**25**		**5**	**54**	**61**
6	**36**	**21**		**6**	**46**	**36**		**6**	**66**	**91**
7	**42**	**28**		**7**	**54**	**49**		**7**	**78**	**127**
8	**48**	**36**		**8**	**62**	**64**		**8**	**90**	**169**
9	**54**	**45**		**9**	**70**	**81**		**9**	**102**	**217**
10	**60**	**55**		**10**	**78**	**100**		**10**	**114**	**271**
11	**66**	**66**		**11**	**86**	**121**		**11**	**126**	**331**
12	**72**	**78**		**12**	**94**	**144**		**12**	**138**	**397**
13	**78**	**91**		**13**	**102**	**169**		**13**	**150**	**469**
14	**84**	**105**		**14**	**110**	**196**		**14**	**162**	**547**
15	**90**	**120**		**15**	**118**	**225**		**15**	**174**	**631**
16	**96**	**136**		**16**	**126**	**256**		**16**	**186**	**721**
17	**102**	**153**		**17**	**134**	**289**		**17**	**198**	**817**
18	**108**	**171**		**18**	**142**	**324**		**18**	**210**	**919**
19	**114**	**190**		**19**	**150**	**361**		**19**	**222**	**1027**
20	**120**	**210**		**20**	**158**	**400**		**20**	**234**	**1141**
21	**126**	**231**		**21**	**166**	**441**		**21**	**246**	**1261**
22	**132**	**253**		**22**	**174**	**484**		**22**	**258**	**1387**
23	**138**	**276**		**23**	**182**	**529**		**23**	**270**	**1519**
24	**144**	**300**		**24**	**190**	**576**		**24**	**282**	**1657**
25	**150**	**325**		**25**	**198**	**625**		**25**	**294**	**1801**
26	**156**	**351**		**26**	**206**	**676**		**26**	**306**	**1951**
27	**162**	**378**		**27**	**214**	**729**		**27**	**318**	**2107**
28	**168**	**406**		**28**	**222**	**784**		**28**	**330**	**2269**
29	**174**	**435**		**29**	**230**	**841**		**29**	**342**	**2437**
N	$6N$	$N(N+1)/2$		N	$8N-2$	N^2		N	$12N-6$	$3N(N-1)+1$

Kérdés: Melyik típusú szabályos alakzatot a legnehezebb kirakni szabályosan (most már figyelve az illeszkedésekre)?!

Ez egy nehéz kérdés! Ha az ember egy pár órát (napot?) már eltöltött a hexek rakosgatásával, akkor határozottan az az érzése, hogy a szabályos hatszöget nehéz kirakni, a többit viszont nem olyan nehéz. Ennek az az oka, hogy akkor nehéz egy új helyre hexet illeszteni, ha sok szomszédja van, ekkor ugyanis több illeszkedésre kell figyelni! Vagyis ha két alakzatnak azonos a területe, akkor azt nehezebb kirakni, amelynél több a belső illeszkedés. Viszont ha vesszük az alakzatban lévő összes szakaszt (ezek száma: $6T$), akkor ezek két részre osztatók: a belső illeszkedéseknél figyelembe vett szakaszokra, és a kerületnél megjelenő szakaszokra! Vagyis a belső illeszkedések száma : $B = \frac{6T-K}{2}$.

(A „/2” a szokásos „minden illeszkedést duplán számoltunk” miatt van!) De akkor az azonos területű alakzatok közül ott a legtöbb a belső illeszkedés, és így azok a legbonyolultabbak, ahol a legkisebb a kerület!

9.) Feladat: Vizsgáljuk meg, hogy vajon a szabályos típusú alakzatok közül melyiket a legnehezebb kirakni a fentiek szerint!

Megoldás: Jól látszik, hogy azonos kerülethez (ez jóval gyakrabban előfordul, mint azonos terület) a legnagyobb terület hatszögnél, majd rombusznál, majd háromszögnél van, így ez a „bonyolultsági sorrend” is, vagyis a legnehezebb a hatszöget kirakni. Sőt az is igaz, hogy valamennyi alakzat közül (a szabálytalanokat is beleértve) a legnehezebb a „szabályos hatszöget” kirakni!

10.) Feladat:
a.) Keressünk olyan n-et, hogy az n-dik hatszög területe megegyezik valamelyik háromszög területével!
b.) Keressünk olyan n-et, hogy az n-dik hatszög területe megegyezik valamelyik rombusz területével!

Megoldás: a.) $n = 1, 6, 55, 60, 540$ az első öt megoldás (és 1000-ig nincs is több)!
Vagyis pl $T_6 = 3 \cdot 6^2 - 3 \cdot 6 + 1 = 91 = H_{13}$. 1000-n túl is viszonylag gyakran fordul elő egyezés, de én szabályosságot nem nagyon vettem észre.

b.) Ez sokkal érdekesebb, ritkább és nehezebb egyben! (**CSOKIS FELADAT!**)
Az első pár megoldás: $n = 1, 8, 105, 1456$.

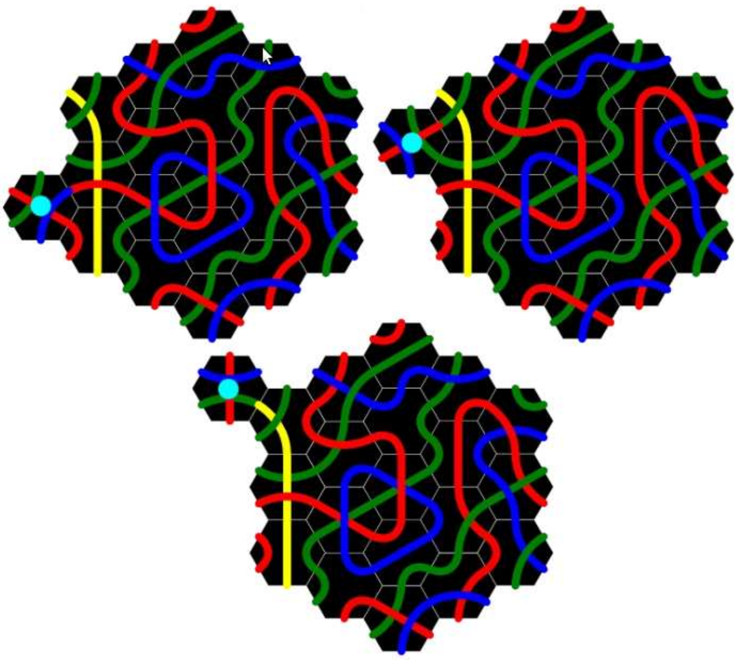
$T_8 = 3 \cdot 8^2 - 3 \cdot 8 + 1 = 169 = 13^2$
$T_{105} = 3 \cdot 105^2 - 3 \cdot 105 + 1 = 181^2$
$T_{1456} = 3 \cdot 1456^2 - 3 \cdot 1456 + 1 = 2521^2$
Házi feladat (csokiért!): Találd meg a következő két megoldás melyik számok négyzete! Milyen szabályszerűség alapján kapjuk a következő megoldást?

Megjegyzés: Az, hogy hány hatszög területe egyezik meg valamelyik háromszög területével, illetve valamelyik rombusz területével érdekes kérdés. Ha jól látom most mind a két kérdésre végtelen sok megoldás van. Nyílt kérdés, hogy az 1 darab hexes eseten kívül van-e olyan T, hogy T darab hexből kirakható háromszög/rombusz/hatszög is! Még arról sincs sejtésem, hogy vajon véges sok ilyen T van-e?!

11.Feladat: a.) Egy 2011 oldalhosszú hatszög kerületén lévő egyik szakaszhoz

hozzáillesztünk egy fenti (módon „tájolt”) PKZ-BBC hexet, majd végiggörgetjük a 2011 oldalú hatszög kerületén. Miután a hex visszaér a kiindulási pozíciójába melyik két oldalfelező pont összekötése lesz kék színű?

b.) Mi lenne a helyzet, ha hatszög helyett háromszögünk, vagy rombuszunk lenne? (A „végiggörgetés” első három lépése a lenti ábrán látható; a végiggörgetett BBC-hexet kis kék pöttyel jelöltem meg! Persze a hatszög, csak 3-oldalhosszú!)



12. Feladat: Egy tetszőleges, hexekből összeépített (szabálytalan) alakzat kerületén lévő egyik szakaszhoz hozzáillesztünk egy fenti (az előző feladatnál is szerepelt) PKZ-BBC hexet, majd végiggörgetjük az alakzat kerületén. Miután a hex visszaér a kiindulási pozíciójába lehetséges-e, hogy „így néz ki", vagyis a kék összekötés az „északi",

és a „délnyugati" felezőpontokat köti össze?!

Megoldások: 11.) a.) A kerületen lévő szakaszokat „megsorszámozva" minden hatodik kerületen lévő szakasz a forgatás során ugyanazzal a BBC-hexen lévő oldalfelező ponttal találkozik. Mivel minden hatszög kerülete (a hatszögekre vonatkozó kerületképlet miatt) 6-tal osztható, emiatt visszaérve a hexünk a start pozícióba az eredeti „tájolást" veszi fel!

b.) Mivel a háromszög kerülete is osztható hattal, emiatt háromszögnél is ugyanaz a válasz, mint az imént hatszögnél.

Rombusznál a kerület: $K_{2011} = 8 \cdot 2011 - 2 = 16086$. Szerencsére ez megint csak hattal osztható, emiatt itt is az „eredeti tájolás" a válasz!

Megjegyzés: Azért rombusznál más is kijöhetett volna! Mi lett volna a helyzet, ha az oldalhossz 2010?

12.) Az iménti megbeszéltek miatt tetszőleges alakzatnál $B = \frac{6T-K}{2}$ (, ahol B: a belső illeszkedések szám, T: a terület/vagy az alakzat hexeinek a száma, K pedig a kerület)!

Innen $K = 6T - 2B$, ami nyilván páros. Viszont ahhoz, hogy a 12-esnél megkívánt tájolás jöjjön létre páratlan kerületre lenne szükség ($K = 6m + 3$ alakú kellene!), így egyetlen alakzatnál sem lehetséges a kívánt végeredmény!

(Megjegyzés: A diákok jó eséllyel azt fogják észrevenni, hogy egy görgetés egy a hex középpontja körüli 120°-os forgatásnak felel meg, ha csak a görgetett hex tájolását tekintjük. Természetesen ezzel ugyanúgy kijön a 12-es megoldás!)