Sztranyák Attila: Nemtranzitív relációk

Először talán egy kicsit etimologizáljunk! Mit jelent az, hogy reláció? Tranzitív? Nemtranzitív? A szokásos matematikai definíciót mellőzve: a reláció két azonos típusú „dolog” közötti „viszony”. Például mondhatjuk, hogy Pistitől **magasabb** Zsolti, vagy Annától **szebb** Zsuzsi, de azt is mondhatjuk, hogy a Benficától **jobb** csapat a Fradi. Ezek a viszonyok között van objektív (mérhető), a „magasabb”, de van szubjektív is: „szebb”, „jobb”. Mi olyan relációkkal fogunk foglalkozni, amik „mérhetőek”. Azt, hogy Pistitől magasabb Zsolti, vagy Annától szebb Zsuzsi így fogom jelölni: Pisti<Zsolti (, vagy P<Zs, esetleg Zs>P), illetve A<Zs!

Akkor mondunk egy „<”relációt tranzitívnak, hogyha valahányszor A<B, és B<C, akkor A<C is teljesül. Ilyen reláció a „magasabb”, mert ha Pistitől magasabb Zsolti, és Zsoltitól magasabb Béla, akkor nyilván Pistitől magasabb Béla is igaz!

És persze egy reláció nemtranzitív, ha nem tranzitív; vagyis van A,B,C („dolog”), hogy A<B, és B<C, de mégsem igaz, hogy A<C. Erre fogunk néhány példát nézni!

1.) Feladat: 9 sakkozót, akik között egyértelmű erősorrend van 3 darab 3-fős csapatra (A,B,C csapat) osztottam. Ezután a csapatok körmérkőzést játszanak egymással. Azt mondjuk, hogy A<B, ha B elveri az A csapatot.

Igaz-e, hogy A>B, és B>C esetén A>C?

Megjegyzés: A feladatnál A és B csapat meccse kétféleképp „szervezhető”, vagy

a.) A csapat minden játékosa játszik B csapat minden játékosával (9 egyéni mérkőzés a két csapat találkozója során), vagy

b.) A csapat legjobb játékosa csak a B csapat legjobb játékosával játszik, majd A csapat második legjobb játékosa csak a B csapat második táblásával játszik, és így tovább...(A sakkcsapatversenyeken így csinálják!) (3 egyéni mérkőzés a két csapat találkozója során).

Mi a b pont szerint dolgozunk, és a végén kitérünk arra, hogy mi a helyzet az a esetben!

Mo.: Legyen A(9,5,1), B(8,4,3), és C(7,6,2). A számok azt jelzik, hogy az A csapatban van a legerősebb (9-es) sakkozó, ő megver mindenkit (8-1-ig). B-ben a 8-as számú az A első tábláján kívül mindenkit elver, és így tovább.

Leellenőrizhető, hogy A>B, B>C, és C>A, minden meccsen 2:1-es „eredménnyel”. Vagyis a válasz:nem. (Megfelelő csapatosztással a reláció nemtranzitív.)

Persze most könnyű dolgunk volt, mert kis létszámú csoportra kellett megnézni, mi a helyzet, de fogalmazzuk át a feladatot egy kicsit!

2.) Feladat: n^2 sakkozót, akik között egyértelmű erősorrend van n darab n-fős csapatra ($A_1, A_2, \ldots, A_n$ csapat) osztottam. Ezután a csapatok körmérkőzést játszanak egymással. Lehetséges-e, hogy $A_1 < A_2$, $A_2 < A_3$, …, $A_{n-1} < A_n$ esetén $A_n < A_1$? Vagyis ez a reláció is lehet nemtranzitív?

Megoldás: A játékosokat 1-től n^2-ig fogom jelölni a pozitív egészekkel, és két játékos közül az a jobb, akinek nagyobb a sorszáma. Tekintsük a következő táblázatot!

1	2	3	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$2n+2$	$2n+3$	$2n+4$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$3n+3$	$3n+4$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$n(n-1)+1$	$n(n-1)+2$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	n^2-1	n^2

Az egyszínű mezők átlósan helyezkednek el, és ha valamelyik sorban az adott színnel a sor végére értem, a következő sor elejéről fogom folytatni az átló „meghúzását”. A piros csapat lesz az A_1, a kék csapat az A_2, és így tovább, általában A_j csapat tagja lesz a j sakkozó.

A táblázatból az is kiolvasható, hogy $A_1 < A_2$, $A_2 < A_3$, $\ldots$, $A_{n-1} < A_n$. Sőt a győzelem nagysága minden esetben $(n-1) : 1$, ami eléggé lehengerlő győzelmeket jelent! És mégis hasonló arányban veri A_1 az A_n csapatot! Vagyis ez a reláció is (nagyon) nemtranzitív!

Most vizsgáljuk meg, hogy mi lett volna, ha a csapatokon belül mindenki játszik a másik csapat minden másik tagjával!

A fenti színes táblázat minden alacsonyabb sorában szereplő sakkozó megveri az összes magasabb sorbelit, így ha ugyanígy osztjuk a csapatokat, akkor mondjuk $A_1 < A_2$ megint, de most A_1 és A_2 csapatnak is van (az imént megszámolt $1 : (n-1)$ győzelem mellett) még $\frac{n(n-1)}{2}$ győzelme! Vagyis a „gólkülönbség” mértéke sem változott, csak az aránya, ha az a.) pont szerint sakkoztattuk a versenyzőket!

A harmadik feladat előtt néhány definíciót/szóhasználatot fogunk tisztázni! Szabályos (dobó)kocka: 6 oldalú, 1,2,3,4,5,6 (összesen 21 darab) pöttyökkel egy-egy oldalon. Bármely oldalra esés valószínűsége egyforma.

Átfestett (dobó)kocka: 6 oldalú, összesen 21 darab pöttyel, minden oldalon legalább 1, legfeljebb 6 pöttyel. Bármely oldalra esés valószínűsége egyforma. (Ilyen például a K=(2,2,3,3,5,6) kocka!)

3.) Feladat. Két játékos (Kezdő és Második) játszik. Kezdő kiválaszt az összes lehetséges átfestett kockák közül hármat, A,B,C-t. Ezek közül Második választ egyet, ez lesz Második kockája. A maradék kettő közül Kezdő is választ egyet. Ezután a két játékos „sokat” kockázik egymással 1 forintos alapon. (Egy-egy játéknál mindenki dob egyet a kockájával, a győztes -aki nagyobbat dobott- elnyeri a másik 1 forintját). Kinek előnyös a játék?!

Megoldás: Először talán úgy tűnik, hogy Másodiknak lesz jobb a játék, mert ő választ. De az első döntési helyzetben kezdő van, ő megteheti, hogy 3 szabályos kockát választ ki, mint festett kockákat, és „hosszú” távon döntetlenezik, vagyis Kezdőnek nem lehet rossz a játék. Azt fogjuk belátni, hogy ettől jóval többet is elérhet Kezdő!