Peregi Tamás: Függvényegyenletek

Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely minden x-re és y-ra kielégíti az alábbi függvényegyenletet:

Úgy gondoltam, először megbeszélnénk az első két-három feladatot, utána a többivel önállóan próbálkoznának, aztán egy idő múlva megbeszélnénk őket:

*1. $f(x) \cdot (f(x) - 3x) = -2x^2$

Megoldás: Átrendezés után egyszerű másodfokú egyenlet, $f(x) = x$ vagy $f(x) = 2x$.

Bemelegítés, hogy látsszon, milyen a legegyszerűbb függvényegyenlet.

*2. $2f(x) + 3f(1 - x) = 4x - 1$

Megoldás: $x := 1 - x$, 2*2-es egyenletrendszer, $f(x) = -4x + \frac{11}{5}$

Példa a két paraméter felcserélésére, mint alapvető módszerre.

3. $f(1 - x) + 2f(1 + x) = x + 3$

Megoldás: $x := -x$, innen $f(x) = x$

4. $f(x^2 + x + 1) + 2f(x^2 - x + 1) = 3x^2 - x + 6$

Megoldás: $x := -x$, innen $f(x^2 + x + 1) = x^2 + x + 2$, tehát $f(x) = x + 1$, ha $x \geq \frac{3}{4}$, amúgy akármi.

Érdekessége a feladatnak, hogy csak bizonyos paraméterekhez tartozó értékekről ad információt.

*5. $f(x - 1) - f(1 - x) = x$

Megoldás: $x := 2 - x$, ellentmondás

Nem minden feladatnak van megoldása.

6. $x \cdot f(\frac{1}{x}) + 2f(x) = x - 1$, ha $x \neq 0$

Megoldás: $x := \frac{1}{x}$, innen $f(x) = x - 1$, ha $x \neq 0$, $f(0) =$ akármi.

7. $f(x) + (x + \frac{1}{2})f(1 - x) = 1$

Megoldás: $x := 1 - x$, innen számolással $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} - x}$, ha $x \neq \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ (behelyettesítéssel).

Csúnya törtekkel kell számolni, úgyhogy majd megpróbálom átírni a konstansokat, hogy szebb legyen. Érdekessége a feladatnak, hogy az előzővel ellentétben itt ismert a szakadás helyén az érték.

Itt most áttérünk az olyan feladatokra, ahol x és y is szerepel az egyenletben. Úgy gondolom, az első kettőt megbeszélnénk, utána szabadon gondolkozhatnak.

*8. $f(x) \cdot f(y) = f(x + xy)$

Megoldás: $x := 0$, ekkor látszik, hogy $f(x) \equiv 1$ megoldás, bármely más megoldás esetén pedig $f(0) = 0$. $y = 0$-t beírva az eredetibe $f(x) \equiv 0$.

Ez a feladat megmutatja, hogy jól jöhet, ha beírunk konstansokat úgy, hogy pár dolog kiessen.

*9. $f(x + y) - f(x - y) = 4xy$

Megoldás: $y := x$, innen kijön, hogy $f(x) = x^2 + f(0)$, $f(0)$ tetszőleges.

A másik tipikus megoldás: $y = x$ behelyettesítése. Ezen kívül arra is példa, hogy néha nem teljesen egyértelmű az eredmény.

10. $x \cdot f(y) + y \cdot f(x) = (x + y) \cdot f(x) \cdot f(y)$

Megoldás: $y := x$, innen a következő megoldások adódnak: a) $f(x) \equiv 0$ b) $f(x) \equiv 1$ c) $f(x) = 1$, ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$

*11. $f(x)f(y) = f(x + y - xy)$ és $f(1) \neq 0$

Megoldás: $y := 1$, innen $f(x) \equiv 1$

12. $(x + y) \cdot f(xy) = f(x) + f(y)$

Megoldás: $y := 0$, innen $f(x) = (x - 1) \cdot f(0)$. Behelyettesítve $x = 0$-t kiderül, hogy $f(0) = 0$, így $f(x) \equiv 0$

*13. $3f(x) - 2f(x - y) - f(x + y) = 0$

Megoldás: $y := x$, és $y := -x$ 2*2-es egyenlet, innen $f(x) \equiv f(0)$, $f(0)$ tetszőleges.

Fontos mozzanat, hogy $y := -x$ is hasznos helyettesítés.

*14. $f(x) \cdot f(y) + f(x) + f(y) + 1 = xy$

Megoldás: $y := x$, innen kapunk egy másodfokú egyenletet, aminek a megoldása $f(x) = \pm x - 1$

15. $f(xy) = f(x) + f(y)$

Megoldás: $y := 0$, innen $f(x) \equiv 0$

Első ránézésre logaritmusfüggvénynek látszik, de nem az, mert minden valós számra értelmezve van, nem csak a pozitívokra.

16. $f(x + y) = f(x) + f(y)$, ha f folytonos

Megoldás: Könnyen be lehet látni, $f(n) = n * f(1)$. Innen következik, hogy pozitív p-re és q-ra $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} \cdot f(1)$. Triviálisan $f(0) = 0$. Mivel $f(x) + f(-x) = 0$, $f(-\frac{p}{q}) = -\frac{p}{q} \cdot f(1)$. Innen bizonyítható, hogy a folytonosság miatt $f(x) = c \cdot x$.

17. $f(xy) + x + y = xy + f(x) + f(y)$

Megoldás: $g(x) := f(x) - x$, innen ugyanaz, mint az előző feladat

18. $f(x + y) + 2f(x - y) = 3f(x) - y$

Megoldás: $y = x$-et és $y = -x$-et behelyettesítve és a két egyenletet kivonva egymásl $f(x) = x + f(0)$-t kapjuk, $f(0)$ tetszőleges.

A következő pár feladat lényege az, hogy nem egy, hanem két (esetleg három) lépésben cserélődnek ki a paraméterek. Úgy gondolom, az elsőt megbeszélnénk, aztán hagynék egy kis időt játszani a többivel.

*19. $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 1 + x$, ha $x \neq 0$

Megoldás: Legyen $g(x) = \frac{x-1}{x}$, ekkor $g_2(x) = g(g(x)) = \frac{1}{1-x}$, és $g_3(x) = g(g(g(x))) = x$. (Ha $x \neq 1$) Felírhatók a következő egyenletek:

$$\begin{aligned} f(x) + f(g(x)) &= 1 + x \\ f(g(x)) + f(g_2(x)) &= 1 + g(x) \\ f(g_2(x)) + f(x) &= 1 + g_2(x) \end{aligned}$$

Innen $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$, $f(0)$ akármi, $f(1) = 1 - f(0)$

20. $f(\frac{1}{x}) + f(1 - x) = \frac{x+1}{x}$, ha $x \neq 0$

Megoldás: $x := \frac{1}{x}$, ekkor a feladat átmegy az előzőbe.

21. $f(\cos x) + 2 \cdot f(-\sin x) = x$

Megoldás: A bal oldal 2π szerint periodikus, a jobb oldal nem, így nincs megoldás

22. $f(\cos x) + 2 \cdot f(-\sin x) = \cos(x)$

Megoldás: x helyére $x + \frac{\pi}{2}$-t, $x + \pi$-t és $x + \frac{3\pi}{2}$-t írva kapunk egy egyenletrendszert, amiből $f(\cos x) = \frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x$