

Könnyű belátni, hogy minden szám 201 lesz. Az eredeti háromszögben minden, az oldalakkal párhuzamos sor és ferdeoszlop egy-egy számtani sorozat. Mivel a három csúcsban 201 volt, az oldalak mentén is az kell, hogy legyen, hiszen ha a számtani sorozat két eleme megegyezik, akkor az összes megegyezik. Az oldalak után pedig a belső pontokra is szükségszerűen áll ugyanez. Tehát, mivel Gauss óta (s már jóval előtte is) 5050 szám van a háromszögben, az első 100 négyzetszám összege: $\frac{5050 \cdot 201}{3} = 338350$.

Még egy bizonyítás

Most bebizonyítjuk, hogy $\sqrt{2}$ irracionális. A problémát úgy fogjuk átfogalmazni, hogy egy négyzetszám kétszerese nem lehet négyzetszám. Rajzoljunk fel egy x és két y egész oldalhosszúságú négyzetet, mint az I. ábrán, majd jelöljük be a piros és a kék (triviálisan egyenlő) szakaszokat. Mivel indirekt feltevésünk szerint $2y^2 = x^2$, tehát a két téglalap alakú rész területének, ahol a nagy x oldalú és a két kis y oldalú négyzet nem fedik át egymást, egyenlőnek kell lennie. Mindkettőben van egy *piros* \cdot *kék* területű téglalap, amit elvehetünk, s így a következő bizarr egyenlőségre jutunk:

$$\square + \square = \square$$

Ez egyrészt azért bizarr, mert az ábrán épp nemigen látszik, másfelől azért, mert ezzel kaptunk két négyzetet, ahol mindkettő kisebb az eredetieknél, oldaluk hossza egész, hiszen egész számok különbségei, s az egyik négyzet területe a másikénak kétszerese. Vagyis ezekre is ugyanaz az indirekt feltevés teljesül, tehát érvényesíthető rájuk a fenti okoskodás. Ezzel piros és kék négyzetek végtelen leszálló sorozatát kapjuk, ahol mindegyiknek az oldala egész és határozottan kisebb, mint az azt megelőzőé.

"Olyan kicsi, hogy nem látjátok, igaz?"
- *Pataki, kezével a kistábla mögött*

Ez nyilván nem folytatódhat a végtelenségig, amivel bebizonyítottuk a $\sqrt{2}$ irracionálisitását.

A háromszög négyszögesítése

A kör négyszögesítése évszázadokig kedvelt probléma volt (egészen Lindemannig ...), de mi kicsit szerényebb feladattal próbálkozunk - a háromszög négyszögesítésével, avagy: lehet-e egy háromszögszám négyzetszám? Az 1 erre triviális példa, s a 36 is viszonylag könnyen adja magát. Van-e még? Ha igen, az páros n indexű háromszögszámra a következőt jelenti:

$$\frac{n}{2}(n+1) = m^2$$

n és $n+1$ relatív prímek, ami azt jelenti, hogy $\frac{n}{2}$ és $n+1$ is azok. Tehát mind a kettőnek négyzetszámmal kell lennie, különben a szorzatukban lenne páratlan hatványú prímtényező. Hasonló logikával látszik, hogy páratlan n -ekre $\frac{n+1}{2}$ -nek és n -nek kell négyzetszámmal lennie. Ez a következő egyenletekre vezet, ha n páros, ill. páratlan:

$$y^2 - 2x^2 = \begin{cases} 1 & \text{ha } n \text{ páros} \\ -1 & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Az I. ábrán látható, hogy ott a nagy és a két kicsi négyzet területének a különbsége megegyezik a két piros és a kék négyzet területének a különbségével. Ez azt jelenti, hogy van egy módszerünk arra, hogy nagy háromszögnégyzetszámból kicsit állítsunk elő, de ugyan kinek kéne ilyen? Másfelől azonban olvassuk visszafelé ezt az egyenletet:

$$\square - \square - \square = \square + \square - \square$$

Ez az egyenlet visszafelé olvasva utasításokat ad arra, hogyan állítsunk elő kis háromszögnégyzetszám-ból nagyot! Hiszen legyen piros x és kék y olyan számok, amelyek négyzetszorzatáról tudjuk, hogy háromszögszám (vagyis $y^2 - 2x^2 = \pm 1$). Ekkor beírva ezeket az I. ábrába kapjuk:

$$x = y - x \tag{1}$$

$$y = 2x - y, \tag{2}$$

amiből ezek lesznek:

$$x = x + y \tag{3}$$

$$y = 2x + y. \tag{4}$$

Ezeket persze megint megválaszthatjuk piros x -nek és kék y -nak, így egyre nagyobb $(xy)^2$ háromszögnégyzetszámokat kapva, ezek száma tehát végtelen.

De nem biztos, hogy csak ez a végtelen sok háromszögnégyzetszám létezik. Azt is bizonyítsuk be, hogy több nincs! Ha van egy nagy x -ünk és y -ünk, amelyek négyzetszorzata háromszögnégyzetszám, akkor tartozni fog hozzájuk egy kis piros x és kék y , amelyekhez még kisebb piros x és kék y , s így tovább, míg el nem jutunk az első háromszögnégyzetszámig, az 1-ig. 1-ből kiindulva, a lépések megfordításával pedig megint elérjük azt a nagy x -et és y -t, amelyek kezdetben voltak. Mindez pedig azt jelenti, hogy az összes háromszögnégyzetszám előáll a leírt módon.