Pataki János: Algebra a geometriában, geometria az algebrában

Pataki János előadása alapján lejegyezte Bágyoni-Szabó Attila

A mai előadás egyfajta gyönysor. Az itt ismertetett bizonyítások (reméljük: gyöngyszemek) nem épülnek egymásra, de van köztük összefüggés.

Gauss-variációk

Mindenki jól ismeri a kis Gauss és az első 100 szám összegének történetét. Már ez az egyszerű példa is jól mutatja, milyen sokat segít egy feladat megoldásában a szög megváltoztatása, ahogyan ránézünk. Az, hogy Gauss leírta ugyanazt az összeget visszafelé is:

1 + 2 + ... + 100
100 + 99 + ... + 1,

szimmetriát adott a problémának: az egymás alatti számok összege 101. Ezután a válasz magától értetődő: $\frac{100\cdot 101}{2} = 5050$.

Valamivel bonyolultabb ugyanezzel a módszerrel kiszámolni a négyzetszámok összegét 1-től 100-ig. Alkalmazhatnánk indukciót is, a matematika "darálógépét", de az előadás témája nem ez. Menjünk először is csak 11-ig. Ha megpróbálnánk közvetlenül alkalmazni Gauss módszerét:

1 + 4 + 9 + ... + 121
121 + 100 + 81 + ... + 1,

nagyjából idáig tartana az örömünk. De van egy nagyon hasonló módszer, ami még működik is. Írjuk fel az $1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2$ összeget a következő konstrukcióban:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2\ 2 \\ 3\ 3\ 3 \\ \cdots \\ \\ \underbrace{100 \ldots 100}_{100\text{ db}} \end{array}$$

Ha ezt az ábrát ráfektetjük mind a három oldalára így:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & \cdots & \\ 100 & \cdots & 100 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 100 & \\ & \cdots & \\ 100 & \cdots & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 100 & \\ & \cdots & \\ 1 & \cdots & 100 \end{array}$$

majd az azonos helyeken levő számokat összeadjuk:

$$\begin{array}{ccc} & 201 & \\ & \dots & \\ 201 & \dots & 201 \end{array}$$

Könnyű belátni, hogy minden szám 201 lesz. Az eredeti háromszögben minden, az oldalakkal párhuzamos sor és ferdeoszlop egy-egy számtani sorozat. Mivel a három csúcsban 201 volt, az oldalak mentén is az kell, hogy legyen, hiszen ha a számtani sorozat két eleme megegyezik, akkor az összes megegyezik. Az oldalak után pedig a belső pontokra is szükségszerűen áll ugyanez. Tehát, mivel Gauss óta (s már jóval őelőtte is) 5050 szám van a háromszögben, az első 100 négyzetszám összege: $\frac{5050 \cdot 201}{3} = 338350$.

Még egy bizonyítás

Most bebizonyítjuk, hogy $\sqrt{2}$ irracionális. A problémát úgy fogjuk átfogalmazni, hogy egy négyzetszám kétszerese nem lehet négyzetszám. Rajzoljunk fel egy x és két y egész oldalhosszúságú négyzetet, mint az I. ábrán, majd jelöljük be a piros és a kék (triviálisan egyenlő) szakaszokat. Mivel indirekt feltevésünk szerint $2y^2 = x^2$, tehát a két téglalap alakú rész területének, ahol a nagy x oldalú és a két kis y oldalú négyzet nem fedik át egymást, egyenlőnek kell lennie. Mindkettőben van egy $piros \cdot kk$ területű téglalap, amit elvehetünk, s így a következő bizarr egyenlőségre jutunk:

$$\square + \square = \square$$

Ez egyrészt azért bizarr, mert az ábrán épp nemigen látszik, másfelől azért, mert ezzel kaptunk két négyzetet, ahol mindkettő kisebb az eredetieknél, oldaluk hossza egész, hiszen egész számok különbségei, s az egyik négyzet területe a másikénak kétszerese. Vagyis ezekre is ugyanaz az indirekt feltevés teljesül, tehát érvényesíthető rájuk a fenti okoskodás. Ezzel piros és kék négyzetek végtelen leszálló sorozatát kapjuk, ahol mindegyiknek az oldala egész és határozottan kisebb, mint az azt megelőzőé.

> "Olyan kicsi, hogy nem látjátok, igaz?"
> - *Pataki, kezével a kistábla mögött*

Ez nyilván nem folytatódhat a végtelenségig, amivel bebizonyítottuk a $\sqrt{2}$ irracionalitását.

A háromszög négyszögesítése

A kör négyszögesítése évszázadokig kedvelt probléma volt (egészen Lindemannig ...), de mi kicsit szerényebb feladattal próbálkozunk - a háromszög négyszögesítésével, avagy: lehet-e egy háromszögszám négyzetszám? Az 1 erre triviális példa, s a 36 is viszonylag könnyen adja magát. Van-e még? Ha igen, az páros n indexű háromszögszámra a következőt jelenti:

$$\frac{n}{2}(n+1) = m^2$$

n és $n+1$ relatív prímek, ami azt jelenti, hogy $\frac{n}{2}$ és $n+1$ is azok. Tehát mind a kettőnek négyzetszámnak kell lennie, különben a szorzatukban lenne páratlan hatványú prímtényező. Hasonló logikával látszik, hogy páratlan n-ekre $\frac{n+1}{2}$-nek és n-nek kell négyzetszámnak lennie. Ez a következő egyenletekre vezet, ha n páros, ill. páratlan:

$$y^2 - 2x^2 = \begin{cases} 1 & \text{ha n páros} \\ -1 & \text{ha n páratlan} \end{cases}$$

Az I. ábrán látható, hogy ott a nagy és a két kicsi négyzet területének a különbsége megegyezik a két piros és a kék négyzet területének a különbségével. Ez azt jelenti, hogy van egy módszerünk arra, hogy nagy háromszögnégyzetszámból kicsit állítsunk elő, de ugyan kinek kéne ilyen? Másfelől azonban olvassuk visszafelé ezt az egyenletet:

$$\square - \square - \square = \square + \square - \square$$

Ez az egyenlet visszafelé olvasva utasításokat ad arra, hogyan állítsunk elő kis háromszögnégyzetszámból nagyot! Hiszen legyen piros x és kék y olyan számok, amelyek négyzetszorzatáról tudjuk, hogy háromszögszám (vagyis $y^2 - 2x^2 = \pm 1$). Ekkor beírva ezeket az I. ábrába kapjuk:

$$
\begin{aligned}
x &= y - x && (1)\\
y &= 2x - y, && (2)
\end{aligned}
$$

amiből ezek lesznek:

$$
\begin{aligned}
x &= x + y && (3)\\
y &= 2x + y. && (4)
\end{aligned}
$$

Ezeket persze megint megválaszthatjuk piros x-nek és kék y-nak, így egyre nagyobb $(xy)^2$ háromszögnégyzetszámokat kapva, ezek száma tehát végtelen.

De nem biztos, hogy csak ez a végtelen sok háromszögnégyzetszám létezik. Azt is bizonyítsuk be, hogy több nincs! Ha van egy nagy x-ünk és y-unk, amelyek négyzetszorzata háromszögnégyzetszám, akkor tartozni fog hozzájuk egy kis piros x és kék y, amelyekhez még kisebb piros x és kék y, s így tovább, míg el nem jutunk az első háromszögnégyzetszámig, az 1-ig. 1-ből kiindulva, a lépések megfordításával pedig megint elérjük azt a nagy x-et és y-t, amelyek kezdetben voltak. Mindez pedig azt jelenti, hogy az összes háromszögnégyzetszám előáll a leírt módon.