Mahler Attila: Euler poliédertétele és síkbarajzolhatóság tóruszon

A topológia egy absztrakt, modern tudomány, meghatározó a modern matematikában. Az egybevágóságnál és a hasonlóságnál is gyengébb feltétel, azt vizsgálja, hogy két geometriai alakzat *szerkezetileg* azonos-e. A topológia szerint két alakzat *ugyanolyan*, ha „egymásba deformálható”.

Pl.:

- ugyanolyan a háromszög, négyzet, bármely sokszög és a körvonal
- ugyanolyan a bögre és a fánk
  „A topologus az, aki nem tud megkülönböztetni egy bögrét egy amerikai fánktól.”
- de nem ugyanolyan a fánk és a gömb

A következőkben megnézzük néhány tulajdonság, hogyan változik a topologikusan különböző alakzatokon.

Euler poliédertétele

***D*efiníció:**
Konvex poliéder: konvex sokszögek által határolt test (a térben). Euler poliédertétele a csúcsok, lapok és élek száma közti összefüggést adja meg.

1. feladat:

Próbáljunk meg rájönni! Vizsgáljuk meg ezeket a számokat a tetraédernél, a kockánál és a piramisnál!

***T*étel:**
Ha egy konvex poliéder csúcsainak számát c-vel, lapjainak számát l-lel, éleinek számát e-vel jelöljük, akkor $c + l = e + 2$.

Bizonyítás:
Bármely konvex poliéder topologikusan ekvivalens a gömbbel:
konvex poliéder $\leftrightarrow$ gömb (gömb középpontjából kivetítjük a felszínre)

Sztereografikus projekció:
gömb $-$ $\{$É$\}$ $\leftrightarrow$ sík (É-ből levetítjük a D érintősíkjára)

Megjegyzés: úgy kell választani É-t, hogy ne legyen csúcs és ne essen élre.

Így a poliédert megfeleltettük egy síkgráfnak:

- lapok $\leftrightarrow$ tartományok (egyik nem korlátos)
- csúcsok $\leftrightarrow$ gráf csúcsai
- élek $\leftrightarrow$ gráf élei

Képzeljük el, hogy az élek válaszfalak és pontosan egy tartományban van víz. Ezután minden lépésben felrobbantunk egy olyan gátat, aminek egyik oldalán víz van, de a másikon nincs. Ezt addig csináljuk, amíg az összes tartomány víz alá kerül.

A felrobbantott élek száma: $l - 1$.

A maradék gráf

- körmentes, mert az egészet elárasztottuk;
- összefüggő, mert ha nem lenne az, akkor lenne egy robbantás, ahol szétesett. De ha szétesik, akkor más irányból eljutott oda a víz, tehát nem robbanthattuk fel azt a falat.

Tehát a maradék gráf egy c csúcsú fa, amely $c - 1$ élet tartalmaz.

Azaz összeadva: $e = c + l - 2$. ☑

Emellett adhatunk egy becslést az élek és a lapok (tartományok) számára: $2e \geq 3l$. Hiszen, ha minden tartománynál összeszámoljuk a határoló éleket, akkor egyrészt az élek számának kétszeresét kapjuk. Másrészt viszont, mivel minden tartományt legalább három él határol, ez a szám legalább a lapok számának háromszorosa.

Síkbarajzolhatóság

***D*efiníciók:**
Egy gráf **síkbarajzolható**, ha le lehet rajzolni a síkban úgy, hogy az élei nem metszik egymást.
n csúcsú **teljes gráf**: bármely két csúcsa közt halad él. **Jelölés**: K_n.
n csúcsú **teljes páros gráf**: csúcsai két osztályba sorolhatóak úgy, hogy az osztályokon belül nem megy él, de az osztályok között minden él be van húzva. **Jelölés**: $K_{n,n}$.

2. feladat:

Síkbarajzolható-e
a) K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, $\ldots K_n$?
b) $K_{2,2}$, $K_{3,3}$?
Ha igen, rajzold le; ha nem, bizonyítsd!

Megoldás:
a) Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy K_5 síkbarajzolható. Ekkor igaz lenne rá a poliédertétel, azaz:

$$c = 5, e = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \Rightarrow l = e + 2 - c = 10 + 2 - 5 = 7$$

De ez ellentmond a $2e \geq 3l$ feltételnek, mert $2 \cdot 10 < 3 \cdot 7$, tehát az indirekt feltevésünk hamis, a K_5 nem síkbarajzolható. ☑

b) Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy $K_{3,3}$ síkbarajzolható. Ekkor igaz lenne rá a poliédertétel, azaz:

$$c = 6, e = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \Rightarrow l = e + 2 - c = 9 + 2 - 6 = 5$$

Viszont most nem jutunk ellentmondásra a $2e \geq 3l$ feltételből, hiszen a $2 \cdot 9 \geq 3 \cdot 5$ egyenlőtlenség igaz. Igen ám, de mivel páros gráfról van szó, minden tartomány legalább négy oldalú, tehát a $2e \geq 4l$ egyenlőtlenségnek is teljesülnie kellene, de $2 \cdot 9 < 4 \cdot 5$, így ez ellentmondás, $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható.☑

Általában mikor síkbarajzolható egy gráf?

***K*uratowski-tétel:**
G síkbarajzolható $\Leftrightarrow$ nem tartalmazza részgráfként K_5-öt, $K_{3,3}$-at, vagy ezek soros bővítését.

***F*áry-Wagner-tétel:**
G síkbarajzolható és egyszerű (nincs benne hurokél és többszörös él) $\Rightarrow$ van olyan síkbarajzolása, ahol minden él egyenes szakasz.

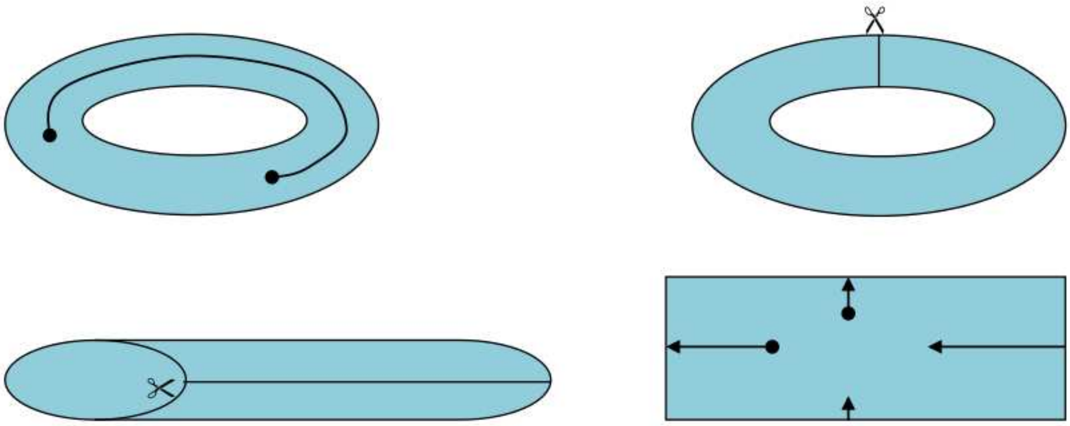
Tórusz

Most vizsgáljuk meg ezeket a tulajdonságokat a tóruszon!

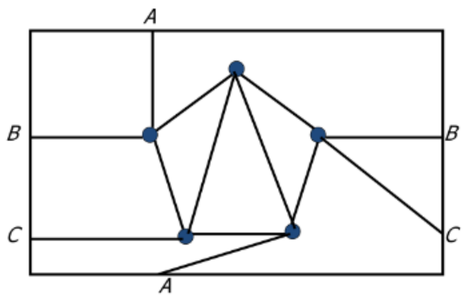
3. feladat:

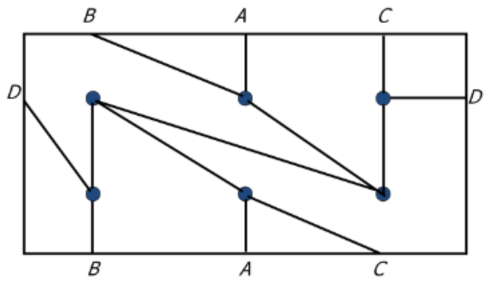
Tóruszra le lehet-e rajzolni K_5-öt és $K_{3,3}$-at?

Megoldás:
Tóruszra rajzolás szemléltetése: a tóruszt „felvágjuk” egy kör keresztmetszet mentén, majd egy hengerré „kiegyenesítjük”. A henger két széle eredetileg összeért, így ha egyik oldalon „lemegyünk”, akkor a másikon „visszajövünk”. Majd ugyanígy a hengerpalástot is felvágjuk egy alkotó mentén és egy téglalappá „lapítjuk”. Azaz a tóruszt szemléltethetjük egy téglalappal úgy, hogy ha valahol „lemegyünk” a téglalapról, akkor a túloldalon „visszajövünk”.



Ennek segítségével ábrázolhatjuk K_5 és $K_{3,3}$ tóruszra rajzolását.

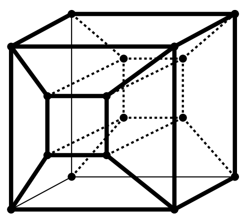




Nézzük meg, mi okozza a különbséget a lerajzolhatóságnál!

4. feladat:

Vizsgáljuk meg az ábrán látható „lyukas kockát”! (A közepén fúrunk rá egy négyzet alakú lyukat, és ezeket kiemeljük a lapok síkjából.) Ez a test topologikusan megegyezik a tórusszal? Hány csúcsa, lapja és éle van? Hogyan változik Euler poliédertétele a tóruszon?



Megoldás:
$c = 16$, $l = 16$, $e = 32$.

Tétel:
Euler poliédertétele tórusz szerű testeknél: $c + l = e$.

Bizonyítás:
Tóruszon két zárt görbe nem feltétlenül osztja két részre a felszínt. (Pl.: két kör.)

Az előző robbantásos bizonyítás gondolatmenete itt is alkalmazható. A felrobbantott élek száma továbbra is $l - 1$. A maradék gráf pedig összefüggő, de maradt benne két kör, így a maradék élek száma $c - 1 + 2$. Tehát összesen az élek száma $l + c$. ☑

5. feladat:

Az előző tételt és a síkbeli esetet felhasználva bizonyítsd az alábbi állításokat!
Ha K_n tóruszra rajzolható $\Rightarrow n \leq 7$.
Ha $K_{n,n}$ tóruszra rajzolható $\Rightarrow n \leq 4$.

Megoldás:

Ha K_n tóruszra rajzolható, akkor:

$$\left.\begin{array}{r} c = n \\ e = \frac{n(n-1)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow l = e - c = \frac{n^2 - n}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

A $2e \geq 3l$ egyenlőtlenség itt is ugyanúgy érvényes, hiszen itt is minden él két lapot határol és minden lapnak legalább három éle van.

$$n^2 - n \geq 3 \cdot \frac{n^2 - 3n}{2}$$

$$0 \geq n^2 - 7n = n(n - 7) \Rightarrow n \leq 7 \quad ☑$$

Ha $K_{n,n}$ tóruszra rajzolható, akkor:

$$\left.\begin{array}{r} c = 2n \\ e = n^2 \end{array}\right\} \Rightarrow l = e - c = n^2 - 2n$$

Mivel páros gráf, ezért minden lap legalább négy oldalú, ezért most a $2e \geq 4l$, azaz a $e \geq 2l$ feltételt kell vizsgálni.

$$n^2 \geq 2n^2 - 4n$$

$$0 \geq n^2 - 4n = n(n - 4) \Rightarrow n \leq 4 \quad ☑$$

8-asszerű test

Ezt úgy kell elképzelni, hogy két „lyukas kockát” összeragasztunk, de úgy, hogy az alsó és felső lapjait egy kicsit megdöntjük, így a ragasztás után a két felső lap nem esik egy síkba. (Erre azért van szükség, hogy a továbbiakban is egyértelmű legyen, mit értünk csúcson, lapon és élen.) Nézzük meg, ekkor hogyan változnak a csúcsok, a lapok és az élek számai!

$$\begin{array}{c} c = 2 \cdot 16 - 4 \\ l = 2 \cdot 16 - 2 \\ e = 2 \cdot 32 - 4 \\ \hline \sum : c + l - e = -2 \end{array}$$

p-lukú gömb

Mi történik, ha még egy „lyukas kockát” hozzáragasztunk?

$$\begin{array}{c} c_{p+1} = c_p + 16 - 4 \\ l_{p+1} = l_p + 16 - 2 \\ e_{p+1} = e_p + 32 - 4 \\ \hline \sum : c_{p+1} + l_{p+1} - e_{p+1} = c_p + l_p - e_p - 2 \end{array}$$

Tehát mindig az előzőhöz képest kettővel csökken a $c + l - e$ kifejezés értéke.

Gömb:	$c + l - e = 2$
Tórusz:	$c + l - e = 0$
Nyolcas:	$c + l - e = -2$
Sósperec:	$c + l - e = -4$
...	
p-lukú gömb:	$c + l - e = -2(p - 1)$

Ennek a hátterében az áll, hogy egy p-lukú gömbre $2p$ darab zárt görbe rajzolható úgy, hogy ne osszák a felszínt két részre.