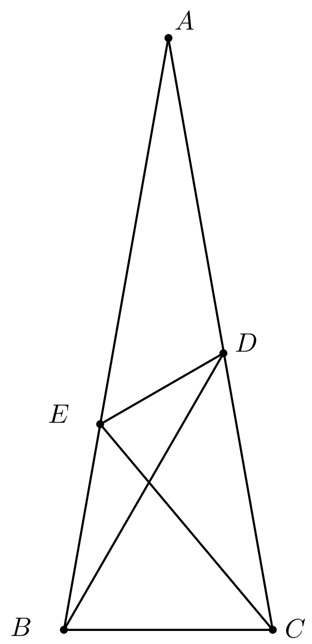
Hubert Györgyné: Egy feladat több megoldással

I. A feladat

Az ABC háromszög egyenlő szárú ($AB = AC$), szárszöge $20°$. A háromszög alapjával BD $60°$-os, CE pedig $50°$-os szöget zár be. (D az AC, E pedig az AB oldalra illeszkedik.)

Határozzuk meg a BDE szöget!

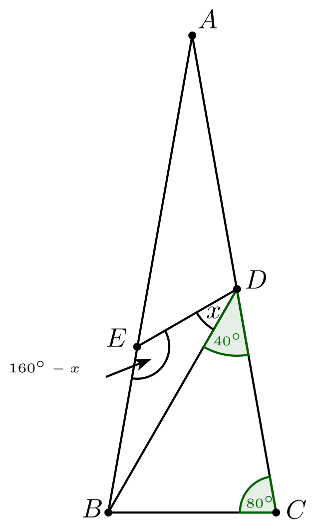


1. ábra

Először szögeket számolva kiderül, hogy a BDA ill. az EBC háromszög egyenlő szárú, így $BD = DA$ ill. $EB = BC$. Használni fogjuk azt is, hogy a BDC szög $40°$, az EBD szög $20°$, az ECD szög $30°$.

1. megoldás

Felírunk egy-egy szinusz-tételt a BED és a BCD háromszögre. Legyen a BDE szög x, így a DEB szög $160° - x$.



2. ábra

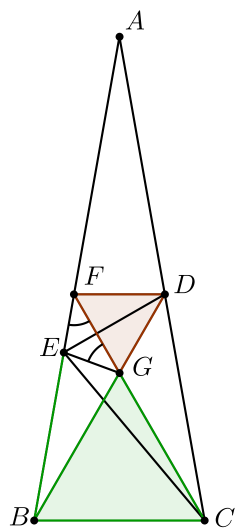
Így: $\sin(160° - x) : \sin x = BD : BE$ és $\sin 80° : \sin 40° = BD : BC$.

Felhasználva, hogy $BE = BC$, a következő trigonometrikus egyenlethez jutunk: $\sin(160° - x) : \sin x = \sin 80° : \sin 40°$. Ennek megoldása során – természetesen nem közelítő értékekkel dolgozunk – felhasználjuk, hogy $\sin(160° - x) = \sin(20° + x)$, ill. hogy $80° = 2 \cdot 40°$ és $40° = 60° - 20°$. Addíciós tételek alkalmazása után beírva a $60°$-os szög szögfüggvényeinek pontos értékét $x = 30°$-ot kapunk.

A további megoldások mindannyian konstrukciós bizonyítások, talán ezért számítanak nehéznek. A feldolgozás során, aki igényelte, egy-egy ötletet (és egy vázlatrajzot) kapott, s egyedül dolgozhatott tovább.

2. megoldás

(Ötlet: DF párhuzamos BC-vel.)



3. ábra

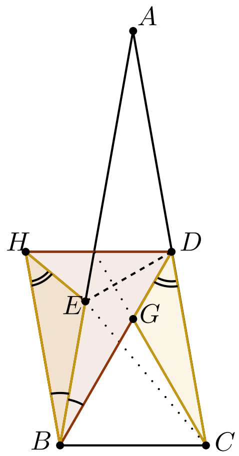
A (GDF és a) BCG háromszög(ek) szabályos(ak), ezért $BG = BC$. Már tudtuk, hogy $BC = BE$, így $BG = BE$, tehát az EBG háromszög egyenlő szárú, G-nél lévő szöge $80°$. Kiszámítható az FGE szög (pl. az ismert G csúcsú szögekből) és a GFE szög (a BCF háromszögből), mindkettő $40°$, így az FEG háromszög egyenlő szárú.

Ezek szerint az FG szakasz végpontjaitól az E pont egyenlő távolságra van, ugyanígy a D pont is, tehát ED az FG szakasz felező merőlegese, tehát felezi az FDG szabályos háromszög D-nél lévő szögét is.

Így az EDG szög $30°$-os.

3. megoldás

(Ötlet: $BCDH$ paralelogramma. Vizsgáljuk a BDH háromszög és az E pont viszonyát!)



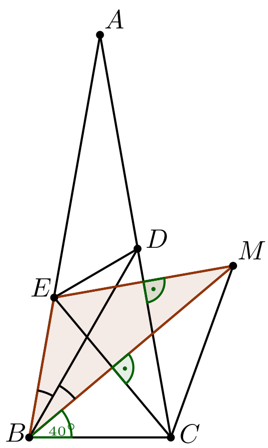
4. ábra

Megmutatjuk, hogy a BDH háromszögben az E pont két belső szögfelező (BE és HE) metszéspontja, (így DE a harmadik szög szögfelezője lehet csak). BE két $20°$-os szögre bontja a HBD $40°$-os szöget, mert ... $(100° - 80° = 80° - 60°)$.

A BEH és a CGD háromszögek egybevágóak, hiszen $BE = (BC =)CG$, $BH = CD$ és a HBE szög megegyezik a DCG szöggel (mindkettő $20°$). Így a BHE szög is $40°$ (mivel megegyezik a GDC szöggel). Tehát HE felezi a $80°$-os BHD szöget. Így DE is felezi a háromszög harmadik ($60°$-os) szögét. Tehát az EDB szög $30°$-os.

4. megoldás

(Ötlet: az M pont az E pont AC egyenesre vett tükörképe. Vizsgáljuk az EMB háromszög és a D pont kapcsolatát!)



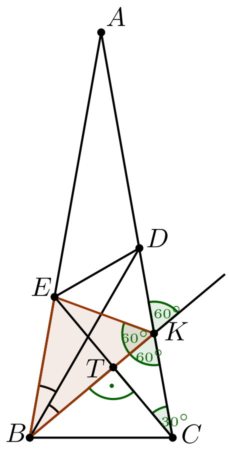
5. ábra

Az ECM háromszög szabályos (hiszen $CE = CM$ és az ECM szög $2 \cdot 30° = 60°$), így $EM = MC$. Régről tudjuk, hogy $EB = BC$, tehát BM az EC szakasz felező merőlegese s egyben felezi az EBM és EMC szögeket is. Így az EBM szög 40°-os, s tudjuk, hogy a DBE szög 20°-os, tehát BD az EBM háromszög B-nél lévő belső szögének szögfelezője. Ugyanezen háromszög B-vel szemközti EM oldalának oldalfelező merőlegese DC, tehát BD és CD metszéspontja (azaz a D pont) illeszkedik az EBM háromszög körülírt körére.

Így az EB húr D-ből és M-ből azonos szögben látszik, azaz az EDB szög 30°-os.

5. megoldás

(Az ötletet már az előző megoldás ábrája is adja: BK legyen az EBC szög szögfelezője. Vizsgáljuk meg az EKB háromszög és a D pont kapcsolatát!)

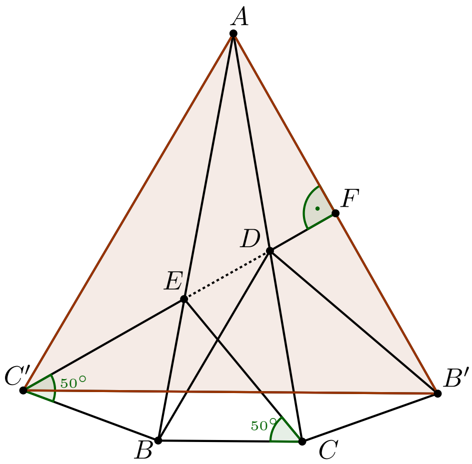


6. ábra

Megmutatható, hogy a BKE háromszög B-nél lévő belső szögének szögfelezője BD, ill. K-nál lévő külső szögének szögfelezője KD. (ld. az ábrát.) Így ED nem lehet más, mint e háromszög E-nél lévő külső (100°-os) szögének szögfelezője. A BED háromszögből már számolható az EDB szög.

6. megoldás

Számomra talán a legkedvesebb. (Ötlet: Tükrözzük a B csúcsot az AC, a C csúcsot pedig az AB egyenesre!)



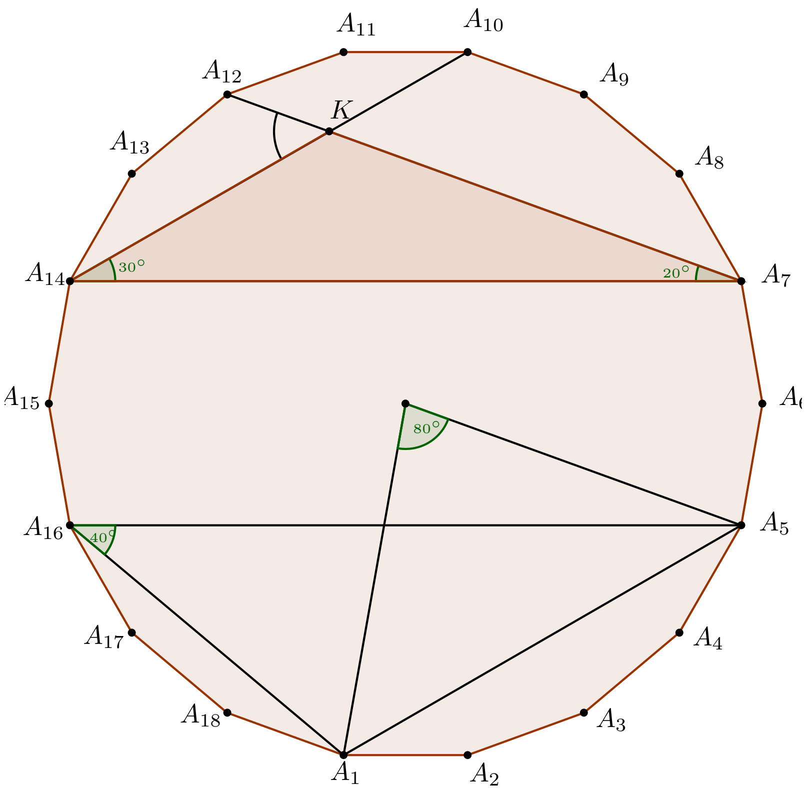
7. ábra

A tükrözés után létrejövő $C'AB'$ háromszög szabályos (, hiszen $AC' = AB'$ és a $C'AB'$ szög $60°$). Megmutatható hogy a D és az E pont e háromszög C' csúcsán áthaladó szimmetriatengelyére illeszkedik.

Tudjuk, hogy $AD = DB$, de $DB = DB'$, tehát D illeszkedik az AB' szakasz szakaszfelező merőlegesére. Az $AC'E$ szög (mely az ACE szög tükörképe) $30°$-os, tehát $C'E$ felezi a szabályos háromszög C'-nél lévő szögét. E szögfelező és az előző oldalfelező merőleges szabályos háromszögnél egybe esik. Tehát C', E, D pontok egy egyenesbe esnek. Így a $C'DB$ háromszögből az EDB szög számolható.

Ezen megoldás ábrája elvezethet a szabályos tizennyolc oldalú sokszög és átlóinak vizsgálatához.

II. A szabályos tizennyolc oldalú sokszög

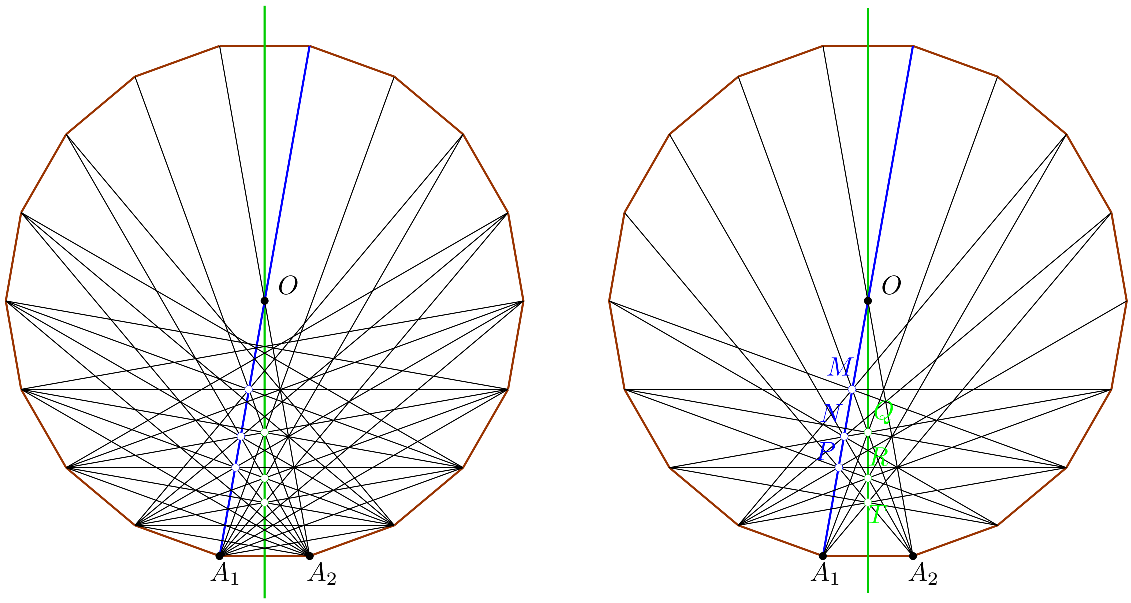


8. ábra

Mindenek előtt néhány megállapítást tehetünk a szabályos tizennyolc oldalú sokszögről és átlóiról:

- Minden oldalához $20°$-os középponti szög tartozik.
- Egy átlóhoz tartozó középponti szög $n \cdot 20°$, ha a szögtartomány n db oldalt tartalmaz.
- Az előzőekből számolható, hogy e sokszög valamely csúcsából egy oldal vagy átló mekkora szögben látszik.
- Két átló szöge pl. az ábrán látható módon az $A_7A_{14}K$ háromszög külső szögeként kiszámolható.
- Tetszőleges három csúcsa által meghatározott háromszög szögei $10°$ egész számú többszörösei, sőt: minden ilyen háromszög előáll így. (Természetesen a hasonlóság erejéig ...)

Vizsgáljuk meg a szabályos tizennyolc oldalú sokszög átlóinak (csúcsoktól és a középponttól különböző) metszéspontjait! Az ábrán szerepel minden olyan átló, amely „belemetsz” az OA_1A_2 háromszögbe.

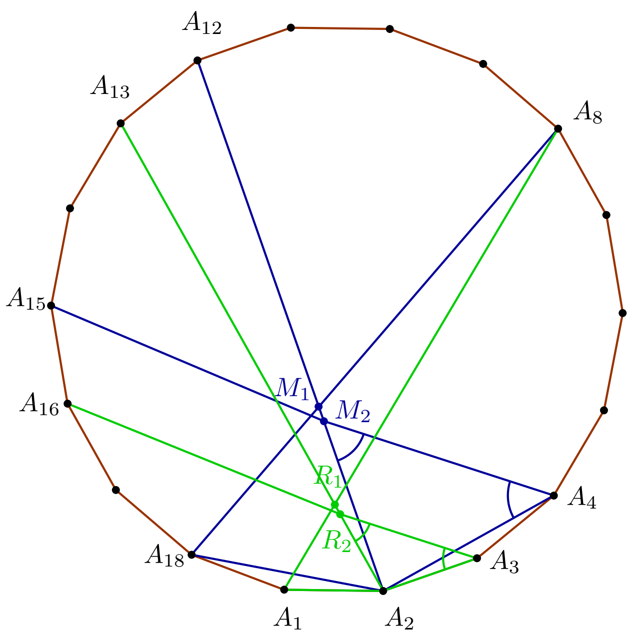


9. és 10. ábra

Nagyon sok olyan pont van e háromszög belsejében (és az OA_1 határán), melyen három átló megy át. Izgalmasabbak azok a pontok, melyeken négy vagy annál több átló halad át. Az ábrát vizsgálva az A_1O sugáron három, az A_1A_2 oldalfelező merőlegesén szintén három ilyen pontot látunk. Így egészen biztos, hogy a tizennyolc oldalú sokszög belsejében (O-n kívül) legalább $18 \cdot 6 = 108$ ilyen pont van. (Azzal nem foglalkoztunk, hogy több ilyen pont nincs.)

Bebizonyítjuk, hogy az M, N, P pontban öt (egy szimmetriatengely-átló és két-két rá szimmetrikus) átló, a Q, R és T pontban pedig négy (egy oldal felezőmerőlegesére szimmetrikus két-két) átló metszi egymást.

a/ Először vizsgáljuk meg az M (és ugyanúgy az R) pontot.



11. ábra

Az M_1 pont legyen az A_2A_{12} és az $A_{18}A_8$ (A_1A_{10}-re szimmetrikus) átlók metszéspontja. M_2 pedig az A_2A_{12} és az A_4A_{15} átlók metszéspontja. Megmutatjuk, hogy $A_2M_1 = A_2M_2$. (Így M_1 azonos lesz

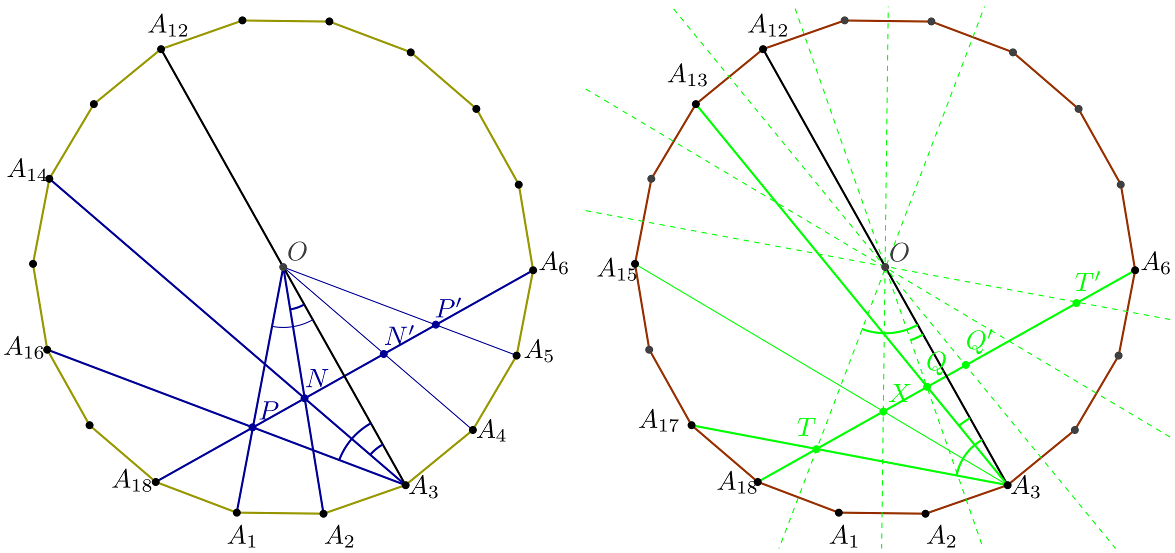
M_2-vel.)

Az $A_{18}M_1A_2$ háromszög egyenlő oldalú (hiszen szögei 60°-osak), tehát $A_2M_1 = A_{18}A_2$.

Az $M_2A_2A_4$ háromszög egyenlő szárú (hiszen a jelzett szögei 50°-osak), így $A_2M_2 = A_2A_4$. De $A_{18}A_2 = A_2A_4$, tehát az M_1 és az M_2 pont egybeesik. (Ugyanezen ponton megy át az A_1A_{10} átló és az A_5A_{16} átló is.)

Pontosan ugyanígy látható be az R_1 és R_2 pontok azonossága is.

b./ Most vizsgáljuk meg az N és P (s ugyanúgy a T és Q) pontokat! Mindegyikben közös, hogy áthalad rajtuk egy-egy 120°-os középponti szöghöz tartozó átló, így tulajdonságaik egyben vizsgálhatóak (hiszen O körüli elforgatással a megfelelő szimmetria tengelyre vihetők át).



12. és 13. ábra

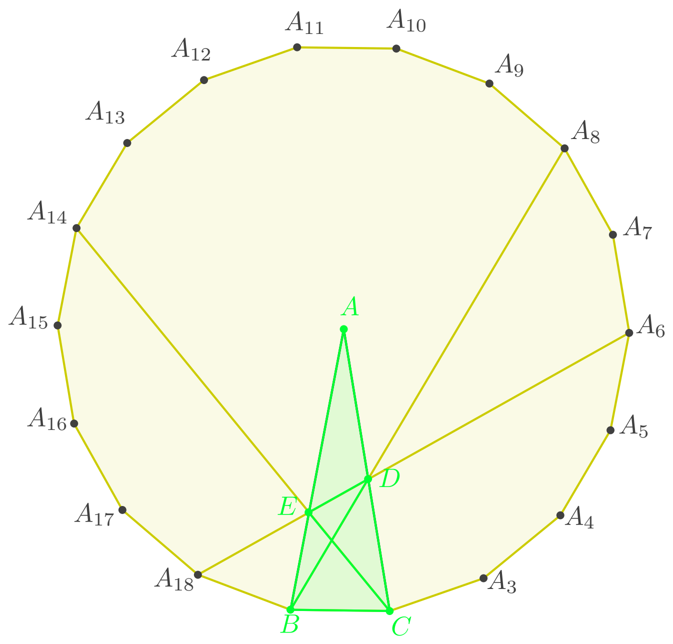
Az $A_{18}A_6$ átlót messük el a lehetséges szimmetria-tengely átlókkal. Így P és N „típusú” pontokhoz jutunk. Az O pont $A_{18}A_6$-ra vonatkozó tükörképe A_3 (mivel $A_{18}OA_6$ szög 120°). Ugyanez a tükrözés az ON félegyenest az A_3N félegyenesbe, az OP félegyenest az A_3P félegyenesbe viszi át. Az OA_3N szög 20°-os, hiszen az NOA_3 szög tükörképe, tehát az A_3N félegyenes át kell hogy menjen az A_{14} ponton is, tehát átló. Ugyanígy látható be, hogy az OP félegyenes $A_{18}A_6$-ra vonatkozó tükörképe egy újabb P-n áthaladó (A_3A_{16}) átló.

Hasonlóképpen látható be a T és Q „típusú” pontok említett tulajdonsága. (Természetesen most az $A_{18}A_6$ átlót a megfelelő oldalfelező merőlegesekkel kell elmetszenünk, s „őket” tükrözzük $A_{18}A_6$-ra. Megjegyzem, hogy az X pont nem lesz újabb „sokátlós” pont, hiszen . . . .)

Mindezek után térjünk vissza az eredeti feladathoz:

7. megoldás

Az ABC háromszöget helyezzük bele egy szabályos tizennyolc oldalú sokszögbe úgy, hogy pl. $A = O, B = A_1, C = A_2$ legyen.



14. ábra

Ekkor (az előzőek szerint) a D pont az A_2A_{11} szimmetria-átló egy „N típusú", az E pedig az A_1A_{10} átló egy „P típusú" pontja. Így az EDB szög az $A_{18}A_6$ és az A_1A_8 átlók szögével egyezik meg. (Ami így is 30°.)

III. További példák

A szabályos tizennyolc oldalú sokszög és „sokátlós" belső pontjainak ismerete más feladatok szép megoldásaihoz is segítséget adhat (, sőt egyik másik feladat megoldásához kétféle elhelyezés is adódik).

(A következő két feladat részletes megoldására a táborban már nem volt elegendő időnk.)

1. feladat: Egy egyenlő szárú ABC háromszög C-nél lévő szöge 100°. Az A-ból induló szögfelező a BC oldalt a D pontban metszi.

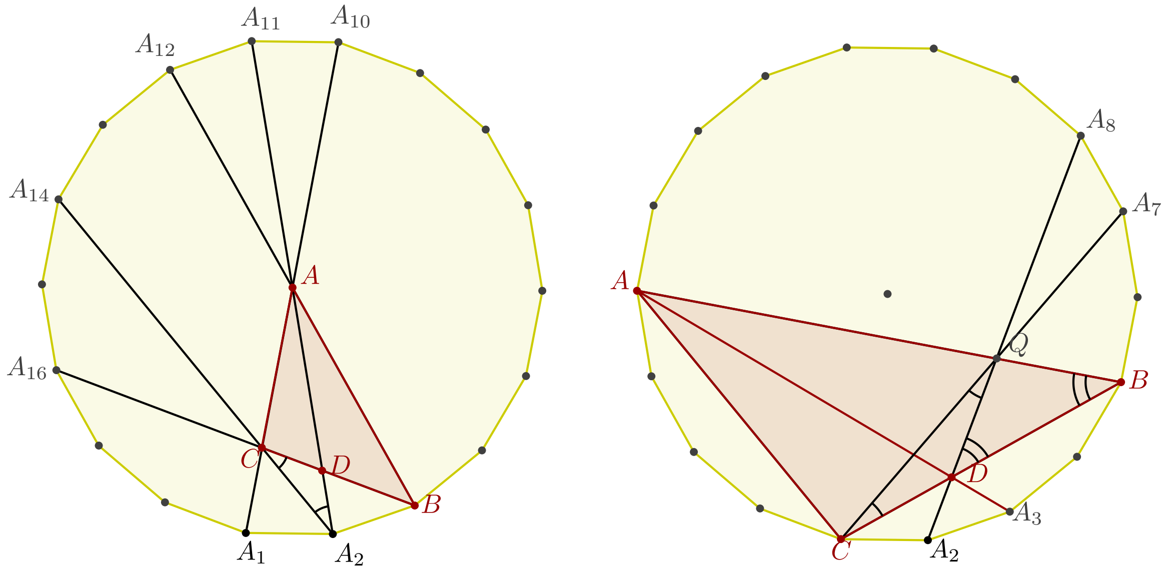
Bizonyítsuk be, hogy: $AD + DC = AB$.

1. megoldás: Helyezzük el e háromszöget a szabályos tizennyolc oldalú sokszögben az ábra szerint.

A megoldás az ábráról leolvasható (a C pont az A_1A_{10} átló egy „P típusú" pontja).

2. megoldás: E háromszöget másként is elhelyezhetjük a szabályos tizennyolc oldalú sokszögben.

Ebben az esetben a D pont az A_2A_3 oldal felező merőlegesén egy „T típusú" pont, melyen áthaladó A_2A_8 átló az AB oldalt egy „Q típusú" pontban metszi. Az átlók szögeinek kiszámolásából adódik, hogy $AD = AQ$ és $CD = DQ = QB$, tehát $AD + CD = AB$.

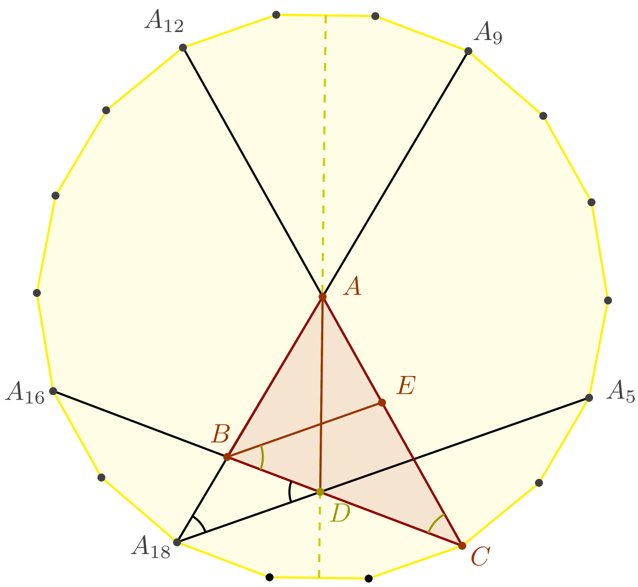


15. és 16. ábra

2. feladat: Az ABC háromszög A-nál lévő szöge 60°, B-nél lévő szöge 80°. Az A-ból induló szögfelező a szemközti oldalt D-ben, a B-ből induló szögfelező az AC oldalt E-ben metszi.

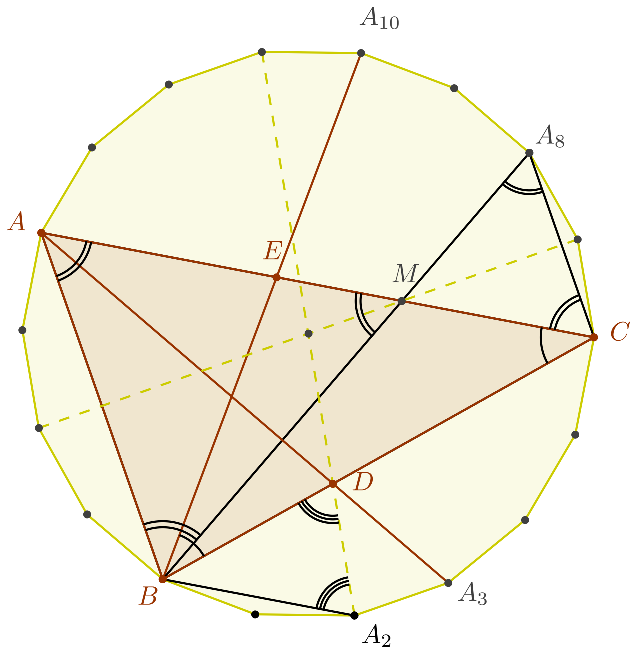
Bizonyítsuk be, hogy: $AE + EB = AB + BD$.

1. megoldás: Helyezzük el egy szabályos tizennyolc oldalú sokszögben a háromszöget az ábrának megfelelő módon. A megoldás az ábráról leolvasható.



17. ábra

2. megoldás: A háromszög másként is elhelyezhető a szabályos tizennyolc oldalú sokszögben. (Így a D pont az A_2A_{11} átló egy „N típusú” pontja.)

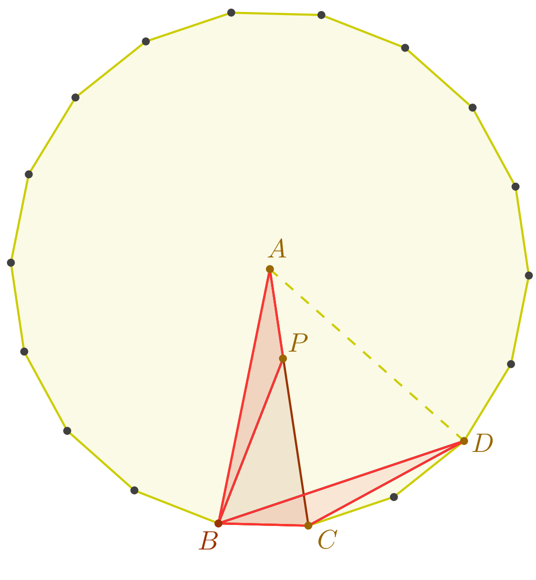


18. ábra

Az átlók szögeinek kiszámolásából következik, hogy az ábrán egyformán jelölt szögek megegyeznek. Így egyrészt $BE = EC$, tehát $AE + EB = AE + EC = AC$. Másrészt $AB = AM$, $BD = BA_2 = CA_8 = CM$, tehát $AB + BD = AM + MC = AC$.

Levezetésként egy ismert feladat egy szép megoldását néztük meg a szabályos tizennyolc oldalú sokszögbe helyezve.

3. feladat: Az ABC háromszögben $AB = AC$ és a BAC szög $20°$. Vegyük fel a P pontot az AC száron úgy, hogy $AP = BC$ legyen. Határozzuk meg a BPC háromszög szögeit.



19. ábra

Megoldás: Az ábráról nyilvánvaló, hogy az ABP háromszög egybevágó a BDC háromszöggel, melynek D-nél lévő szöge $10°$. Ebből már számolhatóak a BPC háromszög eddig ismeretlen szögei. ($70°$, $30°$.)