

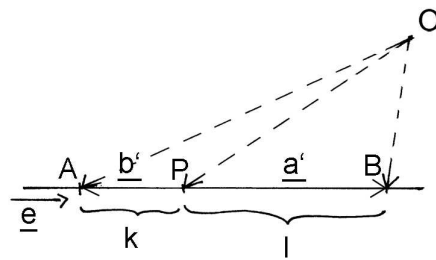
Gál Györgyné: Háromszög-tetraéder analógiák

Szükséges előzmények

Vektorok skaláris szorzata, vektoriális szorzata, vegyesszorzata.
Ezek szemléletes geometriai jelentése.

Koordináták

- Egyenes mentén: A és B pont által meghatározott egyenes pontjainak koordinátái \underline{a} és \underline{b} helyvektorok segítségével.



1. ábra

$$\overrightarrow{PB} = \alpha \overrightarrow{PA}$$

Szorozzuk meg az egyenletet skalárisan \underline{e} egységvektorral!

$$l = -\alpha k$$

$$\alpha = -\frac{l}{k}$$

$$-\frac{l}{k} \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} = \underline{0}$$

$$l \overrightarrow{PA} + k \overrightarrow{PB} = \underline{0}$$

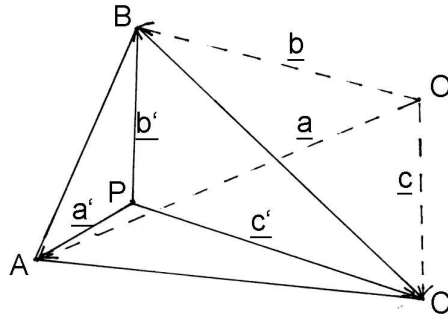
$$l(\underline{a} - \underline{p}) + k(\underline{b} - \underline{p}) = \underline{0}$$

$$\underline{p} = \frac{l\underline{a} + k\underline{b}}{k + l}$$

Ha P pont éppen B -be esik, $l = 0$ lesz, visszakapjuk \underline{a} vektort.

Ha a pont kívül esik a szakaszon, pl. A -n, k negatív érték lesz.

-Síkban: A , B és C pont által meghatározott sík pontjainak koordinátái \underline{a} , \underline{b} és \underline{c} helyvektorok segítségével.



2. ábra

$$\underline{c}' = \alpha \underline{a}' + \beta \underline{b}'$$

Szorozzuk meg az egyenletet vektoriálisan \underline{b}' vektorral!

$$\underline{c}' \times \underline{b}' = \alpha \underline{a}' \times \underline{b}'$$

A két vektor ellentétes irányú, nagyságuk T_a ill. T_c . (Jelölje pl. T_a a PBC_{Δ} területét.) Tehát:

$$\alpha = -\frac{T_a}{T_c}$$

Szorozzuk meg az eredeti egyenletet vektoriálisan \underline{a}' -ral!

$$\underline{c}' \times \underline{a}' = \beta \underline{b}' \times \underline{a}'$$

$$\beta = -\frac{T_b}{T_c}$$

Tehát: $\underline{c}' = -\frac{T_a}{T_c} \underline{a}' + -\frac{T_b}{T_c} \underline{b}'$

Ebből: $T_a \underline{a}' + T_b \underline{b}' + T_c \underline{c}' = \underline{0}$

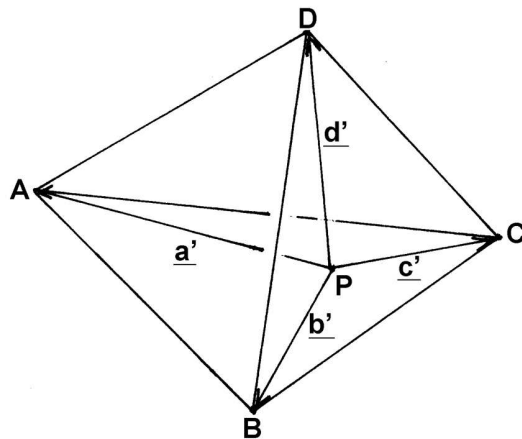
Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{p}$ helyvektorokat használva: $T_a(\underline{a} - \underline{p}) + T_b(\underline{b} - \underline{p}) + T_c(\underline{c} - \underline{p}) = \underline{0}$, amiből:

$$\underline{p} = \frac{T_a \underline{a} + T_b \underline{b} + T_c \underline{c}}{T_a + T_b + T_c}$$

Ha P pont az AB egyenesen van, akkor nem \underline{c} -t fejezzük ki, hanem valamelyik másikat, ekkor hasonló a kifejezés, csak $T_c = 0$.

Ha P pont pl. az AB egyenesnek C -vel ellentétes oldalán van, T_c negatív lesz.

-Térben: A tér pontjainak koordinátái $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ és \underline{d} helyvektorok segítségével.



3. ábra

$$\underline{d}' = \alpha \underline{a}' + \beta \underline{b}' + \gamma \underline{c}'$$

Szorozzuk meg az egyenletet skalárisan $\underline{b}' \times \underline{c}'$, $\underline{c}' \times \underline{a}'$ ill. $\underline{a}' \times \underline{b}'$ vektorokkal!

Ezekből:

$$\begin{aligned}\underline{d}' \underline{c}' \underline{b}' &= \underline{a}' \underline{b}' \underline{c}' \\ \underline{d}' \underline{c}' \underline{a}' &= \underline{b}' \underline{c}' \underline{a}' \\ \underline{d}' \underline{a}' \underline{b}' &= \underline{c}' \underline{a}' \underline{b}'\end{aligned}$$

Ahonnán:

$$\alpha = -\frac{V_a}{V_d}, \quad \beta = -\frac{V_b}{V_d}, \quad \gamma = -\frac{V_c}{V_d}$$

Ahol V_a pl. a $PBCD$ tetraéder térfogatát jelenti. A negatív előjel a két vegyszorzat ellentétes előjeléből adódik. Behelyettesítve az első egyenletbe:

$$V_a \underline{a}' + V_b \underline{b}' + V_c \underline{c}' + V_d \underline{d}' = \underline{0}$$

Áttérve helyvektorokra hasonlóan az előzőekhez:

$$\underline{p} = \frac{V_a \underline{a} + V_b \underline{b} + V_c \underline{c} + V_d \underline{d}}{V_a + V_b + V_c + V_d}$$

Ha P pont valamelyik lapsíkon van, a megfelelő térfogat 0-vá válik.

Ha a pont pl. a ABC sík D -vel ellentétes oldalára esik, V_d negatív lesz.

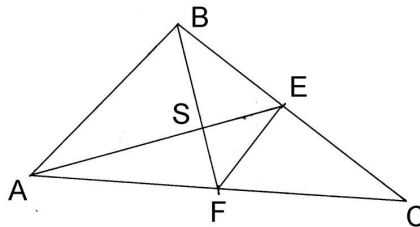
Súlypont

A súlypont (tömegközéppont) jelentése a fizikában 1-, 2-, 3 dimenzióban: azonos hosszúságú-, területű-, térfogatú részekre osztja a szakaszt, háromszöget, tetraédert.

Matematikában:

A háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át és harmadolják egymást.

Bizonyítás elemi úton:



4. ábra

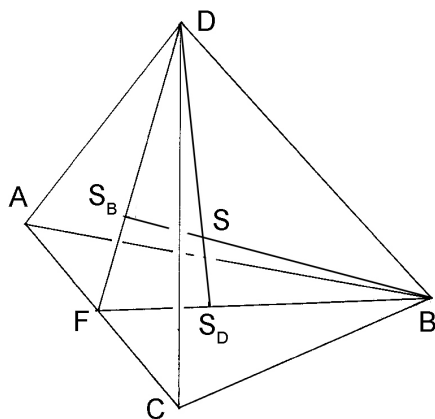
EF középvonal az ABC_{Δ} -ben, tehát párhuzamos és feleakkora, mint AB . Így $ASB_{\Delta} \sim ESF_{\Delta}$, arányuk 1:2, tehát S harmadolja mindkét súlyvonalat. Hasonlóan a harmadik súlyvonal harmadoló pontja is ebbe a közös harmadoló pontba esik.

Bizonyítás vektorokkal:

F pont helyvektora $\underline{f} = \frac{\underline{a} + \underline{c}}{2}$, FB szakasz harmadoló pontjának helyvektora $\underline{s} = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{3}$, ugyanígy tetszőleges súlyvonal harmadoló pontja ez a pont, tehát a súlyvonalak egy pontban metszik egymást. Egyszerű belegondolni, hogy a súlypontot a csúcsokkal összekötő szakaszok három egyforma területű részre osztják a háromszöget, és több ilyen pont nincs a háromszögben.

A tetraéder súlyvonalai egy ponton mennek át és negyedelik egymást.

Bizonyítás elemi úton:



5. ábra

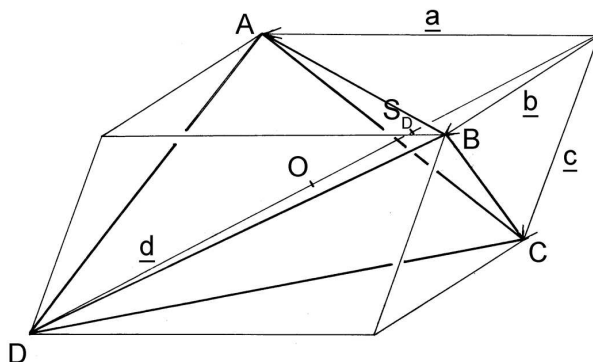
Nézzük az FBD_{Δ} -et! S_D és S_B az oldalháromszögek súlypontja, tehát mindkét pont harmadoló pont, így a párhuzamos szelők tétele miatt $S_B S_D$ párhuzamos DB -vel és a harmada. $B S_B$ és $D S_D$ nyilván metszik egymást S -ben. Mivel $S S_B S_D \Delta \sim S D B \Delta$, ezért a súlyvonalak negyedelik egymást.

Bizonyítás vektorokkal:

Hasonlóan a háromszöghöz $\underline{s}_D = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{3}$, $D S_D$ szakasz negyedelő pontjának helyvektora $\underline{s} = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}}{4}$, ugyanígy tetszőleges súlyvonal negyedelő pontja ez a pont, tehát a súlyvonalak egy pontban metszik egymást.

Egyszerű belegondolni, hogy a súlypontot a csúcsokkal összekötő szakaszok négy egyforma térfogatú részre osztják a tetraédert, és több ilyen pont nincs a tetraéderben.

Bizonyítás körülírt paralelepipedon segítségével:



6. ábra

$\underline{s}_D = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{3}$, $\underline{d} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, tehát a tetraéder súlyvonala a testátlóra esik.

$\underline{o} = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{2}$, tehát $S_D O = \frac{O D}{3} = \frac{S_D D}{4}$, azaz a súlyvonal negyedelő pontja a paralelepipedon középpontja. Ugyanígy a többi súlyvonalra, tehát a súlyvonalak metszéspontja a paralelepipedon középpontja.

Körök, gömbök

A háromszögnek létezik köré írt köre.

Bizonyítás:

AB oldalfelező merőlegesének és AC oldalfelező merőlegesének létezik O metszéspontja. $OA = OB$, ill. $OA = OC$, tehát $OB = OC$, azaz O rajta van BC felező merőlegesén is, és azonos távolságban van a három csúcstól, tehát a köré írt kör középpontja.

A tetraédernek létezik köré írt gömbje.

Bizonyítás:

AB oldalfelező merőleges síkjának és AC oldalfelező merőleges síkjának létezik m metszésvonala. m minden M pontjára $MA = MB$, ill. $MA = MC$, tehát $MB = MC$, azaz m rajta van BC felező merőleges síkján is, és azonos távolságban van a három csúcstól. DA felező merőleges síkjának és m -nek létezik O metszéspontja. O egyenlő távolságra van minden csúcstól, tehát rajta van minden oldalfelező merőleges síkon, és ő a köré írt gömb középpontja.

A köré írt gömb és egy oldallap síkjának metszete az oldallap köré írt köre.

A háromszögnek létezik beírt köre.

Bizonyítás:

Hasonlóan az előzőhöz, csak belső szögfelezővel.

A tetraédernek létezik beírt gömbje.

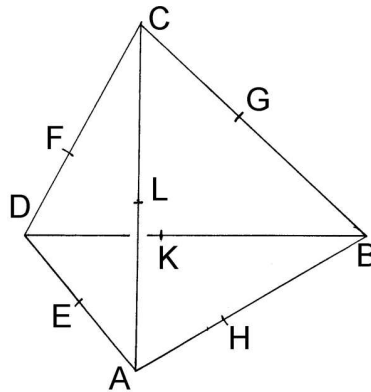
Bizonyítás:

Hasonlóan az előzőhöz, csak lapszög felező síkkal.

A beírt gömb és egy oldallap síkjának metszete az oldallapnak nem jellegzetes pontja.

Más általánosítás: *A tetraédernek akkor és csak akkor létezik érintő gömbje, ha a szemközti élek összege állandó.*

Bizonyítás:



7. ábra

Csak akkor irány: A, B, C , és D pontokból érintőket húzunk a gömbhöz, így az érintő szakaszok egyenlőek. Pl.: $AE = AL = AH$. Így összesen négyféle érintőszakasz keletkezik. A szemközti oldalak összege ezen négy szakasz összege.

Akkor irány: Bonyolult indirekt bizonyítás (Az előadáson nem volt.)

Az érintő gömb és egy oldallap síkjának metszete az oldallap beírt köre.

$$\text{Háromszögben } \rho = \frac{2 \cdot \text{terület}}{\text{kerület}}.$$

Bizonyítás:

A beírt kör középpontját kössük össze a csúcsokkal. Így a háromszöget 3 háromszögre bontottuk, melyek magassága ρ . A kis háromszögek együttes területe a háromszög területe, ebből következik az állítás.

$$\text{Tetraéderben } \rho = \frac{3V}{A}.$$

Bizonyítás:

A beírt gömb középpontját kössük össze a csúcsokkal. Így a tetraédert 4 tetraéderre bontottuk, melyek magassága ρ . A kis tetraéderek együttes térfogata a tetraéder térfogata, ebből következik az állítás.

A fentiek alapján (a térfogatokban szereplő $\frac{1}{3}\rho$ -val való egyszerűsítés után)

A beírt gömb középpontjának helyvektora:

$$\underline{o} = \frac{T_a \underline{a} + T_b \underline{b} + T_c \underline{c} + T_d \underline{d}}{T_a + T_b + T_c + T_d}$$

Háromszögben $\rho \leq \frac{r}{2}$.

Bizonyítás:

A háromszög oldalfelező pontjai által alkotott háromszöget az eredetiből úgy kapjuk, hogy a súlypontból a $-\frac{1}{2}$ -szeresére kicsinyítjük. A kis háromszög köré írt körének sugara $\frac{r}{2}$, a kör érinti vagy metszi az oldalakat, ebből következik az állítás.

Tetraéderben $\rho \leq \frac{r}{3}$.

Bizonyítás:

A tetraéder lapjainak súlypontjai által alkotott tetraédert az eredetiből úgy kapjuk, hogy a súlypontból a $-\frac{1}{3}$ -szorosára kicsinyítjük. A kis tetraéder köré írt gömbjének sugara $\frac{r}{3}$, a gömb érinti vagy metszi az oldallapokat, ebből következik az állítás.

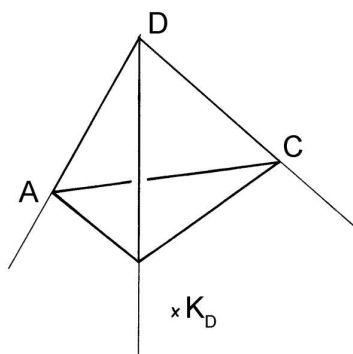
Háromszögben egy belső és két külső szögfelező egy pontban metszi egymást, ez adja a három hozzáírt kör középpontját.

Bizonyítás:

Ugyanúgy, mint a beírt körnél.

A tetraéder három belső és három külső lapszögfelező síkja egy ponton megy keresztül, ez adja a négy hozzáírt gömb középpontját.

Bizonyítás:



8. ábra

Ugyanúgy, mint a beírt gömbnél.

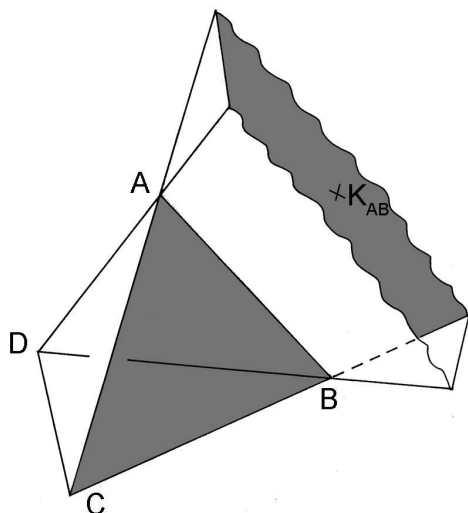
A hozzáírt gömb középpontjának helyvektora pl.:

$$\underline{o}_D = \frac{T_a \underline{a} + T_b \underline{b} + T_c \underline{c} - T_d \underline{d}}{T_a + T_b + T_c - T_d}$$

A vektor nyilván létezik, hisz a nevező nem lehet nulla. T_d negatív előjelet kap, hisz K_D pont az ABC sík D -vel ellentétes oldalán van.

A tetraédernek lehet legfeljebb három olyan gömbje, mely két lapot belülről, kettőt kívülről érint.

Bizonyítás:



9. ábra

Pl. az ADC és BDC lapokat belülről, az ABC és ABD lapokat kívülről érintő gömb az AB vagy a DC élhez kapcsolódó „vályú”-ban lehet. Az AB és CD élre illeszkedő belső szögfelező síkok metszévonalára vagy metszi, vagy párhuzamos az AC és BD élre illeszkedő külső szögfelező síkok metszévonalával. Tehát legfeljebb 1 közös pont van, a két szemköztes vályú valamelyikében. (Szabályos tetraédernél pl. a két metszévonal párhuzamos.) Térkoordinátákat használva :

A külső érintő gömb középpontjának helyvektora:

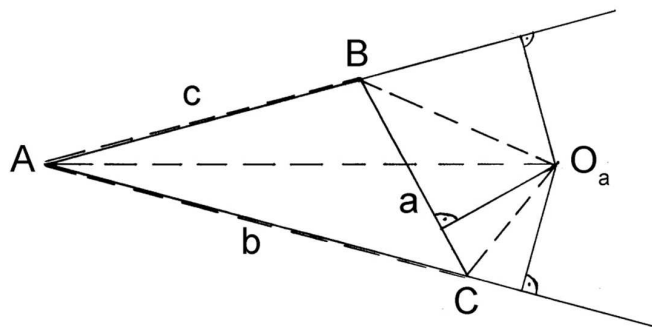
$$\underline{o_{AB}} = \frac{T_a \underline{a} + T_b \underline{b} - T_c \underline{c} - T_d \underline{d}}{T_a + T_b - T_c - T_d}$$

A negatív előjelek a külső érintést mutatják. Nyilván ez a középpont akkor és csak akkor létezik, ha $T_a + T_b \neq T_c + T_d$

A háromszög hozzáírt körének sugara:

$$\rho_a = \frac{2T}{-a+b+c}$$

Bizonyítás:



10. ábra

Az ábra alapján $T_{ABO} + T_{ACO} - T_{BCO} = T_{ABC}$, tehát $\frac{c\rho_a}{2} + \frac{b\rho_a}{2} - \frac{a\rho_a}{2} = T$, amiből következik az állítás.

A tetraéder hozzáírt gömbjének sugara:

$$\rho_A = \frac{3V}{-T_a + T_b + T_c + T_d}$$

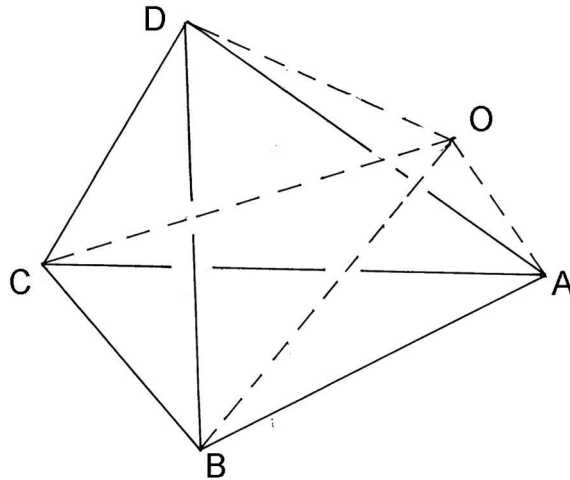
Bizonyítás:

Hasonlóan a háromszöghöz, $V_{ABCO} + V_{ACDO} + V_{ADBO} - V_{BCDO} = V_{ABCD}$, amiből következik az állítás.

A tetraéder külső érintő gömbjének sugara:

$$\rho_{AB} = \frac{3V}{T_a + T_b - T_c - T_d}$$

Bizonyítás:



11. ábra

Az előzőekhez hasonlóan $V_{BCDO} + V_{ACDO} - V_{ABCO} - V_{ABDO} = V_{ABCD}$, amiből következik az állítás.

Magasságpont

A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást

Bizonyítás elemi úton:

A háromszöget a súlypontjából -2-szeresére nagyítjuk. A keletkezett háromszög oldalfelező merőlegesei az eredetinek magasságai, tehát ezek is egy ponton mennek át.

Bizonyítás vektorokkal:

Legyen M pont az m_a és m_c metszéspontja. A merőlegesség miatt a helyvektorokra igaz, hogy $(\underline{a} - \underline{m})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$ és $(\underline{c} - \underline{m})(\underline{a} - \underline{b}) = 0$. Összeadva kapjuk, hogy $(\underline{b} - \underline{m})(\underline{a} - \underline{c}) = 0$, azaz m_b is átmegy M ponton.

Tetraédernél?

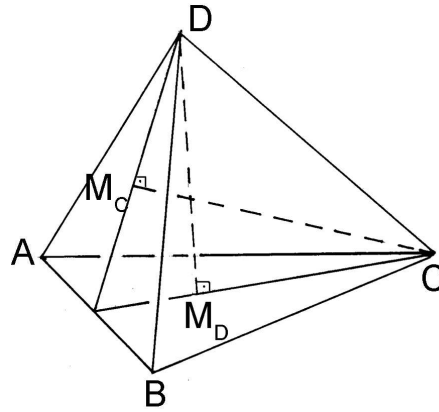
Két magasság nem feltétlen metszi egymást.

A magasság talppontja nem feltétlen a háromszög magassága.

De:

CM_C és DM_D magasságok akkor és csak akkor metszik egymást, ha $DC \perp AB$.

Bizonyítás:



12. ábra

Ha metszi egymást a két magasság, akkor egy síkot határoznak meg, és $DM_D \perp AB$, $CM_C \perp AB$, tehát $DCM_D M_C$ sík $\perp AB$, azaz $DC \perp AB$. Ugyanígy pl. $CM_D \perp AB$, tehát magasság lesz az ABC háromszögben.

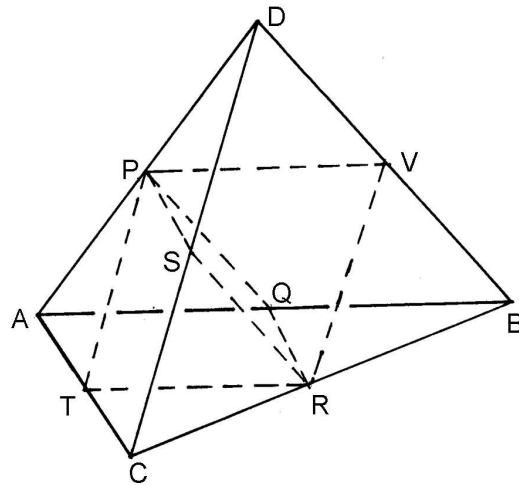
Visszafelé: $DC \perp AB$ és $DM_D \perp AB$ (hiszen az ABC síkra \perp), tehát DCM_D sík $\perp AB$. Ugyanígy DCM_C sík $\perp AB$, tehát a két sík azonos, így a két magasság metszi egymást.

Ha a tetraéderben 2 szemköztes él pár merőleges, akkor a harmadik pár is merőleges.

Bizonyítás I :

Legyen $AB \perp DC$ és $AC \perp BD$. Az előző bizonyítás alapján M_D magasságpont ABC háromszögben. Így $AM_D \perp BC$ és $DM_D \perp BC$, tehát ADM_D sík $\perp AB$, azaz $AD \perp BC$.

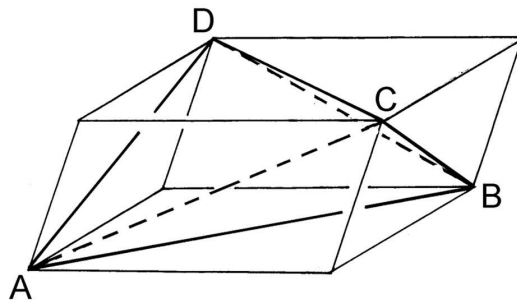
Bizonyítás II :



13. ábra

Legyenek P, Q, R, S, T, V oldalfelező pontok. $AC \perp BD$, így $PQRS$ téglalap (középvonalak) tehát $PR = QS$. Ugyanígy $CD \perp AB$, így $PVRT$ téglalap, tehát $PR = TV$. Ezekből $QS = TV$ a $QTSV$ paralelogrammában, tehát egy téglalap. Így $AD \perp CB$.

Bizonyítás III :



14. ábra

$AB \perp CD$ így az alsó és felső paralelogramma átlói merőlegesek, tehát rombuszok. Ugyanígy $BC \perp AD$, így az oldalsók is rombuszok, tehát minden oldal egyenlő, azaz az első – hátsó lap is rombusz, aminek átlói merőlegesek, tehát $BD \perp AC$.

Bizonyítás helyvektorokkal :

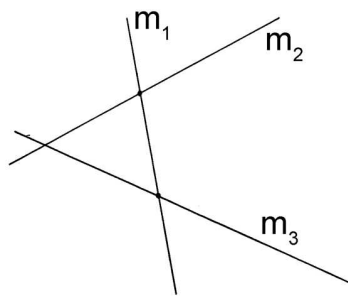
$AB \perp CD$, acsa, ha $(\underline{a} - \underline{b})(\underline{c} - \underline{d}) = 0$

$BC \perp AD$, acsa, ha $(\underline{a} - \underline{d})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$, összeadva:

$(\underline{a} - \underline{c})(\underline{b} - \underline{d}) = 0$, acsa, ha $AC \perp BD$

Ha bármely két magasság metszi egymást, akkor egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás :



15. ábra

m_1 -et metszi m_2 és m_3 . Ha egymást is metszik, akkor vagy egy síkban van mindhárom, ami lehetetlen, vagy egy ponton mennek át.

Definíció:

ORTOCENTRIKUS tetraéder, aminek van magasságpontja, vagy aminek szemköztes élei merőlegesek.

Egy háromszögben az A, B, C és M pontok közül bármelyik 3 alkotta háromszögben a negyedik a magasságpont.

Egy ortocentrikus tetraéderben az A, B, C, D és M pontok közül bármelyik 4 alkotta tetraéderben az ötödik a magasságpont.

Bizonyítás :

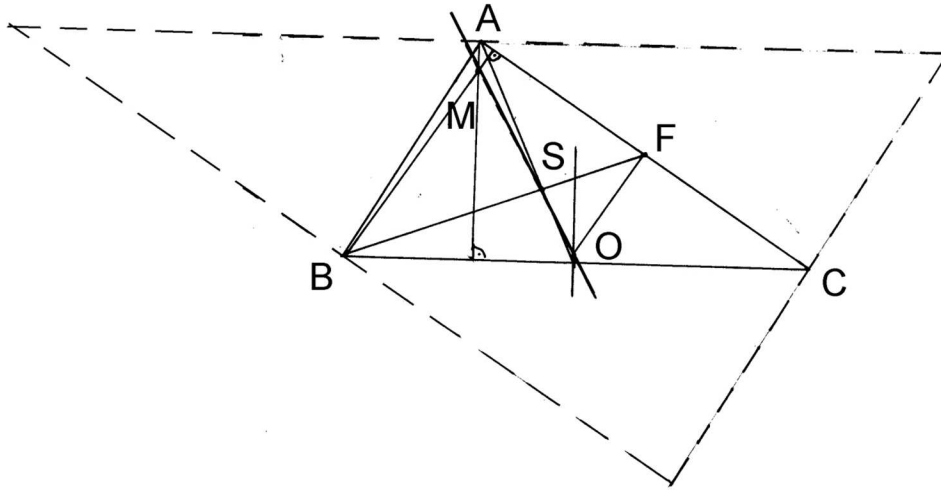
Az élek és magasságok merőlegességéből egyértelműen következik.

Euler egyenes

Háromszögben a magasságpont, súlypont és a körülírt kör középpontja egy egyenesre esik.

$$\frac{SO}{SM} = \frac{1}{2}$$

Bizonyítás elemi úton:



16. ábra

Nagyítsuk S -ből a háromszöget a -2 -szeresére. A kis háromszög oldalfelező merőlegeseiből a nagy háromszög oldalfelező merőlegesei lesznek, amik egyben a kis háromszög magasságai. Tehát S -ből ha O -t -2 -szeresére nagyítjuk, M -et kapjuk. Ez pedig az állítás.

Bizonyítás vektorokkal:

Legyen O pont a helyvektorok kezdőpontja, így $|\underline{a}| + |\underline{b}| + |\underline{c}| = r$.

$\underline{s} = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{3}$ Legyen $\underline{m} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$. Belátjuk, hogy ez a magasságpont helyvektora, tehát pl. $AM \perp BC$, azaz $\underline{m} - \underline{a} \perp \underline{b} - \underline{c}$, azaz $(\underline{m} - \underline{a})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$.

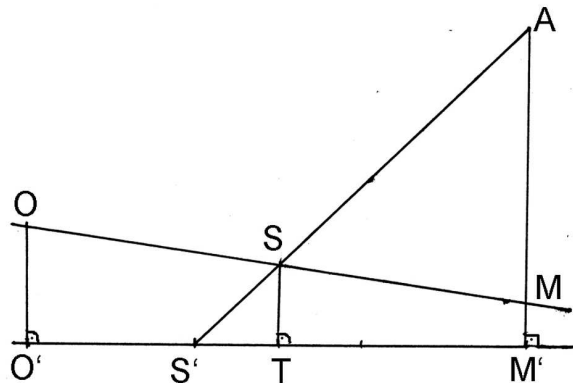
Mivel $\underline{a} - \underline{m} = -\underline{b} - \underline{c}$, ezért ez $(b+c)(b-c) = 0$ teljesülését jelenti. Ez pedig teljesül, mert $|b| = |c|$.

Ortocentrikus tetraéderben a magasságpont, a súlypont és a körülírt gömb középpontja egy egyenesre esik. $SO = SM$.

Bizonyítás elemi úton:

(Nem analóg a síkbelivel, hisz a súlyvonal talppontja nem a körülírt kör középpontja.)

Minden lapon állítsunk a síkra merőleges síkot az Euler egyenesre. Ebben a síkban van a tetraéder O, S és M pontja. Tehát a síkoknak van közös metszésvonala, amin rajta van a három pont.



17. ábra

Vetítsük a súlypontot a lap Euler egyenesére (T). $\frac{S'S}{SA} = \frac{S'T}{TM'} = \frac{1}{3}$ és $\frac{O'S'}{S'M'} = \frac{1}{2}$, amiből $O'T = TM'$ így $OS = SM$.

Bizonyítás vektorokkal:

Teljesen analóg módon:

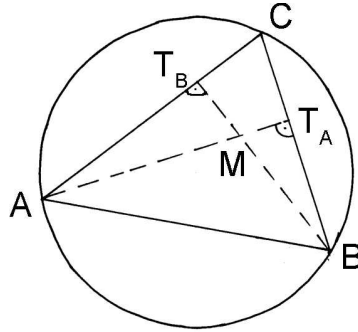
Legyen O pont a helyvektorok kezdőpontja, így $|\underline{a}| + |\underline{b}| + |\underline{c}| + |\underline{d}| = r$.

$\underline{s} = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}}{4}$ Legyen $\underline{m} = 2\underline{s} = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}}{2}$. Belátjuk, hogy ez a magasságpont helyvektora, tehát pl. $AM \perp BCD$ sík, azaz $\underline{m} - \underline{a} \perp \underline{b} - \underline{c}$, és $\underline{m} - \underline{a} \perp \underline{c} - \underline{d}$, azaz $(\underline{m} - \underline{a})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$ és $(\underline{m} - \underline{a})(\underline{c} - \underline{d}) = 0$. Mivel $\underline{m} - \underline{a} = \frac{-\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}}{2}$, ezért ez $(\frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}}{2})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$ teljesülését jelenti. Ez pedig teljesül, mert $|\underline{b}| = |\underline{c}|$, így $(\underline{b} + \underline{c})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$ és $DA \perp BC$, mert szemközti élek, így $(\underline{d} - \underline{a})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$. Hasonlóan igaz a $(\underline{m} - \underline{a})(\underline{c} - \underline{d}) = 0$ egyenlőség is.

Feuerbach kör, gömb

Egy háromszög oldalfelező pontjai, magasságtalppontjai, és a magasságot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körön vannak, melynek középpontja a körülírt kör középpontját a magasságponttal összekötő szakasz felezőpontja, sugara a körülírt kör sugarának fele.

Bizonyítás:



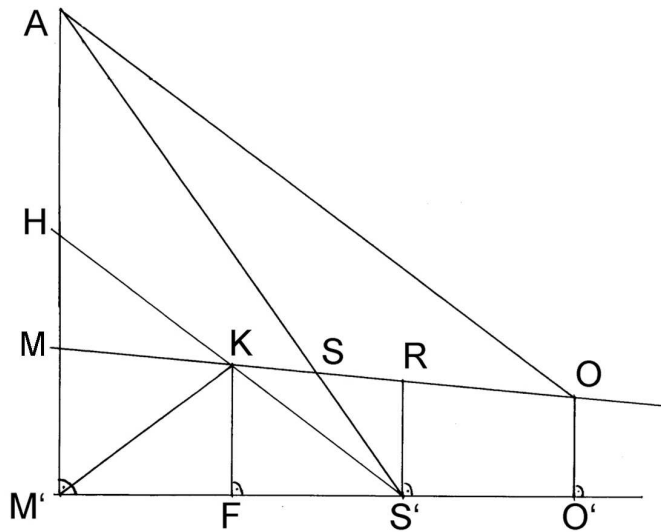
18. ábra

$\angle T_A M T_B = 180^\circ - \angle T_A C T_B$, ezért M pont oldalakra ill. oldalfelező pontokra vett tükörképe a körülírt körön van. Kicsinyítsük a körülírt kört M -ből a felére. Megkapjuk a Feuerbach kört, ami az előbbieket szerint rendelkezik az összes a tételben kimondott tulajdonsággal.

(Korábban beláttuk, hogy a Feuerbach kör sugara $\geq \rho$.)

Egy ortocentrikus tetraéder lapjainak súlypontjai, magasságainak talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok M -hez közelebbi harmadolópontjai egy gömbön, az I. Feuerbach gömbön vannak, melynek középpontja a körülírt gömb középpontját a magasságponttal összekötő szakasz M -hez közelebbi harmadolópontja, sugara a körülírt gömb sugarának harmada.

Bizonyítás:



19. ábra

Vegyük fel az A csúcson és a szemközti lap Euler egyenesén áthaladó síkot, ez az előbbiek alapján tartalmazza az M, S, O pontokat.

Tudjuk, hogy $M'S' = 2S'O'$, K pont az MO harmadolópontja, így K pontról kell belátnunk, hogy a Feuerbach gömb középpontja. R a tetraéder Euler egyenesének az a pontja, melynek vetülete S' . $AMS_{\Delta} \sim S'RS_{\Delta}$, arányuk $\frac{2}{1}$, így $HM = RS'$, tehát $MHK_{\Delta} \cong RS'K_{\Delta}$. Innen $HK = KS'$. F az $M'S'$ szakasz felezőpontja, így $M'K = S'K = HK$. $HMK_{\Delta} \sim AMO_{\Delta}$, arányuk $\frac{1}{3}$, így $OA = 3KH = 3KS' = 3KM'$. Ezzel a Feuerbach gömb minden tulajdonságát beláttuk.

A Feuerbach gömb és egy oldallap síkjának metszete a háromszög Feuerbach köre.

Az ortocentrikus tetraéder éleinek felezőpontjai egy gömbön, a II. Feuerbach gömbön vannak.

Bizonyítás:

A 13. ábrán már bebizonyítottuk az állítást, hisz az ott szereplő téglalapok átlói egyenlőek, középpontjuk egybeesik.

Még néhány analóg állítás

(A táborban nem hangzottak el.)

Háromszögben a magasságok reciprokának összege egyenlő a beírt kör sugarának reciprokával.

Tetraéderben a magasságok reciprokának összege egyenlő a beírt gömb sugarának reciprokával.

Háromszögben a hozzáírt körök sugarának reciprokösszege egyenlő a beírt kör sugarának reciprokával.

Tetraéderben a hozzáírt gömbök sugarának reciprokösszege egyenlő a beírt gömb sugarának reciprokával.

$$\begin{aligned} \text{Háromszögben } \frac{1}{\rho_A} &= -\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} \\ \text{Tetraéderben } \frac{1}{\rho_A} &= -\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} + \frac{1}{m_D} \end{aligned}$$

Szögfelező tétel:

Háromszögben a belső szögfelező a szemközti oldalt a szöget bezáró két oldal arányában osztja ketté.

Tetraéderben a belső lapszögfelező sík a szemközti élt a lapszöget bezáró lapok területének arányában osztja ketté.

Háromszög belsejében felvett pont oldalaktól mért távolsága d_i , ekkor $\frac{d_A}{m_A} + \frac{d_B}{m_B} + \frac{d_C}{m_C} = 1$

Tetraéder belsejében felvett pont oldalaktól mért távolsága d_i , ekkor $\frac{d_A}{m_A} + \frac{d_B}{m_B} + \frac{d_C}{m_C} + \frac{d_D}{m_D} = 1$

Háromszög C csúcsából induló s_c súlyvonal négyzetét megkapjuk, ha a C -ből induló oldalak négyzetösszegének $\frac{1}{2}$ részéből kivonjuk a szemközti oldal négyzetének $\frac{1}{4}$ részét.

Tetraéder D csúcsából induló s_c súlyvonal négyzetét megkapjuk, ha a D -ből induló élek négyzetösszegének $\frac{1}{3}$ részéből kivonjuk a szemközti lapot határoló élek négyzetösszegének $\frac{1}{9}$ részét.

Háromszögben a súlyvonalak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegének $\frac{3}{4}$ részével.

Tetraéderben a súlyvonalak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegének $\frac{4}{9}$ részével.

Háromszögben $\rho \leq \frac{m_a+m_b+m_c}{9}$ és $\rho \leq \frac{\rho_a+\rho_b+\rho_c}{9}$

Tetraéderben $\rho \leq \frac{m_a+m_b+m_c+m_d}{16}$ és $\rho \leq \frac{\rho_a+\rho_b+\rho_c+\rho_d}{16}$

Háromszögben a súlyvonalak összege nem nagyobb az oldalak négyzetösszegéből vont négyzetgyök $\frac{3}{2}$ részénél.

Tetraéderben a súlyvonalak összege nem nagyobb az élek négyzetösszegéből vont négyzetgyök $\frac{4}{3}$ részénél.

Háromszögben a súlypontot a csúcsokkal összekötő szakaszok négyzetének összege az oldalak négyzetösszegének $\frac{1}{3}$ részével egyenlő.

Tetraéderben a súlypontot a csúcsokkal összekötő szakaszok négyzetének összege az oldalak négyzetösszegének $\frac{1}{4}$ részével egyenlő.