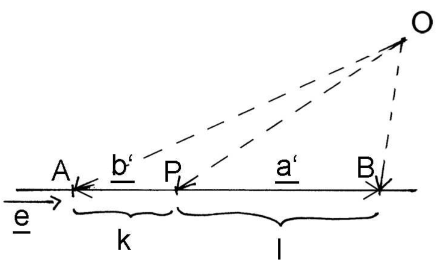
# Gál Györgyné: Háromszög-tetraéder analógiák

## Szükséges előzmények

Vektorok skaláris szorzata, vektoriális szorzata, vegyesszorzata.
Ezek szemléletes geometriai jelentése.

## Koordináták

- Egyenes mentén: $A$ és $B$ pont által meghatározott egyenes pontjainak koordinátái $\underline{a}$ és $\underline{b}$ helyvektorok segítségével.




1. *ábra*

$$\overrightarrow{PB} = \alpha \overrightarrow{PA}$$

Szorozzuk meg az egyenletet skalárisan $\underline{e}$ egységvektorral!

$$l = -\alpha k$$

$$\alpha = -\frac{l}{k}$$

$$-\frac{l}{k}\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} = \underline{0}$$

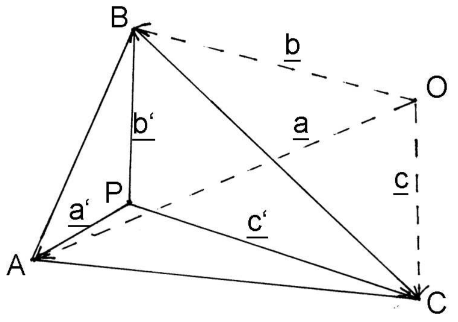
$$l\overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{PB} = \underline{0}$$

$$l(\underline{a} - \underline{p}) + k(\underline{b} - \underline{p}) = \underline{0}$$

$$\underline{p} = \frac{l\underline{a} + k\underline{b}}{k + l}$$

Ha $P$ pont éppen $B$-be esik, $l = 0$ lesz, visszakapjuk $\underline{a}$ vektort.
Ha a pont kívül esik a szakaszon, pl. $A$-n, $k$ negatív érték lesz.

-Síkban: A, B és C pont által meghatározott sík pontjainak koordinátái $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ helyvektorok segítségével.




2. *ábra*

$$\underline{c}' = \alpha\underline{a}' + \beta\underline{b}'$$

Szorozzuk meg az egyenletet vektoriálisan $\underline{b}'$ vektorral!

$$\underline{c}' \times \underline{b}' = \alpha\underline{a}' \times \underline{b}'$$

A két vektor ellentétes irányú, nagyságuk $T_a$ ill. $T_c$. (Jelölje pl. $T_a$ a $PBC_\Delta$ területét.) Tehát:

$$\alpha = -\frac{T_a}{T_c}$$

Szorozzuk meg az eredeti egyenletet vektoriálisan $\underline{a}'$ –ral!

$$\underline{c}' \times \underline{a}' = \beta\underline{b}' \times \underline{a}'$$

$$\beta = -\frac{T_b}{T_c}$$

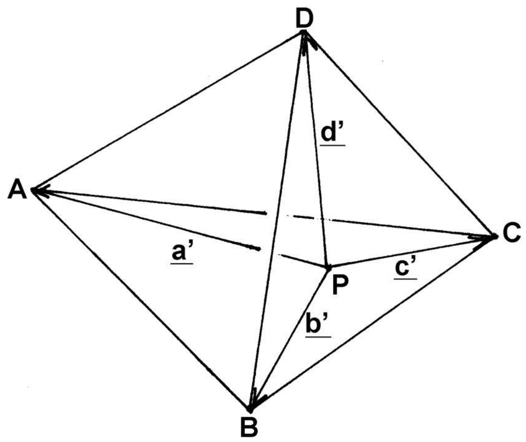
Tehát: $\underline{c}' = -\frac{T_a}{T_c}\underline{a}' + -\frac{T_b}{T_c}\underline{b}'$

Ebből: $T_a\underline{a}' + T_b\underline{b}' + T_c\underline{c}' = \underline{0}$

Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{p}$ helyvektorokat használva: $T_a(\underline{a} - \underline{p}) + T_b(\underline{b} - \underline{p}) + T_c(\underline{c} - p) = \underline{0}$, amiből:

$$\underline{p} = \frac{T_a\underline{a} + T_b\underline{b} + T_c\underline{c}}{T_a + T_b + T_c}$$

Ha $P$ pont az $AB$ egyenesen van, akkor nem $\underline{c}$-t fejezzük ki, hanem valamelyik másikat, ekkor hasonló a kifejezés, csak $T_c = 0$.
Ha $P$ pont pl. az $AB$ egyenesnek $C$-vel ellentétes oldalán van, $T_c$ negatív lesz.
-Térben: A tér pontjainak koordinátái $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ és $\underline{d}$ helyvektorok segítségével.




3. *ábra*

$\underline{d}' = \alpha\underline{a}' + \beta\underline{b}' + \gamma\underline{c}'$

Szorozzuk meg az egyenletet skalárisan $\underline{b'} \times \underline{c'}, \underline{c'} \times \underline{a'}$ ill. $\underline{a'} \times \underline{b'}$ vektorokkal!

Ezekből:

$$\begin{aligned} \underline{d'}\,\underline{c'}\,\underline{b'} &= \underline{a'}\,\underline{b'}\,\underline{c'} \\ \underline{d'}\,\underline{c'}\,\underline{a'} &= \underline{b'}\,\underline{c'}\,\underline{a'} \\ \underline{d'}\,\underline{a'}\,\underline{b'} &= \underline{c'}\,\underline{a'}\,\underline{b'} \end{aligned}$$

Ahonnan:

$$\alpha = -\frac{V_a}{V_d}, \quad \beta = -\frac{V_b}{V_d}, \quad \gamma = -\frac{V_c}{V_d}$$

Ahol $V_a$ pl. a $PBCD$ tetraéder térfogatát jelenti. A negatív előjel a két vegyesszorzat ellentétes előjeléből adódik. Behelyettesítve az első egyenletbe:

$$V_a\underline{a'} + V_b\underline{b'} + V_c\underline{c'} + V_d\underline{d'} = \underline{0}$$

Áttérve helyvektorokra hasonlóan az előzőekhez:

$$\underline{p} = \frac{V_a\underline{a} + V_b\underline{b} + V_c\underline{c} + V_d\underline{d}}{V_a + V_b + V_c + V_d}$$

Ha $P$ pont valamelyik lapsíkon van, a megfelelő térfogat 0-vá válik.
Ha a pont pl. a $ABC$ sík $D$-vel ellentétes oldalára esik, $V_d$ negatív lesz.

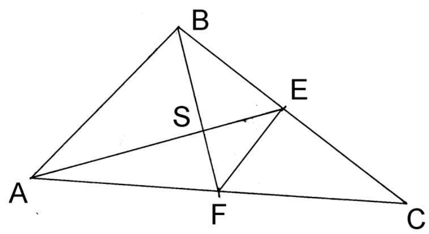
# Súlypont

A súlypont (tömegközéppont) jelentése a fizikában 1-, 2-, 3 dimenzióban: azonos hosszúságú-, területű-, térfogatú részekre osztja a szakaszt, háromszöget, tetraédert.

Matematikában:

*A háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át és harmadolják egymást.*

Bizonyítás elemi úton:




4. *ábra*

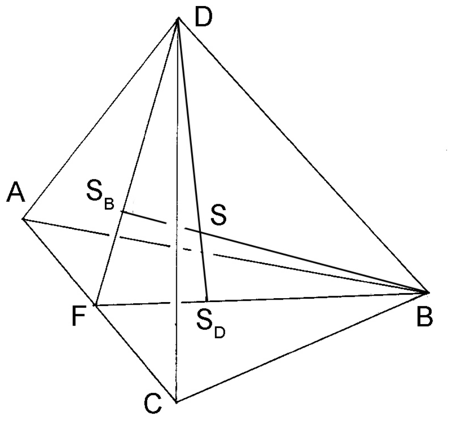
$EF$ középvonal az $ABC_\Delta$-ben, tehát párhuzamos és feleakkora, mint $AB$. Így $ASB_\Delta \sim ESF_\Delta$, arányuk 1:2, tehát $S$ harmadolja mindkét súlyvonalat. Hasonlóan a harmadik súlyvonal harmadoló pontja is ebbe a közös harmadoló pontba esik.

Bizonyítás vektorokkal:

$F$ pont helyvektora $\underline{f} = \frac{\underline{a}+\underline{c}}{2}$ , $FB$ szakasz harmadoló pontjának helyvektora $\underline{s} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}}{3}$, ugyanígy tetszőleges súlyvonal harmadoló pontja ez a pont, tehát a súlyvonalak egy pontban metszik egymást. Egyszerű belegondolni, hogy a súlypontot a csúcsokkal összekötő szakaszok három egyforma területű részre osztják a háromszöget, és több ilyen pont nincs a háromszögben.

*A tetraéder súlyvonalai egy ponton mennek át és negyedelik egymást.*

Bizonyítás elemi úton:



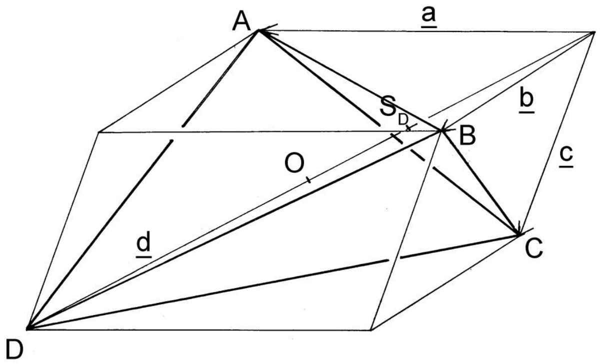

5. *ábra*

Nézzük az $FBD_\Delta$-et! $S_D$ és $S_B$ az oldalháromszögek súlypontja, tehát mindkét pont harmadoló pont, így a párhuzamos szelők tétele miatt $S_BS_D$ párhuzamos $DB$-vel és a harmada. $BS_B$ és $DS_D$ nyilván metszik egymást $S$-ben. Mivel $SS_BS_D\,_\Delta \sim SDB_\Delta$, ezért a súlyvonalak negyedelik egymást.

Bizonyítás vektorokkal:

Hasonlóan a háromszöghöz $\underline{s_D} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}}{3}$, $DS_D$ szakasz negyedelő pontjának helyvektora $\underline{s} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}}{4}$, ugyanígy tetszőleges súlyvonal negyedelő pontja ez a pont, tehát a súlyvonalak egy pontban metszik egymást.
Egyszerű belegondolni, hogy a súlypontot a csúcsokkal összekötő szakaszok négy egyforma térfogatú részre osztják a tetraédert, és több ilyen pont nincs a tetraéderben.

Bizonyítás körülírt paralelepipedon segítségével:




6. *ábra*

$\underline{s_D} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}}{3}$, $\underline{d} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, tehát a tetraéder súlyvonala a testátlóra esik.

$\underline{o} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}}{2}$, tehát $S_DO = \frac{OD}{3} = \frac{S_DD}{4}$, azaz a súlyvonal negyedelő pontja a paralelepipedon középpontja. Ugyanígy a többi súlyvonalra, tehát a súlyvonalak metszéspontja a paralelepipedon középpontja.

# Körök, gömbök

*A háromszögnek létezik köré írt köre.*

Bizonyítás:

$AB$ oldalfelező merőlegesének és $AC$ oldalfelező merőlegesének létezik $O$ metszéspontja. $OA = OB$, ill. $OA = OC$, tehát $OB = OC$, azaz $O$ rajta van $BC$ felező merőlegesén is, és azonos távolságban van a három csúcstól, tehát a köré írt kör középpontja.

*A tetraédernek létezik köré írt gömbje.*

Bizonyítás:

$AB$ oldalfelező merőleges síkjának és $AC$ oldalfelező merőleges síkjának létezik $m$ metszésvonala. $m$ minden $M$ pontjára $MA = MB$, ill. $MA = MC$, tehát $MB = MC$, azaz $m$ rajta van $BC$ felező merőleges síkján is, és azonos távolságban van a három csúcstól. $DA$ felező merőleges síkjának és $m$-nek létezik $O$ metszéspontja. $O$ egyenlő távolságra van minden csúcstól, tehát rajta van minden oldalfelező merőleges síkon, és ő a köré írt gömb középpontja.

A köré írt gömb és egy oldallap síkjának metszete az oldallap köré írt köre.

*A háromszögnek létezik beírt köre.*

Bizonyítás:

Hasonlóan az előzőhöz, csak belső szögfelezővel.

*A tetraédernek létezik beírt gömbje.*

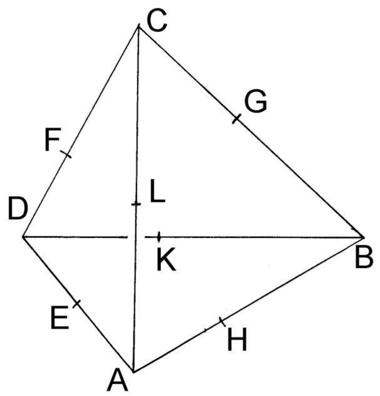
Bizonyítás:

Hasonlóan az előzőhöz, csak lapszög felező síkkal.

A beírt gömb és egy oldallap síkjának metszete az oldallapnak nem jellegzetes pontja.

Más általánosítás: *A tetraédernek akkor és csak akkor létezik élérintő gömbje, ha a szemközti élek összege állandó.*

Bizonyítás:




7. *ábra*

Csak akkor irány: $A, B, C$, és $D$ pontokból érintőket húzunk a gömbhöz, így az érintő szakaszok egyenlőek. Pl.: $AE = AL = AH$. Így összesen négyféle érintőszakasz keletkezik. A szemközti oldalak összege ezen négy szakasz összege.

Akkor irány: Bonyolult indirekt bizonyítás (Az előadáson nem volt.)

Az élérintő gömb és egy oldallap síkjának metszete az oldallap beírt köre.

*Háromszögben* $\rho = \frac{2 \cdot \text{terület}}{\text{kerület}}$.

Bizonyítás:

A beírt kör középpontját kössük össze a csúcsokkal. Így a háromszöget 3 háromszögre bontottuk, melyek magassága $\rho$. A kis háromszögek együttes területe a háromszög területe, ebből következik az állítás.

*Tetraéderben* $\rho = \frac{3V}{A}$.

Bizonyítás:

A beírt gömb középpontját kössük össze a csúcsokkal. Így a tetraédert 4 tetraéderre bontottuk, melyek magassága $\rho$. A kis tetraéderek együttes térfogata a tetraéder térfogata, ebből következik az állítás.

A fentiek alapján (a térfogatokban szereplő $\frac{1}{3}\rho$-val való egyszerűsítés után)

*A beírt gömb középpontjának helyvektora:*

$$\underline{o} = \frac{T_a\underline{a} + T_b\underline{b} + T_c\underline{c} + T_d\underline{d}}{T_a + T_b + T_c + T_d}$$

*Háromszögben* $\rho \leq \frac{r}{2}$.

Bizonyítás:

A háromszög oldalfelező pontjai által alkotott háromszöget az eredetiből úgy kapjuk, hogy a súlypontból a $-\frac{1}{2}$ - szeresére kicsinyítjük. A kis háromszög köré írt körének sugara $\frac{r}{2}$ , a kör érinti vagy metszi az oldalakat, ebből következik az állítás.

*Tetraéderben* $\rho \leq \frac{r}{3}$.

Bizonyítás:

A tetraéder lapjainak súlypontjai által alkotott tetraédert az eredetiből úgy kapjuk, hogy a súlypontból a $-\frac{1}{3}$-szorosára kicsinyítjük. A kis tetraéder köré írt gömbjének sugara $\frac{r}{3}$ , a gömb érinti vagy metszi az oldallapokat, ebből következik az állítás.

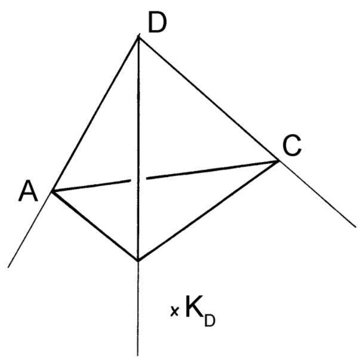
*Háromszögben egy belső és két külső szögfelező egy pontban metszi egymást, ez adja a három hozzáírt kör középpontját.*

Bizonyítás:

Ugyanúgy, mint a beírt körnél.

*A tetraéder három belső és három külső lapszögfelező síkja egy ponton megy keresztül, ez adja a négy hozzáírt gömb középpontját.*

Bizonyítás:




8. *ábra*

Ugyanúgy, mint a beírt gömbnél.

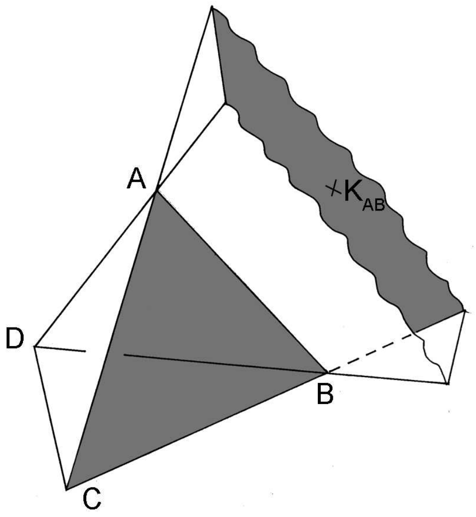
*A hozzáírt gömb középpontjának helyvektora pl.:*

$$\underline{o_D} = \frac{T_a\underline{a} + T_b\underline{b} + T_c\underline{c} - T_d\underline{d}}{T_a + T_b + T_c - T_d}$$

A vektor nyilván létezik, hisz a nevező nem lehet nulla. $T_d$ negatív előjelet kap, hisz $K_D$ pont az $ABC$ sík $D$-vel ellentétes oldalán van.

*A tetraédernek lehet legfeljebb három olyan gömbje, mely két lapot belülről, kettőt kívülről érint.*

Bizonyítás:




9. *ábra*

Pl. az $ADC$ és $BDC$ lapokat belülről, az $ABC$ és $ABD$ lapokat kívülről érintő gömb az $AB$ vagy a $DC$ élhez kapcsolódó ,,vályú"-ban lehet. Az $AB$ és $CD$ élre illeszkedő belső szögfelező síkok metszésvonala vagy metszi, vagy párhuzamos az $AC$ és $BD$ élekre illeszkedő külső szögfelező síkok metszés vonalával. Tehát legfeljebb 1 közös pont van, a két szemköztes vályú valamelyikében. (Szabályos tetraédernél pl. a két metszésvonal párhuzamos.) Térkoordinátákat használva :

*A külső érintő gömb középpontjának helyvektora:*

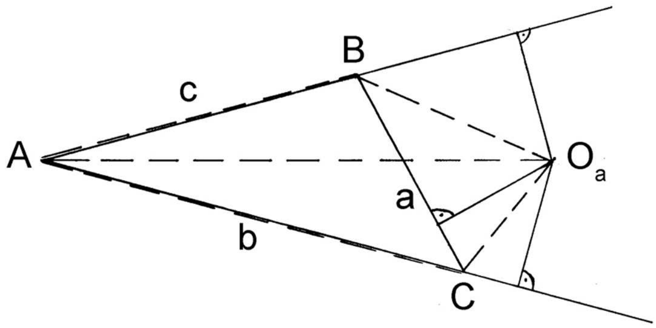
$$\underline{o_{AB}} = \frac{T_a\underline{a} + T_b\underline{b} - T_c\underline{c} - T_d\underline{d}}{T_a + T_b - T_c - T_d}$$

A negatív előjelek a külső érintést mutatják. Nyilván ez a középpont akkor és csak akkor létezik, ha $T_a + T_b \neq T_c + T_d$

*A háromszög hozzáírt körének sugara:*

$\rho_a = \frac{2T}{-a+b+c}$

Bizonyítás:




10. *ábra*

Az ábra alapján $T_{ABO} + T_{ACO} - T_{BCO} = T_{ABC}$, tehát $\frac{c\rho_a}{2} + \frac{b\rho_a}{2} - \frac{a\rho_a}{2} = T$, amiből következik az állítás.

*A tetraéder hozzáírt gömbjének sugara:*

$$\rho_A = \frac{3V}{-T_a + T_b + T_c + T_d}$$

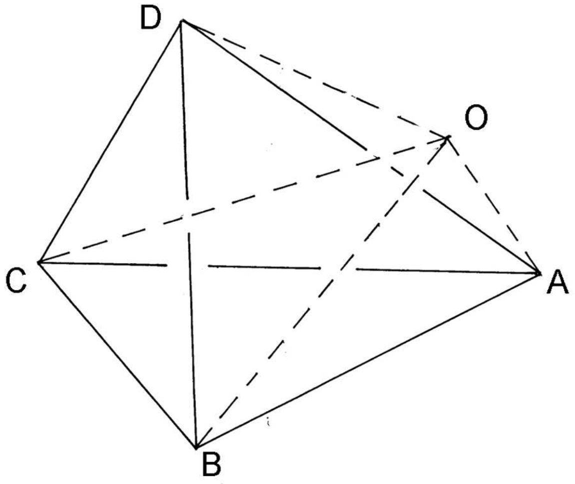
Bizonyítás:

Hasonlóan a háromszöghöz, $V_{ABCO} + V_{ACDO} + V_{ADBO} - V_{BCDO} = V_{ABCD}$, amiből következik az állítás.

*A tetraéder külső érintő gömbjének sugara:*

$$\rho_{AB} = \frac{3V}{T_a + T_b - T_c - T_d}$$

Bizonyítás:




11. *ábra*

Az előzőekhez hasonlóan $V_{BCDO} + V_{ACDO} - V_{ABCO} - V_{ABDO} = V_{ABCD}$, amiből következik az állítás.

# Magasságpont

*A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást*

Bizonyítás elemi úton:

A háromszöget a súlypontjából -2-szeresére nagyítjuk. A keletkezett háromszög oldalfelező merőlegesei az eredetinek magasságai, tehát ezek is egy ponton mennek át.

Bizonyítás vektorokkal:

Legyen $M$ pont az $m_a$ és $m_c$ metszéspontja. A merőlegesség miatt a helyvektorokra igaz, hogy $(\underline{a} - \underline{m})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$ és $(\underline{c} - \underline{m})(\underline{a} - \underline{b}) = 0$. Összeadva kapjuk, hogy $(\underline{b} - \underline{m})(\underline{a} - \underline{c}) = 0$, azaz $m_b$ is átmegy $M$ ponton.

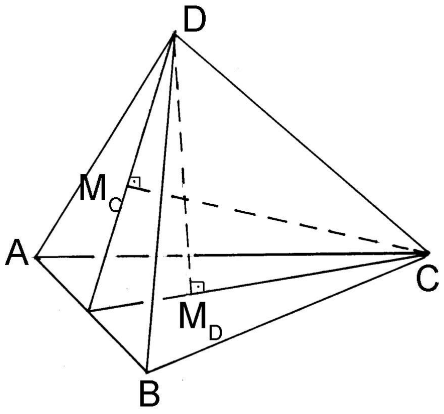
<u>*Tetraédernél?*</u>

*Két magasság nem feltétlen metszi egymást.*
*A magasság talppontja nem feltétlen a háromszög magassága.*

<u>*De:*</u>

*$CM_C$ és $DM_D$ magasságok akkor és csak akkor metszik egymást, ha $DC \perp AB$.*

Bizonyítás:




12. *ábra*

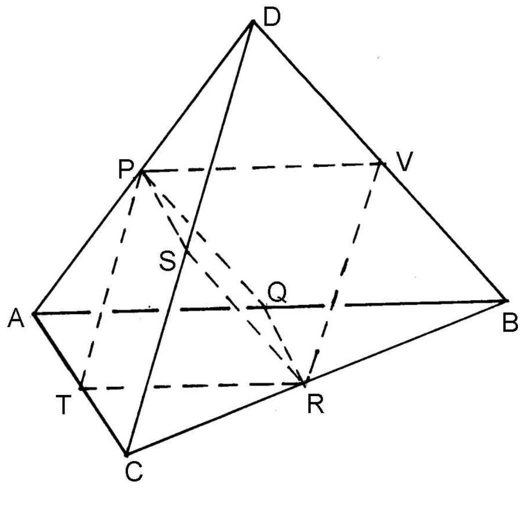
Ha metszi egymást a két magasság, akkor egy síkot határoznak meg, és $DM_D \perp AB$, $CM_C \perp AB$, tehát $DCM_DM_C$ sík $\perp AB$, azaz $DC \perp AB$. Ugyanígy pl. $CM_D \perp AB$, tehát magasság lesz az $ABC$ háromszögben.
Visszafelé: $DC \perp AB$ és $DM_D \perp AB$ (hiszen az $ABC$ síkra $\perp$), tehát $DCM_D$ sík $\perp AB$. Ugyanígy $DCM_C$ sík $\perp AB$, tehát a két sík azonos, így a két magasság metszi egymást.

*Ha a tetraéderben 2 szemköztes élpár merőleges, akkor a harmadik pár is merőleges.*

Bizonyítás I :

Legyen $AB \perp DC$ és $AC \perp BD$. Az előző bizonyítás alapján $M_D$ magasságpont $ABC$ háromszögben. Így $AM_D \perp BC$ és $DM_D \perp BC$, tehát $ADM_D$ sík $\perp AB$, azaz $AD \perp BC$.

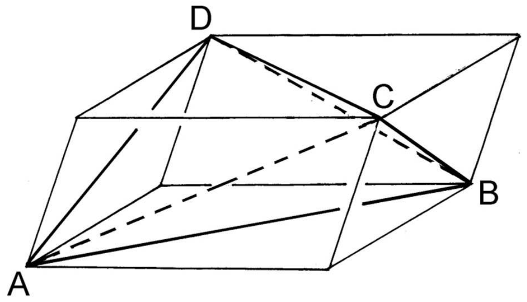
Bizonyítás II :




13. *ábra*

Legyenek $P, Q, R, S, T, V$ oldalfelező pontok. $AC \perp BD$, így $PQRS$ téglalap (középvonalak) tehát $PR = QS$. Ugyanígy $CD \perp AB$, így $PVRT$ téglalap, tehát $PR = TV$. Ezekből $QS = TV$ a $QTSV$ paralelogrammában, tehát egy téglalap. Így $AD \perp CB$.

Bizonyítás III :




14. *ábra*

$AB \perp CD$ így az alsó és felső paralelogramma átlói merőlegesek, tehát rombuszok. Ugyanígy $BC \perp AD$, így az oldalsók is rombuszok, tehát minden oldal egyenlő, azaz az első – hátsó lap is rombusz, aminek átlói merőlegesek, tehát $BD \perp AC$.

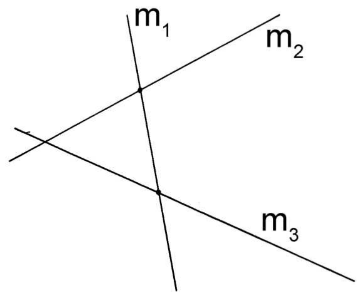
Bizonyítás helyvektorokkal :

$AB \perp CD$, acsa, ha $(\underline{a} - \underline{b})(\underline{c} - \underline{d}) = 0$
$BC \perp AD$, acsa, ha $(\underline{a} - \underline{d})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$, összeadva:

$(\underline{a} - \underline{c})(\underline{b} - \underline{d}) = 0$, acsa, ha $AC \perp BD$

*Ha bármely két magasság metszi egymást, akkor egy pontban metszik egymást.*

Bizonyítás :




15. *ábra*

$m_1$-et metszi $m_2$ és $m_3$. Ha egymást is metszik, akkor vagy egy síkban van mindhárom, ami lehetetlen, vagy egy ponton mennek át.

*Definíció:*
*ORTOCENTRIKUS tetraéder, aminek van magasságpontja, vagy aminek szemköztes élei merőlegesek.*

*Egy háromszögben az $A, B, C$ és $M$ pontok közül bármelyik 3 alkotta háromszögben a negyedik a magasságpont.*

*Egy ortocentrikus tetraéderben az $A, B, C, D$ és $M$ pontok közül bármelyik 4 alkotta tetraéderben az ötödik a magasságpont.*

Bizonyítás :

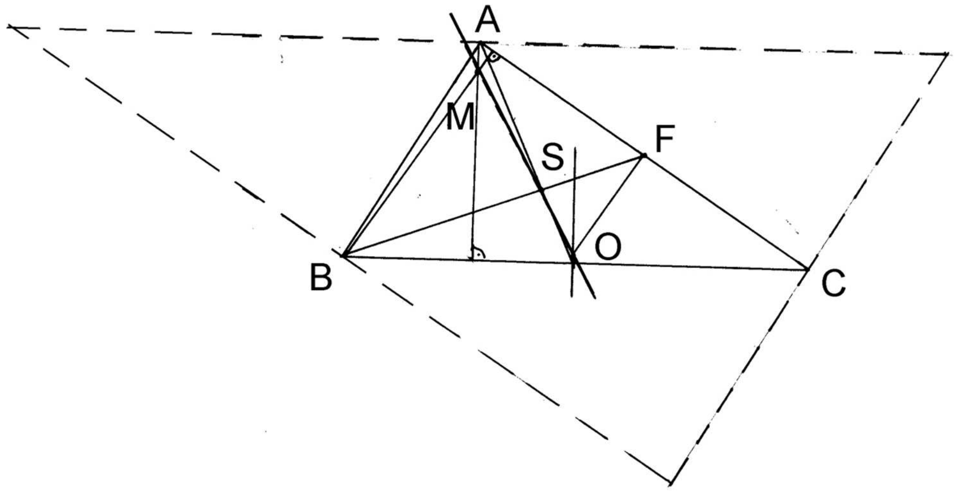
Az élek és magasságok merőlegességéből egyértelműen következik.

# Euler egyenes

*Háromszögben a magasságpont, súlypont és a körülírt kör középpontja egy egyenesre esik.*

$$\frac{SO}{SM} = \frac{1}{2}$$

Bizonyítás elemi úton:




16. *ábra*

Nagyítsuk $S$-ből a háromszöget a -2-szeresére. A kis háromszög oldalfelező merőlegeseiből a nagy háromszög oldalfelező merőlegesei lesznek, amik egyben a kis háromszög magasságai. Tehát $S$-ből ha $O$-t -2-szeresére nagyítjuk, $M$-et kapjuk. Ez pedig az állítás.

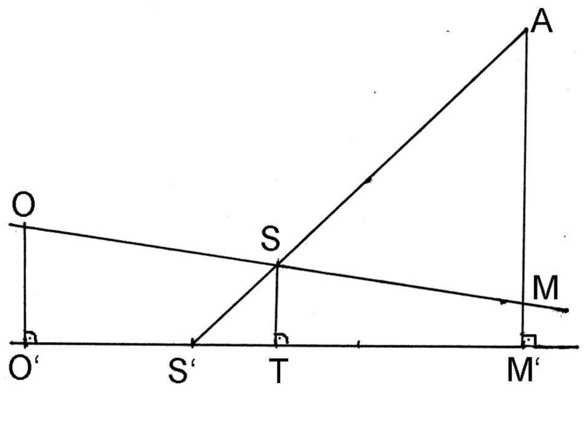
Bizonyítás vektorokkal:

Legyen $O$ pont a helyvektorok kezdőpontja, így $|\underline{a}| + |\underline{b}| + |\underline{c}| = r$.
$\underline{s} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}}{3}$ Legyen $\underline{m} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$. Belátjuk, hogy ez a magasságpont helyvektora, tehát pl. $AM \perp BC$, azaz $\underline{m} - \underline{a} \perp \underline{b} - \underline{c}$, azaz $(\underline{m} - \underline{a})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$.
Mivel $\underline{a} - \underline{m} = -\underline{b} - \underline{c}$, ezért ez $(b + c)(b - c) = 0$ teljesülését jelenti. Ez pedig teljesül, mert $|\underline{b}| = |\underline{c}|$.

*Ortocentrikus tetraéderben a magasságpont, a súlypont és a körülírt gömb középpontja egy egyenesre esik.* $SO = SM$.

Bizonyítás elemi úton:

(Nem analóg a síkbelivel, hisz a súlyvonal talppontja nem a körülírt kör középpontja.)
Minden lapon állítsunk a síkra merőleges síkot az Euler egyenesre. Ebben a síkban van a tetraéder $O, S$ és $M$ pontja. Tehát a síkoknak van közös metszésvonala, amin rajta van a három pont.




17. *ábra*

Vetítsük a súlypontot a lap Euler egyenesére ($T$). $\frac{S'S}{SA} = \frac{S'T}{TM'} = \frac{1}{3}$ és $\frac{O'S'}{S'M'} = \frac{1}{2}$, amiből $O'T = TM'$ így $OS = SM$.

Bizonyítás vektorokkal:

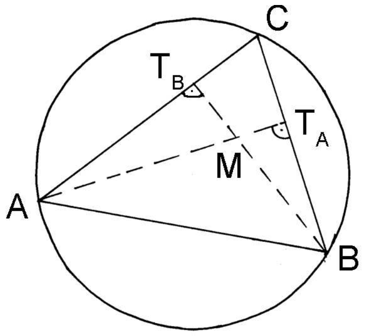
Teljesen analóg módon:

Legyen $O$ pont a helyvektorok kezdőpontja, így $|\underline{a}| + |\underline{b}| + |\underline{c}| + |\underline{d}| = r$.
$\underline{s} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}}{4}$ Legyen $\underline{m} = 2\underline{s} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}}{2}$. Belátjuk, hogy ez a magasságpont helyvektora, tehát pl. $AM \perp BCD$ sík, azaz $\underline{m} - \underline{a} \perp \underline{b} - \underline{c}$, és $\underline{m} - \underline{a} \perp \underline{c} - \underline{d}$, azaz $(\underline{m} - \underline{a})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$ és $(\underline{m} - \underline{a})(\underline{c} - \underline{d}) = 0$. Mivel $\underline{m} - \underline{a} = \frac{-\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}}{2}$, ezért ez $(\frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}}{2})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$ teljesülését jelenti. Ez pedig teljesül, mert $|\underline{b}| = |\underline{c}|$, így $(\underline{b} + \underline{c})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$ és $DA \perp BC$, mert szemközti élek, így $(\underline{d} - \underline{a})(\underline{b} - \underline{c}) = 0$
Hasonlóan igaz a $(\underline{m} - \underline{a})(\underline{c} - \underline{d}) = 0$ egyenlőség is.

# Feuerbach kör, gömb

*Egy háromszög oldalfelező pontjai, magasságtalppontjai, és a magasságot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körön vannak, melynek középpontja a körülírt kör középpontját a magasságponttal összekötő szakasz felezőpontja, sugara a körülírt kör sugarának fele.*

Bizonyítás:

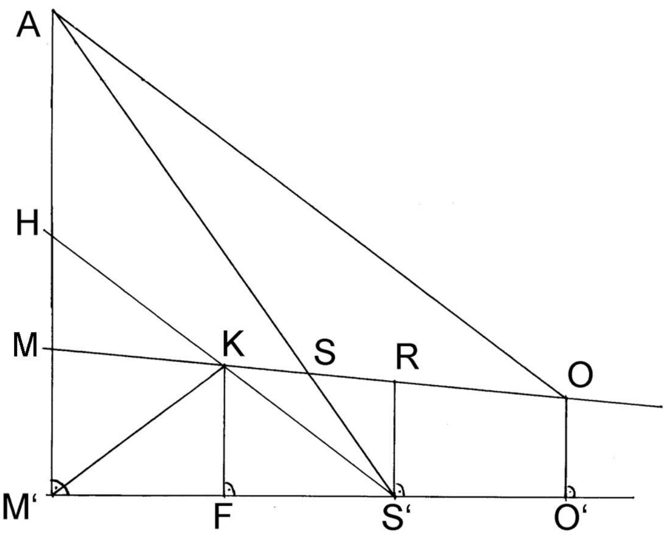



18. *ábra*

$T_AMT_B\sphericalangle = 180^o - T_ACT_B\sphericalangle$, ezért $M$ pont oldalakra ill. oldalfelező pontokra vett tükörképe a körülírt körön van. Kicsinyítsük a körülírt kört $M$-ből a felére. Megkapjuk a Feuerbach kört, ami az előbbiek szerint rendelkezik az összes a tételben kimondott tulajdonsággal.
(Korábban beláttuk, hogy a Feuerbach kör sugara $\geq \rho$.)

*Egy ortocentrikus tetraéder lapjainak súlypontjai, magasságainak talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok M-hez közelebbi harmadolópontjai egy gömbön, az I. Feuerbach gömbön vannak, melynek középpontja a körülírt gömb középpontját a magasságponttal összekötő szakasz M-hez közelebbi harmadolópontja, sugara a körülírt gömb sugarának harmada.*

Bizonyítás:




19. *ábra*

Vegyük fel az A csúcson és a szemközti lap Euler egyenesén áthaladó síkot, ez az előbbiek alapján tartalmazza az $M, S, O$ pontokat.
Tudjuk, hogy $M'S' = 2S'O'$, $K$ pont az $MO$ harmadolópontja, így $K$ pontról kell belátnunk, hogy a Feuerbach gömb középpontja. $R$ a tetraéder Euler egyenesének az a pontja, melynek vetülete $S'$. $AMS_\Delta \sim S'RS_\Delta$, arányuk $\frac{3}{1}$, így $HM = RS'$, tehát $MHK_\Delta \cong RS'K_\Delta$. Innen $HK = KS'$. $F$ az $M'S'$ szakasz felezőpontja, így $M'K = S'K = HK$. $HMK_\Delta \sim AMO_\Delta$, arányuk $\frac{1}{3}$, így $OA = 3KH = 3KS' = 3KM'$. Ezzel a Feuerbach gömb minden tulajdonságát beláttuk.

A Feuerbach gömb és egy oldallap síkjának metszete a háromszög Feuerbach köre.

*Az ortocentrikus tetraéder éleinek felezőpontjai egy gömbön, a II. Feuerbach gömbön vannak.*

Bizonyítás:
A 13. ábrán már bebizonyítottuk az állítást, hisz az ott szereplő téglalapok átlói egyenlőek, középpontjuk egybeesik.

## Még néhány analóg állítás

(A táborban nem hangzottak el.)
*Háromszögben a magasságok reciprokának összege egyenlő a beírt kör sugarának reciprokával.*
*Tetraéderben a magasságok reciprokának összege egyenlő a beírt gömb sugarának reciprokával.*

*Háromszögben a hozzáírt körök sugarának reciprokösszege egyenlő a beírt kör sugarának reciprokával.*
*Tetraéderben a hozzáírt gömbök sugarának reciprokösszege egyenlő a beírt gömb sugarának reciprokával.*

*Háromszögben* $\frac{1}{\rho_A} = -\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C}$
*Tetraéderben* $\frac{1}{\rho_A} = -\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} + \frac{1}{m_D}$

*Szögfelező tétel:*
*Háromszögben a belső szögfelező a szemközti oldalt a szöget bezáró két oldal arányában osztja ketté.*
*Tetraéderben a belső lapszögfelező sík a szemközti élt a lapszöget bezáró lapok területének arányában osztja ketté.*

*Háromszög belsejében felvett pont oldalaktól mért távolsága* $d_i$*, ekkor* $\frac{d_A}{m_A} + \frac{d_B}{m_B} + \frac{d_C}{m_C} = 1$
*Tetraéder belsejében felvett pont oldalaktól mért távolsága* $d_i$*, ekkor* $\frac{d_A}{m_A} + \frac{d_B}{m_B} + \frac{d_C}{m_C} + \frac{d_D}{m_D} = 1$

*Háromszög* $C$ *csúcsából induló* $s_c$ *súlyvonal négyzetét megkapjuk, ha a* $C$*-ből induló oldalak négyzetösszegének* $\frac{1}{2}$ *részéből kivonjuk a szemközti oldal négyzetének* $\frac{1}{4}$ *részét.*
*Tetraéder* $D$ *csúcsából induló* $s_c$ *súlyvonal négyzetét megkapjuk, ha a* $D$*-ből induló élek négyzetösszegének* $\frac{1}{3}$ *részéből kivonjuk a szemközti lapot határoló élek négyzetösszegének* $\frac{1}{9}$ *részét.*

*Háromszögben a súlyvonalak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegének* $\frac{3}{4}$ *részével.*
*Tetraéderben a súlyvonalak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegének* $\frac{4}{9}$ *részével.*

*Háromszögben* $\rho \le \frac{m_a+m_b+m_c}{9}$ *és* $\rho \le \frac{\rho_a+\rho_b+\rho_c}{9}$
*Tetraéderben* $\rho \le \frac{m_a+m_b+m_c+m_d}{16}$ *és* $\rho \le \frac{\rho_a+\rho_b+\rho_c+\rho_d}{16}$

*Háromszögben a súlyvonalak összege nem nagyobb az oldalak négyzetösszegéből vont négyzetgyök* $\frac{3}{2}$ *részénél.*
*Tetraéderben a súlyvonalak összege nem nagyobb az élek négyzetösszegéből vont négyzetgyök* $\frac{4}{3}$ *részénél.*

*Háromszögben a súlypontot a csúcsokkal összekötő szakaszok négyzetének összege az oldalak négyzetösszegének* $\frac{1}{3}$ *részével egyenlő.*
*Tetraéderben a súlypontot a csúcsokkal összekötő szakaszok négyzetének összege az oldalak négyzetösszegének* $\frac{1}{4}$ *részével egyenlő.*