Erben Péter: Sangaku

Bevezető

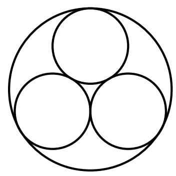
A következő ismertetőt Szabó Péter Gábor írta, és a Kömal honalpján is elérhető.

„Az Edo korszak (1603-1867) ideje alatt Japán el volt zárva a nyugati világtól. Ebben az időszakban tanult emberek (társadalmi helyzetüktől függetlenül) számos geometriai összefüggést fedeztek fel. Az eredményeket fatáblára rajzolták, szépen kiszínezték és elhelyezték egy-egy sintoista szentélyben vagy buddhista templomban, általában a tetőről lelógatva. Az ilyen táblát hívják sangakunak, amely matematikai táblát jelent japánul. A fatáblák közül több van, amely olyan igényesen lett elkészítve, hogy művészi alkotásnak is tekinthető. Sok ügyes geométer ajánlott sangakut köszönetként az égieknek egy-egy újabb tétel felfedezéséért. A bizonyításokat ritkán közölték, a problémák ezért kihívások lehettek mások számára. Egy sangakun rendszerint több feladat is szerepelt.

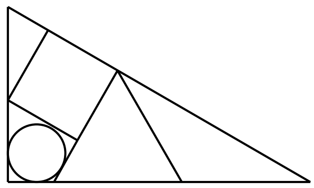
A történelem folyamán számos sangaku elveszett, de így is több mint 800 megmaradt és azok ma is kellemes perceket szerezhetnek a geometria kedvelőinek. Az, hogy most kedvünkre nézelődhetünk a múlt eme relikviái közt, jórészt egy japán középiskolai tanárnak, Hidetoshi Fukagawanak köszönhető. Fukagawa afféle tudós tanár, aki Ph.D. fokozatot is szerzett matematikából. Néhány évtizeddel ezelőtt elhatározta, hogy tanulmányozni fogja a japán matematikatörténetet, hogy a tapasztalatok birtokában eredményesebben taníthassa a diákokat. Egy régi könyvtári könyvben talált említést bizonyos matematikai fatáblákról, amelyekről korábban sohasem hallott. Ezt követően bejárta Japánt, hogy összegyűjtse nemcsak a sangakuról maradt emlékeket, hanem a régi japán matematika (Wasan) más eredményeit is. A munka nem volt egyszerű, hiszen ahhoz, hogy a fennmaradt szövegeket el tudja olvasni, tanulmányoznia kellett a japán nyelv archaikus változatát, a kambunt is, amely az Edo korban a tudomány nyelve volt. Az összegyűjtött anyagot később több helyen is publikálta. 1989-ben jelent meg először angol nyelven gyűjteményes kötet a sangakuról, amelyet H. Fukagawa és D. Pedoe írtak.”

1. feladatsor

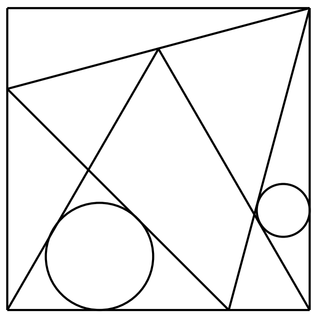
1. feladat: Írjunk egy k körbe három egyenlő sugarú kört, amelyek egymást és k-t is érintik!



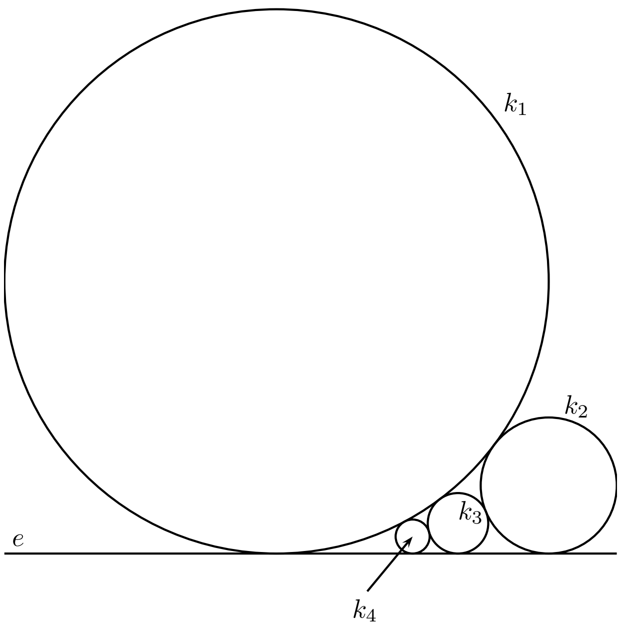
2. feladat: Egy „$60-30-90$-es” háromszögbe egy kört, egy négyzetet és egy szabályos háromszöget rajzoltunk az ábra szerint. Mekkora a derékszögű háromszög rövidebb befogójának és a szabályos háromszög oldalának aránya?



3. feladat: Egy négyzetbe két szabályos háromszöget rajzoltunk az ábrán látható módon, majd a keletkező háromszögek közül kettőnek megszerkesztettük a beírt körét. Mi a kapcsolat a beírt körök sugarai között?

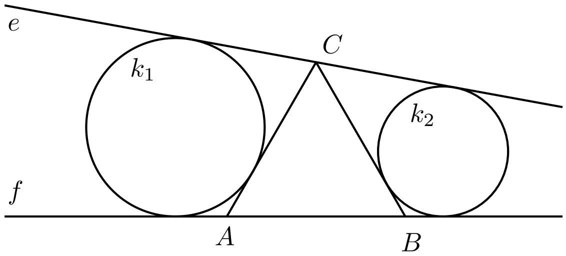


4. feladat: A $k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots$ körök az ábrán látható módon érintik egymást és az e egyenest, továbbá tudjuk, hogy $r_1 = 36, r_2 = 9$ (r_i a k_i kör sugara). Melyik az a legkisebb k index, amire $r_k < \left(\frac{1}{150}\right)^2$?



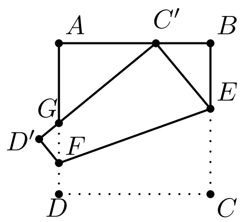
2. feladatsor

1. feladat: Az ABC szabályos háromszög oldalának hossza 10 egység. Az AB oldal egyenese f. A C csúcson keresztül olyan e egyenest húztunk, ami a háromszögön kívül halad. Ezután megrajzoltuk az ábrán látható módon a k_1 és k_2 köröket, amelyek érintik az e és f egyeneseket, továbbá a háromszög egy-egy oldalát kívülről.



Jelölje a körök sugarának hosszát r_1 és r_2. Bizonyítsuk be, hogy az $r_1 + r_2$ összeg értéke nem függ az e egyenes helyzetétől, és határozzuk meg ezt az értéket!

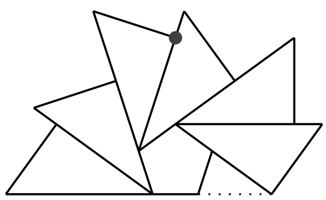
2. feladat: (*Haga-tételek.*) Egy $ABCD$ négyzet alakú papírt félbehajtunk úgy, hogy a C csúcs az AB oldalon fekvő C' pontban kerül.



a) Bizonyítsuk be, hogy a C középpontú és CB sugarú kör érinti a $C'D'$ egyenest!

b) Bizonyítsuk be, hogy $K_{C'BE} + K_{FGD'} = K_{AC'G}$!

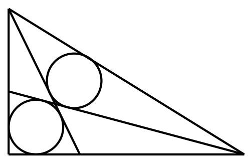
3. feladat: Egy szabályos ötszög köré – az ábrán látható módon – egybevágó derékszögű háromszögeket „pakoltunk”.



a) Határozzuk meg, hányszorosa a háromszög átfogója az ötszög oldalának!

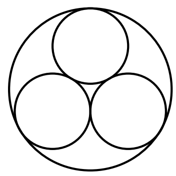
b) Bizonyítsuk be, hogy a megjelölt pont az ötszög szimmetriatengelyére esik!

4. feladat: Egy derékszögű háromszöget úgy bontottunk fel az ábrán látható módon négy részre, hogy a négyszög alakú részbe kör írható, aminek sugara megegyezik a háromszög alakú részbe írt kör sugarával. Fejezzük ki a körök sugarát a háromszög oldalaival!



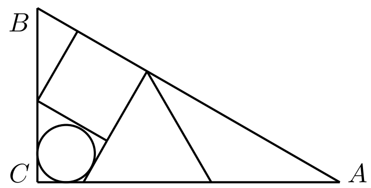
Megoldások

Feladat: Írjunk egy k körbe három egyenlő sugarú kört, amelyek egymást és k-t is érintik!



Megoldás: A „beírást” most úgy értelmezzük, hogy „számoljuk ki a beírható körök sugarát”. Az eredeti kör sugara R, a kicsi köröké r. A kis körök középpontjai által meghatározott szabályos háromszög súlyvonalára koncentrálva: $R - r = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2r$, amiből $r = \left(2\sqrt{3} - 3\right) R$.

Feladat: Egy „$60 - 30 - 90$-es” háromszögbe egy kört, egy négyzetet és egy szabályos háromszöget rajzoltunk az ábra szerint. Mekkora a derékszögű háromszög rövidebb befogójának és a szabályos háromszög oldalának aránya?



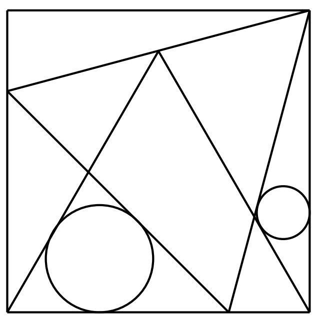
Megoldás: Legyen $BC = a$, a négyzet oldala x, a szabályos háromszögé y. Az ábrán fellelhető „nevezetes” háromszögeket használva:

$AB = 2a = \sqrt{3}y + x + x/\sqrt{3}$

$BC = a = 2x/\sqrt{3} + x$

Kiküszöbölve x-et: $y = \left(\sqrt{3} - 1\right) a$.

Feladat: Egy négyzetbe két szabályos háromszöget rajzoltunk az ábrán látható módon, majd a keletkező háromszögek közül kettőnek megszerkesztettük a beírt körét. Mi a kapcsolat a beírt körök sugarai között?



Megoldás: Felhasználjuk, hogy egy háromszög beírt körének sugara:

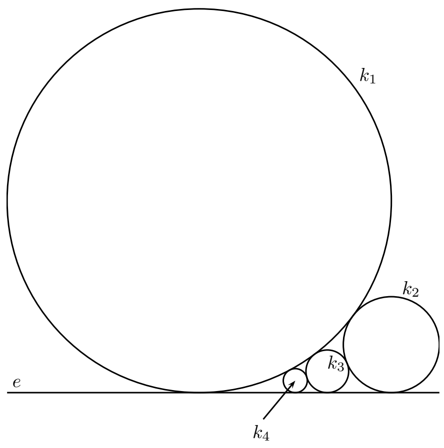
$$r = a^2 \cdot \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

A sugarak a nevezetes szögek szögfüggvény értékeinek felhasználásával kifejezhetők:

$$R = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \qquad r = \frac{\sqrt{3} - 1}{2 \cdot \left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}$$

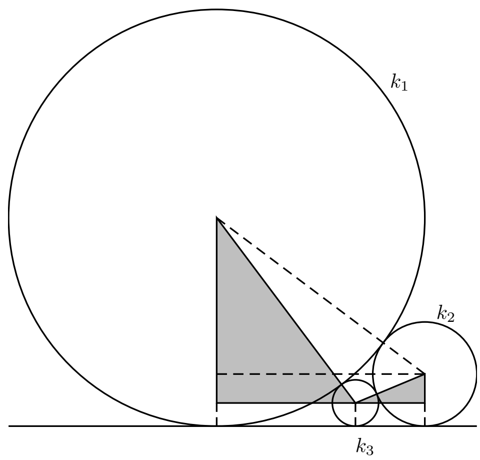
Tehát $R = 2r$.

Feladat: A $k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots$ körök az ábrán látható módon érintik egymást és az e egyenest, továbbá tudjuk, hogy $r_1 = 36, r_2 = 9$ (r_i a k_i kör sugara). Melyik az a legkisebb k index, amire $r_k < \left(\frac{1}{150}\right)^2$?



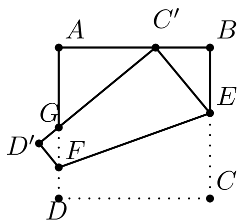
Megoldás: Ismert, hogy az $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$ összefüggés teljesül, ha a három kör egy közös egyenest és egymást kívülről érinti, továbbá k_3 van középen. Ez bizonyítható az ábrán jelölt derékszögű háromszögekre felírt Pitagorasz-tételekből:

$$\sqrt{(r_1+r_3)^2-(r_1-r_3)^2}+\sqrt{(r_2+r_3)^2-(r_2-r_3)^2}=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}.$$



Innen $a_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{1}{6} + a_{n-1}$, vagyis $a_n = \frac{n}{6}$; $r_n = \frac{36}{n^2} < \frac{1}{150^2}$, $n^2 > 36 \cdot 150^2$, $n > 6 \cdot 150 = 900$.

Feladat: Haga-tételek. Egy $ABCD$ négyzet alakú papírt félbehajtunk úgy, hogy a C csúcs az AB oldalon fekvő C' pontban kerül.

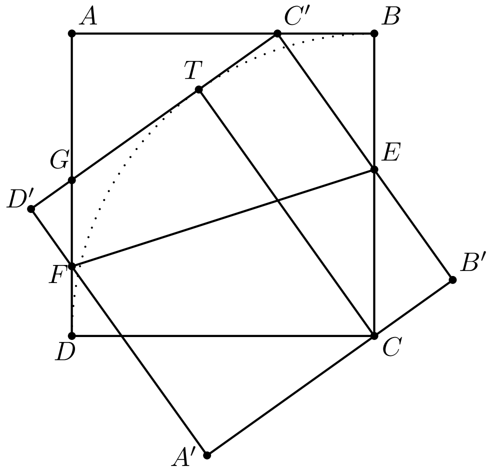


a) Bizonyítsuk be, hogy a C középpontú és CB sugarú kör érinti a $C'D'$ egyenest!

b) Bizonyítsuk be, hogy $K_{C'BE} + K_{FGD'} = K_{AC'G}$!

Megoldás: a) A hajtogatás következménye, hogy az EF egyenesre tükrözve C és C', továbbá D és D' egymás képei. (Ha a hajtogatásnál egy P pont P'-be kerül, akkor a hajtási él a PP' szakasz felezőmerőlegese.)

Tükrözzük A-t és B-t is EF-re, a tükörképek legyenek A' és B'. Ekkor $A'B'C'D'$ egybevágó $ABCD$-vel. Mivel C' rajta van AB-n, ezért C-nek rajta kell lennie $A'B'$-n.



Jelölje T a C pont merőleges vetületét $C'D'$-n. Mivel C az $A'B'$ pontja, ezért CT a négyzet(ek) oldalával egyenlő hosszú, tehát $CT = CB$. Ebből következik, hogy a C középpontú, CB sugarú kör (a továbbiakban k) érinti $C'D'$-t (és az is kiderült, hogy az érintési pont T).

b) Az előbb kapott T pont a $C'G$ szakasznak belső pontja, hiszen k csak a négyzet belsejében érintheti $C'D'$-t. Az alábbiakban többször használni fogjuk, hogy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők.

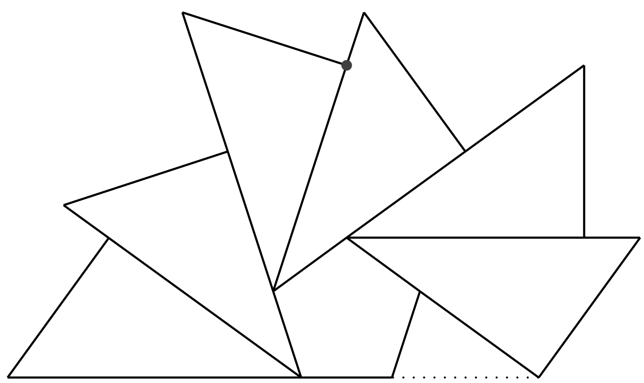
AGC' kerülete: $AG + GC' + C'A = AG + (GT + TC') + C'A = (AG + GT) + (TC' + C'A) = (AG+GD)+(BC'+C'A) = AD+BA$, ami éppen az eredeti négyzet kerületének fele. (Itt felhasználtuk, hogy k érintési pontjai a négyzet oldalegyenesein D és B.)

BEC' kerülete: $C'B + BE + EC' = C'B + BE + EC = C'B + BC$.

$GD'F$ kerülete: $GD' + D'F + FG = GD' + DF + FG = GD' + DG = GD' + TG = TD'$.

Utóbbi két kerület összege: $C'B + BC + TD' = C'T + BC + TD' = C'T + TD' + BC = C'D' + BC$, ami szintén két négyzetoldal összhossza, így valóban egyenlő AGC' kerületével.

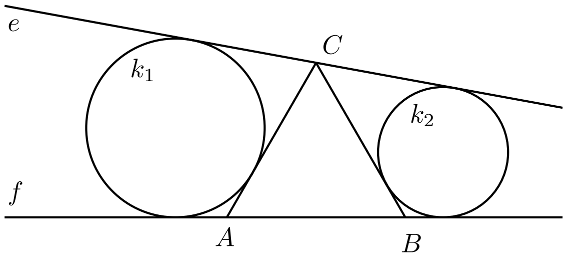
Feladat: Egy szabályos ötszög köré – az ábrán látható módon – egybevágó derékszögű háromszögeket „pakoltunk”.



a) Határozzuk meg, hányszorosa a háromszög átfogója az ötszög oldalának!

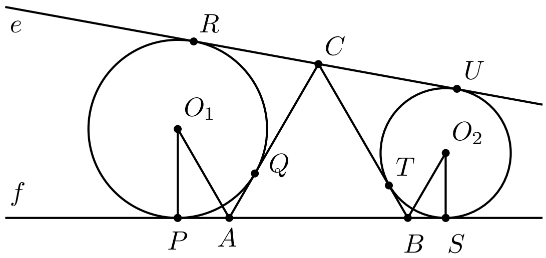
b) Bizonyítsuk be, hogy a megjelölt pont az ötszög szimmetriatengelyére esik!

Feladat: Az ABC szabályos háromszög oldalának hossza 10 egység. Az AB oldal egyenese f. A C csúcson keresztül olyan e egyenest húztunk, ami a háromszögön kívül halad. Ezután megrajzoltuk az ábrán látható módon a k_1 és k_2 köröket, amelyek érintik az e és f egyeneseket, továbbá a háromszög egy-egy oldalát kívülről.



Jelölje a körök sugarának hosszát r_1 és r_2. Bizonyítsuk be, hogy az $r_1 + r_2$ összeg értéke nem függ az e egyenes helyzetétől, és határozzuk meg ezt az értéket!

Megoldás: Jelöljük meg az érintési pontokat és a körök középpontját, továbbá vezessük be az ábrán látható jelöléseket:



Külső pontból a körhöz húzható érintőszakaszok egyenlők, tehát igazak a következők: $AP = AQ$, $CQ = CR$, $BS = BT$, $CU = CT$.

Az érintőkörök középpontjai rajta vannak ABC megfelelő külső szögfelezőin, ezért az O_1PA és O_2BS derékszögű háromszögek A-nál illetve B-nél fekvő belső szöge 60°.

Innen $PA = \dfrac{r_1}{\sqrt{3}}$ és $SB = \dfrac{r_2}{\sqrt{3}}$.

A fent megállapított egyenlőségeket használva:

$RC = CQ = 10 - QA = 10 - AP = 10 - \dfrac{r_1}{\sqrt{3}}$ és $UC = CT = 10 - TB = 10 - SB = 10 - \dfrac{r_2}{\sqrt{3}}$.

Innen $RU = RC + CU = 20 - \dfrac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}}$.

Végül felhasználjuk, hogy a k_1 és k_2 körök közös külső érintőszakaszai egyenlők, vagyis $RU = PS$. Ebből

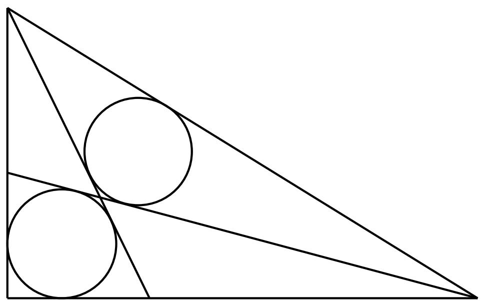
$$20 - \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}} = RU = RS = AB + PA + BS = 10 + \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}}$$

következik.

Átrendezve az egyenletet: $10 = 2 \cdot \dfrac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}}$, ahonnan $r_1 + r_2 = 5 \cdot \sqrt{3}$.

Azt kaptuk tehát, hogy a két sugár hosszának összege a szabályos háromszög magasságának hosszával egyezik meg.

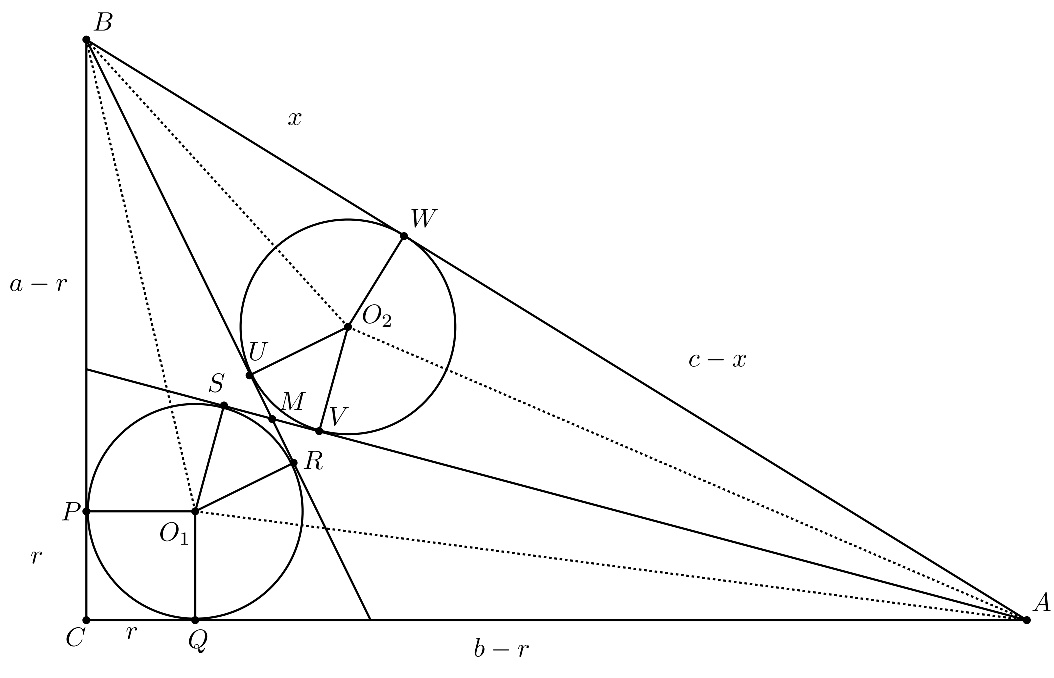
Feladat: Egy derékszögű háromszöget úgy bontottunk fel az ábrán látható módon négy részre, hogy a négyszög alakú részbe kör írható, aminek sugara megegyezik a háromszög alakú részbe írt kör sugarával.



Fejezzük ki a körök sugarát a háromszög oldalaival!

Megoldás: A háromszöget részekre bontjuk, majd területét felírjuk a részek területének összegeként. Ebből az egyenletből fogjuk megkapni a keresett kifejezést.

A következő ábrán megjelöltük a körök érintési pontjait, és berajzoltuk a körök középpontját meghatározó szögfelezőket. Az érintőszakaszok egyenlősége és a sugarak egyenlősége alapján $PCQO_1$ négyzet, AQO_1S, $VAWO_2$, $WBUO_2$ és $RBPO_1$ pedig derékszögű deltoidok.



Az egybevágó körök sugara r, a befogók $AC = b$ és $BC = a$, végül az átfogó $AB = c$.

Tekintsük a következő összeget:

$$T_{PCQO_1} + T_{QASO_1} + T_{BPO_1R} + T_{BWO_2U} + T_{AWO_2V}$$

Azt állítjuk, hogy a fenti összeg éppen az ABC háromszög területét adja.

Ehhez csak annyit kell megmutatnunk, hogy $T_{O_1RMS} = T_{MVO_2U}$, hiszen előbbi kétszer, utóbbi pedig egyszer sem szerepel az összegben, a háromszög többi részét pedig egyrétűen fedik le az összegben szereplő sokszögek.

A $T_{O_1RMS} = T_{MVO_2U}$ egyenlőség következik abból, hogy az O_1RMS és MVO_2U deltoidok egybevágók, hiszen mindkettőnek van két szemközti derékszöge, M-nél fekvő szögeik egyenlők, továbbá $O_1S = O_1R = O_2U = O_2V = r$.

Most már csak egy kis algebra van hátra:

$$T_{ABC} = \frac{ab}{2} = T_{PXQO_1} + T_{QASO_1} + T_{BPO_1R} + T_{BWO_2U} + T_{AWO_2V} =$$

$$= r^2 + r(b-r) + r(a-r) + rx + r(c-x) = r^2 + r(b-r) + r(a-r) + rc = r(a+b+c) - r^2$$

Egy másodfokú egyenletet kaptunk r-re:

$$\frac{ab}{2} = r(a+b+c) - r^2$$

Nullára rendezve és megoldva:

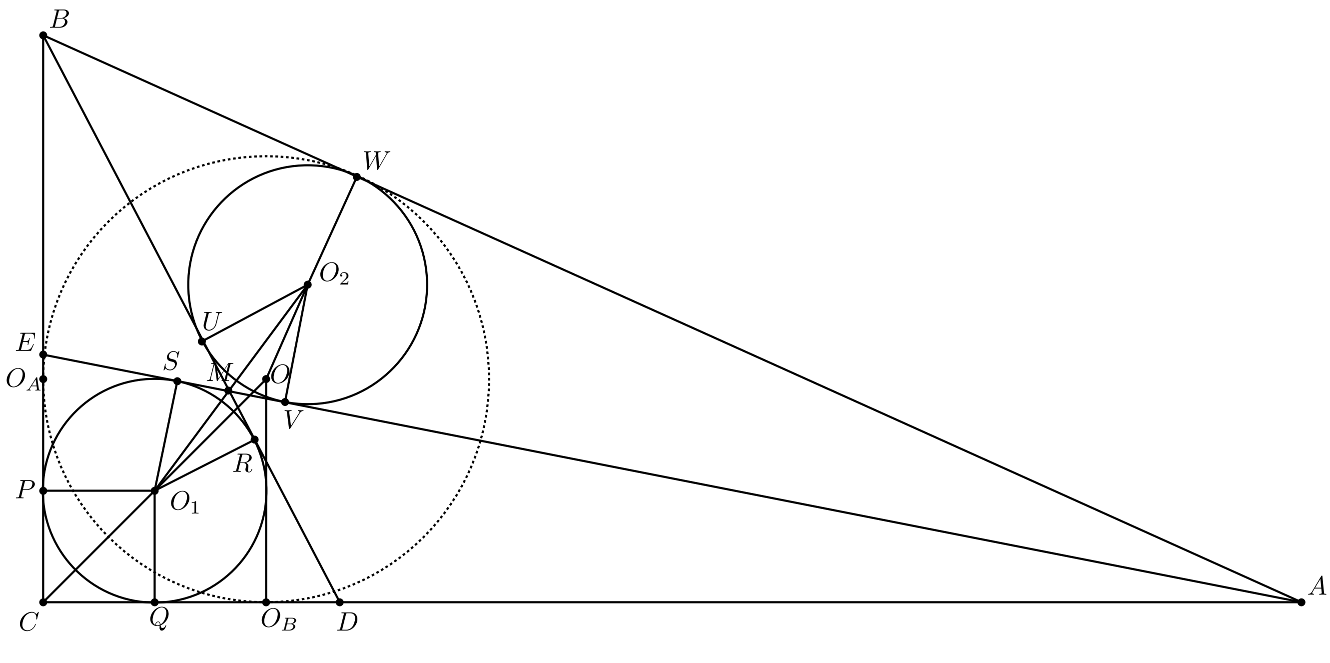
$$r_{1,2} = \frac{a+b+c \pm \sqrt{(a+b+c)^2 - 2ab}}{2}$$

Nyilván $r < a$, $r < b$ ezért $r < \frac{a+b+c}{2}$, tehát a két gyök közül a kisebb a megfelelő:

$$r = \frac{a+b+c - \sqrt{(a+b+c)^2 - 2ab}}{2}$$

2. megoldás: Az előző megoldás legfontosabb ötlete a két egybevágó deltoid területének kiejtése volt. A most következő – Bohner Gézától származó – megoldás több eszközt használ, de cserébe további geometriai tulajdonságokat ismerünk meg a feladatban szereplő elrendezésről.

Az előzőhöz hasonló ábrát használunk, néhány további pont megjelölésével:



A szaggatott kör az ABC beírt köre, sugara ϱ, érintési pontjai a befogókon O_A és O_B, középpontja O.

1. észrevétel: Az $ABC\Delta$ beírt köre ugyanott érinti az átfogót, mint az $ABM\Delta$ beírt köre, W-ben. Ez látható abból, hogy az érintőszakaszok egyenlősége alapján: $BW = BU$, $BR = BP = a - r$, $AW = AV$, $AS = AQ = b - r$. Az kis körök egybevágósága miatt $UR = SV = d$, ezért $BW = BU = BR - d = BP - d = a - r - d$ és $AW = AV = AS - d = AQ - d = b - r - d$. Innen $AW - BW = (b-r-d) - (a-r-d) = b-a$. Mivel az is igaz, hogy $AW + BW = c$, $AW = ((b-a)+c)/2$, tehát W valóban az $ABC\Delta$ beírt körének átfogón fekvő érintési pontja.

2. észrevétel: Az előzőeket kicsit tovább fűzve $AW = AO_B = b - \varrho$ és $AW = AV = AS - d = AQ - d = b - r - d$ alapján $\varrho = r + d$, vagyis a kis körök közös belső érintőszakaszának hossza $d = \varrho - r$. Az is kiderült, hogy QO_B és PO_A hossza is d.

3. észrevétel: Az SV, UR és O_1O_2 szakaszok közös felezőpontja M, az AE és BD szakaszok metszéspontja.

4. észrevétel: $O_2OO_1\sphericalangle = 135° + \alpha$. Ez annak következménye, hogy O és O_1 rajta vannak a C-nél lévő derékszög belső szögfelezőjén, továbbá O_2 és O rajta vannak az átfogóra W-ben állított merőlegesen. Itt fontos az elrendezés, OO_1O_2 állása, fel kell tennünk, hogy $b > a$. Ilyen esetben $\alpha < 45°$.

Ennyi előkészület után nekiállunk a bizonyításnak: az O_1M szakaszt számítjuk ki kétféle módon, az O_2OO_1 és az O_1SM háromszögekből.

I. O_2OO_1 háromszög: a koszinusztételt fogjuk használni. Az oldalak $OO_2 = \varrho - r$, $OO_1 = \sqrt{2} \cdot QO_B = \sqrt{2} \cdot (\varrho - r)$. A koszinusz: $\cos(135° + \alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a+b}{c}$. Most már jöhet a koszinusztétel:

$$4 \cdot O_1M^2 = O_1O_2^2 = (\varrho - r)^2 + (\sqrt{2}(\varrho - r))^2 - 2 \cdot (\varrho - r) \cdot \sqrt{2} \cdot (\varrho - r) \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a+b}{c} = (\varrho - r)^2 \cdot \frac{3c + 2a + 2b}{c}$$

II. O_1SM háromszög, Pitagorasz-tétel:

$$4 \cdot O_1M^2 = 4 \cdot r^2 + (\varrho - r)^2$$

A baloldalak egyenlősége miatt ezt kaptuk:

$$(\varrho - r)^2 \cdot \frac{3c + 2a + 2b}{c} = 4 \cdot r^2 + (\varrho - r)^2$$

Rendezve:

$$(\varrho - r)^2 \cdot \frac{2c + 2a + 2b}{c} = 4 \cdot r^2$$

$$(\varrho - r)^2 \cdot \frac{c + a + b}{2c} = r^2$$

$$(\varrho - r) \cdot \sqrt{\frac{c + a + b}{2c}} = r$$

Végül a terület kétféle felírásából $\varrho = \frac{ab}{a+b+c}$, ezt az előző egyenletbe írva és rendezve:

$$\frac{ab}{a+b+c} \cdot \sqrt{\frac{a+b+c}{2c}} = r \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{a+b+c}{2c}}\right)$$

$$r = \frac{\frac{ab}{a+b+c} \cdot \sqrt{\frac{a+b+c}{2c}}}{1 + \sqrt{\frac{a+b+c}{2c}}}$$

Zárásként megmutatjuk azt a ránézésre koránt sem triviális tényt, hogy a most kapott eredmény egyezik az első megoldás végeredményével. Bevezetjük a $K = a + b + c$ jelölést.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{ab}{K}\cdot\sqrt{\frac{K}{2c}}}{1+\sqrt{\frac{K}{2c}}} &\quad ?= \quad \frac{K-\sqrt{K^2-2ab}}{2} = \frac{ab}{K+\sqrt{K^2-2ab}} \\
\frac{\frac{1}{K}\cdot\sqrt{\frac{K}{2c}}}{1+\sqrt{\frac{K}{2c}}} &\quad ?= \quad \frac{1}{K+\sqrt{K^2-2ab}} \\
\sqrt{\frac{1}{2cK}}\cdot\left(K+\sqrt{K^2-2ab}\right) &\quad ?= \quad 1+\sqrt{\frac{K}{2c}} \\
\sqrt{\frac{K}{2c}}+\sqrt{\frac{K^2-2ab}{2cK}} &\quad ?= \quad 1+\sqrt{\frac{K}{2c}} \\
\sqrt{\frac{K^2-2ab}{2cK}} &\quad ?= \quad 1 \\
\frac{K^2-2ab}{2cK} &\quad ?= \quad 1 \\
K^2-2ab &\quad ?= \quad 2cK \\
K(K-2c) &\quad ?= \quad 2ab \\
(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2-c^2 = a^2+b^2+2ab-c^2 &\quad = \quad 2ab
\end{aligned}$$

Pitagorasz tétele alapján azonosságot kaptunk, befejeztük a bizonyítást.