

# Csajbók Bence: Folyamok és vízvezeték-szerelők

## Feladatok I.

1. Egy  $n \times n$ -es táblázat kitölthető-e úgy nemnegatív egész számokkal, hogy a sor-, illetve oszlop-összegek értékei az  $1, 2, \dots, 2n$  számok legyenek?
2. Egy  $n \times n$ -es táblázat kitölthető-e úgy nemnegatív egész számokkal, hogy a sor-, illetve oszlop-összegek értékei különböző számok legyenek a  $\{0, 1, 2, \dots, 2n\}$  halmazból?
3. Egy  $n \times n$ -es táblázat kitölthető-e úgy a  $-1, 0, 1$  számokkal, hogy minden sor-, illetve oszlop-összeg különböző legyen?

## Folyamok

A  $G$  irányított gráf minden  $e$  éléhez rendeljünk hozzá egy  $c(e) \in \mathbb{R}_0^+$  értéket, mely az  $e$  él kapacitása. Legyenek továbbá az  $s$ , illetve  $t$  csúcsok olyanok, hogy  $s$ -ből csak kifelé,  $t$ -be csak befelé mutatnak élek.

Az  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  függvényt hálózati folyamoknak nevezzük, ha minden  $e \in E$  esetén  $0 \leq f(e) \leq c(e)$  és

$$\sum_{(v,x) \in E} f(v,x) = \sum_{(y,v) \in E} f(y,v)$$

## Feladatok II.

1. Egy  $n \times n$ -es táblázat kitölthető-e úgy a  $0 \leq a_{ij} \leq 1$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) számokkal, hogy minden sor-, illetve oszlop-összeg különböző egész szám legyen?
2. Bizonyítsuk be, hogy  $a_1 \leq \dots \leq a_n$  és  $b_1 \leq \dots \leq b_m$  pontosan akkor egy egyszerű párosgráf fokszámsorozata, ha az alábbi két feltétel teljesül:
  - (a)  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m b_i$
  - (b)  $\forall 1 \leq k \leq n$  esetén  $\sum_{i=n-k+1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^m \min(b_i, k)$
3.  $a_1 \leq \dots \leq a_n$  és  $b_1 \leq \dots \leq b_m$  mikor lehet egy páros multigráf fokszámsorozata?
4. (Irányított "él-Menger"-tétel) Bizonyítsuk be, hogy a  $G$  irányított gráfban a közös él nélküli irányított  $x \rightarrow y$  utak maximális száma megegyezik az összes  $x \rightarrow y$  irányított utat szétvágó élek minimális számával.

## Epilógus

*Egy matematika professzor észrevette, hogy eltört a cső a konyhai lefolyójában, hívta hát a vízvezeték-szerelőt. A mester rendesen meg is csinálta a lefolyót, a matematikus is elégedett volt, egészen amíg kézhez nem kapta a számlát, ami kb. a havi fizetésének az egyharmada volt. Panaszkodott is a szerelőnek, aki mondta, hogy sajnálja, meg megéri, de hát ez van, jöjjön el ő is a céghez dolgozni, ott sokkal jobban fog keresni. Azt a tanácsot adta még, hogy tagadja le a végzettségét, mert a főnökei nem szeretik a túlképzett embereket. A matematikus elment jelentezni a vízvezeték-szerelő céghez és fel is vették, mivel azt hazudta, hogy csak 7 általánosa van.*

*Ezek után mint szerelő dolgozott és egyre többet keresett. Egyszer egy nap a cég vezetése kitalálta, hogy elküldik esti iskolába azokat a munkásokat, akiknek nincs meg a 8 általános. Így a professzort is elküldték. Az első ilyen órán, ami történetesen matematika volt, a tanár, hogy tisztába jöjjön az osztály tudásával, megkérdezte tőlük, ki tudná megmondani, mi a kör területének a képlete. Épp a professzort kérdezte meg, aki ki is ment a táblához, de azt vette észre, hogy hirtelenjében, nem jut eszébe a képlet. Elkezdte hát levezetni, integrált, derivált, és azt kapta, hogy  $-r^2\pi$ . Nem tetszett neki az a mínusz, így újra számolt. De megint ugyanezt az eredményt kapta. Megint újra számolt, de megint ezt kapta. Nem számított hányszor számolja újra, mindig ott volt az a mínusz. Idegesen körbetekintett az osztályon és hallotta ahogy az összes vízvezeték-szerelő ezt suttozza: "Cseréld fel az integrációs határokat!!"*