

Csajbók Bence: Folyamok és vízvezeték-szerelők

Feladatok I.

1. Egy $n \times n$ -es táblázat kitölthető-e úgy nemnegatív egész számokkal, hogy a sor-, illetve oszlop-összegek értékei az $1, 2, \dots, 2n$ számok legyenek?
2. Egy $n \times n$ -es táblázat kitölthető-e úgy nemnegatív egész számokkal, hogy a sor-, illetve oszlop-összegek értékei különböző számok legyenek a $\{0, 1, 2, \dots, 2n\}$ halmazból?
3. Egy $n \times n$ -es táblázat kitölthető-e úgy a $-1, 0, 1$ számokkal, hogy minden sor-, illetve oszlop-összeg különböző legyen?

Folyamok

A G irányított gráf minden e éléhez rendeljük hozzá egy $c(e) \in \mathbb{R}_0^+$ értéket, mely az e él kapacitása. Legyenek továbbá az s , illetve t csúcsok olyanok, hogy s -ből csak kifelé, t -be csak befelé mutatnak élek.

Az $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvényt hálózati folyamoknak nevezzük, ha minden $e \in E$ esetén $0 \leq f(e) \leq c(e)$ és

$$\sum_{(v,x) \in E} f(v,x) = \sum_{(y,v) \in E} f(y,v)$$

Feladatok II.

1. Egy $n \times n$ -es táblázat kitölthető-e úgy a $0 \leq a_{ij} \leq 1$ ($1 \leq i, j \leq n$) számokkal, hogy minden sor-, illetve oszlop-összeg különböző egész szám legyen?
2. Bizonyítsuk be, hogy $a_1 \leq \dots \leq a_n$ és $b_1 \leq \dots \leq b_m$ pontosan akkor egy egyszerű párosgráf fokszámsorozata, ha az alábbi két feltétel teljesül:
 - (a) $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m b_i$
 - (b) $\forall 1 \leq k \leq n$ esetén $\sum_{i=n-k+1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^m \min(b_i, k)$
3. $a_1 \leq \dots \leq a_n$ és $b_1 \leq \dots \leq b_m$ mikor lehet egy páros multigráf fokszámsorozata?
4. (Irányított "él-Menger"-tétel) Bizonyítsuk be, hogy a G irányított gráfban a közös él nélküli irányított $x \rightarrow y$ utak maximális száma megegyezik az összes $x \rightarrow y$ irányított utat szétvágó élek minimális számával.

Epilógus

Egy matematika professzor észrevette, hogy eltört a cső a konyhai lefolyójában, hívta hát a vízvezeték-szerelőt. A mester rendesen meg is csinálta a lefolyót, a matematikus is elégedett volt, egészen amíg kézhez nem kapta a számlát, ami kb. a havi fizetésének az egyharmada volt. Panaszkodott is a szerelőnek, aki mondta, hogy sajnálja, meg megéri, de hát ez van, jöjjön el ő is a céghez dolgozni, ott sokkal jobban fog keresni. Azt a tanácsot adta még, hogy tagadja le a végzettségét, mert a főnökei nem szeretik a túlképzett embereket. A matematikus elment jelentezni a vízvezeték-szerelő céghez és fel is vették, mivel azt hazudta, hogy csak 7 általánosa van.

Ezek után mint szerelő dolgozott és egyre többet keresett. Egyszer egy nap a cég vezetése kitalálta, hogy elküldik esti iskolába azokat a munkásokat, akiknek nincs meg a 8 általános. Így a professzort is elküldték. Az első ilyen órán, ami történetesen matematika volt, a tanár, hogy tisztába jöjjön az osztály tudásával, megkérdezte tőlük, ki tudná megmondani, mi a kör területének a képlete. Épp a professzort kérdezte meg, aki ki is ment a táblához, de azt vette észre, hogy hirtelenjében, nem jut eszébe a képlet. Elkezdte hát levezetni, integrált, derivált, és azt kapta, hogy $-r^2\pi$. Nem tetszett neki az a mínusz, így újra számolt. De megint ugyanezt az eredményt kapta. Megint újra számolt, de megint ezt kapta. Nem számított hányszor számolja újra, mindig ott volt az a mínusz. Idegesen körbetekintett az osztályon és hallotta ahogy az összes vízvezeték-szerelő ezt suttozza: "Cseréld fel az integrációs határokat!!"