Nos, hol is van a hiba?

I. F. Sharygin

2010. január 4.

Számos, magát értelmiséginek valló ember alig ért a matematikához, és bizonytalan még a legegyszerűbb képletekben is. Példaként következzék az iskolában is mindenkinek tanított százalékszámítással foglalkozó feladat!

1. probléma. Egy farmer leszüretelt 10 tonna görögdinnyét, és egy folyón leszállította azt legközelebbi városba. Mint az köztudott, a görögdinnye szinte kizárólag csak vízből áll. Amikor a dinnyéket bepakolták a bárkába, a tömegük 99%-át tette ki víz. Az út során a görögdinnyék valamennyire kiszáradtak, és a víztartalmuk 1%-kal (98%-ra) csökkent. Mekkora volt a dinnyék tömege, amikor kipakolták őket a városban? Sokan nem fogják elhinni az eredményt, még akkor se, ha maguk számolták ki. Javasoljuk az olvasónak, hogy próbálja meg a feladatot önállóan megoldani. Sokan képesek bedőlni a legprimitívebb érveléseknek is, főleg ha azokat elég meggyőzően adják elő. Példaképp nézzük meg ezt a régi feladatot!

2. probléma. Egy visszavonult tábornok úgy döntött, hogy megválik a csizmájától. Elküldte hát a piacra az inasát, hogy adja el őket $15-ért. Az inas találkozott két féllábú veteránnal a piacon, és egyenként $7,50-et kért tőlük. Amikor az inas beszámolt urának az üzletről, az visszaküldte őt $5-ral, mivel szerinte egy veteránnak olcsóbban kellett volna adni a csizmát. De az inas a piacra való úton $3-t italra költött, és csak fejenként $1-t adott vissza a két veteránnak. Számoljuk össze a pénzeket: mindkét veterán fizettet $6,50-et, ez összesen $13, továbbá elivott az inas $3-t. Ez így: $\$13 + \$3 = \$16$. Honnan lett egy dollár többletünk?

(Ilyenfajta gondolatmeneteket szoktak használni például az ígérgető politikusok is.)

Ez a példa viszonylag egyszerű, ám jól mutatja, hogyan futhatunk bele matematikai ellentmondásokba. Az olvasó kényszerítve van rá, hogy elfogadja a meggyőző hibás levezetést, ami ellentmond nyilvánvaló vagy jól ismert matematikai tételnek. (Néha ez a hiba nagyon jelentéktelen és nehezen megtalálható.) Hogy ezt szemléltessük, mutatunk egy geometriai „tételt”.

3. probléma. A következő „tétel” egy kiegészítő elemzés a háromszögek egybevágóságához. Ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögeknél $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ és $ABC\angle = A_1B_1C_1\angle$, akkor ez a két háromszög egybevágó. Ez az úgynevezett $SSA = SSA$ egybevágósági feltétel teljesülése, vagyis két oldalban és egy szögben egyeznek.

„Bizonyítás:” Vegyük fel az AB_2C háromszöget az 1. ábrán látható módon. Ebben a háromszögben $CAB_2\angle = C_1A_1B_1\angle$ és $AB_2 = A_1B_1$. Tehát az SAS egybevágósági feltétel szerint az $A_1B_1C_1$ és AB_2C háromszögek egybevágóak, hiszen két oldalban és közbezárt szögükben egyeznek (tudjuk, hogy $AC = A_1C_1$). Így $ABC\angle = AB_2C\angle$ és $AB = AB_2$. Most pedig húzzuk be a BB_2 szakaszt! Így megkapjuk a BAB_2 egyenlőszárú háromszöget. Következésképpen $ABB_2\angle = AB_2B\angle$. Ugyanakkor megfigyelhető, hogy $CBB_2\angle = CB_2B\angle$, tehát a CBB_2 háromszög szintén egyenlőszárú, és $CB = CB_2$. Így végül megállapíthatjuk, hogy az ACB_2 háromszög egybevágó az ACB háromszöggel, mivel három oldalban megegyeznek, tehát az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek is egybevágóak. Ezzel bebizonyítottuk a „tételt”?

Nem kérjük, hogy megcáfolja a „tételünk” következtetését. Nem nehéz észrevenni, hogy a bizonyítás rossz. De hol van benne a hiba?

Nem mindig könnyű megérteni, hogy egy matematikai állítás miért igaz vagy hamis. A levezetésekben való hibakeresés képessége az egyike legfontosabb készség, amelyet egy hivatásos matematikus elsajátíthat. A matematika története tele van olyan esetekkel, amikor matematikusok hibát találtak olyan bizonyításokban, amelyeket évtizedekig helyesnek tartottak.

Mi további iskolai példákat fogunk megvizsgálni. A soron következő összes feladat tartalmaz „megoldást” is. Vagyis a megoldások megtalálandó hibákat tartalmaznak.

4. probléma. Adott egy $ABCD$ paralelogramma, amelyben $ABD\angle = 40°$. Az ABC és CAD háromszögek körülírt köreinek középpontjai a BD szakaszon vannak. Milyen típusú az $ABCD$ paralelogramma?

„Megoldás:” Legyen O és Q az ABC és CAD háromszögek körülírt köreinek középpontjai (2. ábra)! Mivel ezekből a pontokból az AC-re bocsátott merőlegesek felezik AC-t, megállapíthatjuk, hogy OQ merőleges az AC átlóra. Ebből következik, hogy a paralelogramma átlói merőlegesek egymásra, tehát rombusz.

Tetszik a megoldás?

Néha a trükk a feladat állításában, nem pedig a megoldásában van.

5. probléma. A p és q számok kielégítik az $x^2 + px + q = 0$ egyenletet. Adjuk meg p-t és q-t.

„Megoldás:" A másodfokú egyenlet gyökeire vonatkozó összefüggések segítségével a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} p+q &= -p \\ p \cdot q &= q \end{cases}$$

Megoldásként két számpárt kapunk: $p = q = 1$, illetve $p = 1, q = 2$.

Vannak kétségei a megoldással kapcsolatban?

6. probléma. Oldjuk meg az alábbi egyenletet: $\operatorname{tg}(x + \pi/4) = 3 \cdot \operatorname{ctg} x - 1$

„Megoldás:" Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát az addíciós-tételek segítségével, és vezessük be új változóként $y = \operatorname{tg} x$-et. Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{y+1}{1-y} = \frac{3}{y} - 1$$

Ebből az $y = 3/5$ eredményt kapjuk, tehát $x = \operatorname{tg}^{-1}(3/5) + \pi k$.

Hiánytalan ez a megoldás?

7. probléma. Hány megoldása van a $log_{1/16} x = (1/16)^x$ egyenletnek?

„Megoldás:" A jobb- és a baloldalon lévő kifejezések egymás inverzei. Ha grafikusan ábrázoljuk őket, „láthatjuk", hogy csak az első síknegyed felezőegyenesén van egy közös pontjuk. Tehát az egyenletnek egy megoldása van.

Van kifogása ez ellen?

A következő két feladat kicsit kilóg cikkünk fő témájából. A bennük lévő helyzetek látszólag lehetetlenek, emiatt keltik fel az érdeklődésünket.

8. probléma. Egy kör alapú, derékszögű kúp lehető legnagyobb területű síkmetszetét a csúcspontján keresztül megrajzolva kaptuk meg. Kiderült, hogy így a metszet területe kétszer akkora, mint a tengelypárhuzamos metszet területe. Határozzuk meg a tengelypárhuzamos metszet szögét!

A feladat állítása lehetetlennek tűnik, hiszen egy kúp síkmetszetei közül a tengelypárhuzamos metszetnek van a legnagyobb területe.

9. probléma. Egy gömb középpontja egy másik gömb felszínén fekszik. Tudjuk, hogy a második gömb első által tartalmazott részének felszíne ötöde az első gömb felszínének. Határozzuk meg a két gömb sugarának hányadosát!

A feladat megoldásához szükségünk van a gömbsüveg felszínére (az alapkör nélkül): $S = 2\pi h R$, ahol R a gömb sugara és h a süveg magassága.

„Megoldás:"Az első és második gömb sugara legyen rendre R, illetve r. Fektessünk egy, a két középpontra illeszkedő síkot (5. ábra). Ekkor $OA = OB = R$ és $AB = r$. Legyen C a B-ből az OA-ra állított merőleges talppontja. Így AC annak a gömbsüvegnek a magassága, amely a második gömb első által tartalmazott rész segítségével meghatározott gömbsüveg magassága. Tehát $h = AC$, így felírva az ABC és OBC háromszögekre a Pitagorasztételt az alábbi egyenletet kapjuk: $r^2 - h^2/R^2\,(R-h)^2$, amiből $h = \frac{r^2}{2R}$.

Ezt behelyettesítve a gömbsüveg alapkör nélküli felszínképletébe: $S = \pi r^2$. Ám az első gömb teljes felszíne $4\pi r^2$. Ezek szerint a második gömb első által tartalmazott részének felszíne mindig negyede az első gömb felszínének. De a feladat szövege szerint az ötöde, tehát ellentmondásba ütköztünk. Akkor a feladatnak nincs is megoldása?

10. probléma. Egy gúla alapja egy konvex négyszög, melynek valamelyik két oldala 10 egység, másik két oldala pedig 6 egység hosszú. A gúla magassága 7 egység. Mind a négy oldallap 60°-os szöget zár be az alaplappal. Határozzuk meg a gúla térfogatát!

„Megoldás:" Mivel az összes oldallap ugyanakkora szöget zár be az alappal, az $ABCDS$ gúla S csúcsának az alapra vett merőleges vetülete egybeesik az $ABCD$ négyszög beírt körének középpontjával, O-val (6. ábra). A beírt kör sugara: $7 \operatorname{ctg} 60^\circ = 7/\sqrt{3}$.

Az $ABCD$ négyszög területe megegyezik az ABO, BDO, CDO és DAO háromszögek területeinek összegével. Amit viszont igen könnyű meghatározni. Rendezés után megkapjuk, hogy az alap területe: $(10+6)\cdot 7/\sqrt{3} = 112/\sqrt{3}$. Tehát a gúla térfogata $784/3\sqrt{3}$.

Egyetért az eredménnyel?