Hol van a hiba?

Hibás megoldások leleplezése

1. PROBLÉMA

Feladat

Egy farmer leszüretelt $10\mathrm{t}$ görögdinnyét, és a folyón elszállította a legközelebbi városba. Amikor a dinnyéket bepakolták a bárkába, a tömegük 99%-át a víz tette ki. Az út során kissé kiszáradtak, s a víztartalmuk 1%-kal csökkent (98%-ra).

Mennyi volt a dinnyék tömege, amikor kipakolták őket a városban?

1. PROBLÉMA

Feladat

Egy farmer leszüretelt 10t görögdinnyét, és a folyón elszállította a legközelebbi városba. Amikor a dinnyéket bepakolták a bárkába, a tömegük 99%-át a víz tette ki. Az út során kissé kiszáradtak, s a víztartalmuk 1%-kal csökkent (98%-ra).

Mennyi volt a dinnyék tömege, amikor kipakolták őket a városban?

Hibás megoldás

Mivel a dinnyék víztartalma 99%-ról 98%-ra csökkent, így új tömegük $\frac{98\%}{99\%} \cdot 10 \approx 9{,}9\mathrm{t}$.

1. PROBLÉMA

Feladat

Egy farmer leszüretelt $10\mathrm{t}$ görögdinnyét, és a folyón elszállította a legközelebbi városba. Amikor a dinnyéket bepakolták a bárkába, a tömegük 99%-át a víz tette ki. Az út során kissé kiszáradtak, s a víztartalmuk 1%-kal csökkent (98%-ra).
Mennyi volt a dinnyék tömege, amikor kipakolták őket a városban?

Helyes megoldás

1. PROBLÉMA

Feladat

Egy farmer leszüretelt 10t görögdinnyét, és a folyón elszállította a legközelebbi városba. Amikor a dinnyéket bepakolták a bárkába, a tömegük 99%-át a víz tette ki. Az út során kissé kiszáradtak, s a víztartalmuk 1%-kal csökkent (98%-ra).
Mennyi volt a dinnyék tömege, amikor kipakolták őket a városban?

Helyes megoldás

A dinnyék víztartalma eredetileg 99%, vagyis a maradék 1% szárazanyag. Ez 0,1t szárazanyag-tartalmat jelent. Az út végén ez a 0,1t már a teljes tömeg 2%-a volt (mivel ekkor a víztartalom már csak 98% volt), ami azt jelenti, hogy a teljes tömeg mindössze $\frac{100\%}{2\%} \cdot 0{,}1 = 5\mathrm{t}$ volt, mire a dinnyék a városba értek.

2. PROBLÉMA

Feladat

Egy tábornok úgy döntött, hogy eladja a csizmáját. Elküldte inasát a piacra, hogy adja el 15\$-ért. Az inas találkozott két féllábú veteránnal, és eladta nekik a csizmákat fejenként 7,50\$-ért. Mikor az inas beszámolt erről, az visszaküldte őt a piacra 5\$-ral, mivel úgy gondolta, egy veteránnak olcsóbban kell adni a csizmát. De az inas az úton elköltött 3\$-t italra, és csak fejenként 1\$-t adott vissza a két veteránnak.

Számoljuk össze: mindkét veterán fizetett 6,50\$-t: $2 \cdot 6{,}50\$ = 13\$$.

Az inas 3\$-t elivott: $13\$ + 3\$ = 16\$$.

Honnan van ez az 1\$ többlet?

2. probléma

Feladat

Egy tábornok úgy döntött, hogy eladja a csizmáját. Elküldte inasát a piacra, hogy adja el 15\$-ért. [...]
Számoljuk össze: mindkét veterán fizetett 6,50\$-t: $2 \cdot 6{,}50\$ = 13\$$.
Az inas 3\$-t elivott: $13\$ + 3\$ = 16\$$.
Honnan van ez az 1\$ többlet?

Hol a hiba?

2. PROBLÉMA

Feladat

Egy tábornok úgy döntött, hogy eladja a csizmáját. Elküldte inasát a piacra, hogy adja el 15\$-ért. [. . .]
Számoljuk össze: mindkét veterán fizetett 6,50\$-t: $2 \cdot 6{,}50\$ = 13\$$.
Az inas 3\$-t elivott: $13\$ + 3\$ = 16\$$.
Honnan van ez az 1\$ többlet?

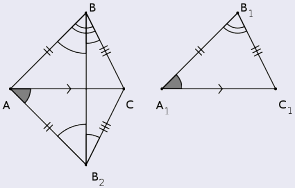
Hol a hiba?

Amikor a 13\$-hoz hozzáadtunk 3\$-t, kétszer számoltuk az inas által elivott pénzt. A 13\$-ból 10\$ az, amit a tábornok kapott, és 3\$, amit az inas elköltött.

3. PROBLÉMA

Feladat

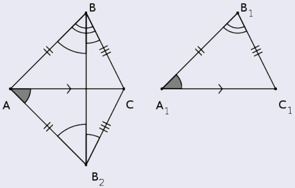
A következő „tétel" egy kiegészítő vizsgálat a háromszögek egybevágóságához. Ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, valamint $ABC\angle = A_1B_1C_1\angle$, akkor ezek a két háromszög egybevágó, mivel két oldaluk és egy szögük megegyezik.



3. PROBLÉMA

Feladat

A következő „tétel” egy kiegészítő vizsgálat a háromszögek egybevágóságához. Ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, valamint $ABC\angle = A_1B_1C_1\angle$, akkor ezek a két háromszög egybevágó, mivel két oldaluk és egy szögük megegyezik.



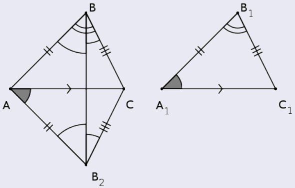
„Bizonyítás”

Vegyük fel az AB_2C háromszöget az ábrán látható módon.

3. PROBLÉMA

Feladat

A következő „tétel" egy kiegészítő vizsgálat a háromszögek egybevágóságához. Ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, valamint $ABC\angle = A_1B_1C_1\angle$, akkor ezek a két háromszög egybevágó, mivel két oldaluk és egy szögük megegyezik.



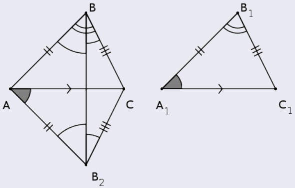
„Bizonyítás"

Ebben a háromszögben $CAB_2\angle = C_1A_1B_1\angle$, valamint $AB_2 = A_1B_1$, ezért $A_1B_1C_1 \cong AB_2C$, hiszen két oldalban és az általuk közbezárt szögben megegyeznek (mivel $AC = A_1C_1$).

3. PROBLÉMA

Feladat

A következő „tétel” egy kiegészítő vizsgálat a háromszögek egybevágóságához. Ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, valamint $ABC\angle = A_1B_1C_1\angle$, akkor ezek a két háromszög egybevágó, mivel két oldaluk és egy szögük megegyezik.



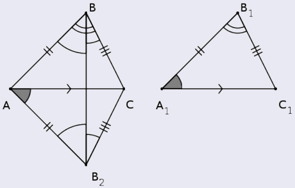
„Bizonyítás”

Ebből következik, hogy $ABC\angle = AB_2C\angle$, valamint $AB = AB_2$

3. PROBLÉMA

Feladat

A következő „tétel” egy kiegészítő vizsgálat a háromszögek egybevágóságához. Ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, valamint $ABC\angle = A_1B_1C_1\angle$, akkor ezek a két háromszög egybevágó, mivel két oldaluk és egy szögük megegyezik.



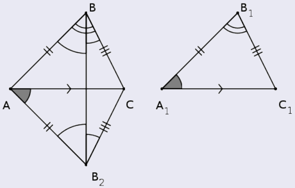
„Bizonyítás”

Húzzuk be a BB_2 szakaszt. Így létrejön a BAB_2 egyenlőszárú háromszög. Következésképpen $ABB_2\angle = AB_2B\angle$.

3. PROBLÉMA

FELADAT

A következő „tétel” egy kiegészítő vizsgálat a háromszögek egybevágóságához. Ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, valamint $ABC\angle = A_1B_1C_1\angle$, akkor ezek a két háromszög egybevágó, mivel két oldaluk és egy szögük megegyezik.

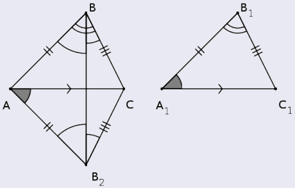


„BIZONYÍTÁS”

Ugyanakkor megfigyelhető, hogy $CBB_2\angle = CB_2B\angle$, tehát a CBB_2 háromszög szintén egyenlőszárú, valamint $CB = CB_2$.

3. PROBLÉMA

Feladat



A következő „tétel” egy kiegészítő vizsgálat a háromszögek egybevágóságához. Ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, valamint $ABC\angle = A_1B_1C_1\angle$, akkor ezek a két háromszög egybevágó, mivel két oldaluk és egy szögük megegyezik.

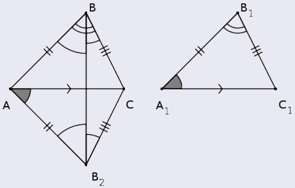
„Bizonyítás”

Így végül, megállapíthatjuk, hogy az $ACB_2 \cong ACB$, mivel három oldalban megegyeznek, következésképpen $ABC \cong A_1B_1C_1$

3. PROBLÉMA

Feladat

A következő „tétel” egy kiegészítő vizsgálat a háromszögek egybevágóságához. Ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, valamint $ABC\angle = A_1B_1C_1\angle$, akkor ezek a két háromszög egybevágó, mivel két oldaluk és egy szögük megegyezik.

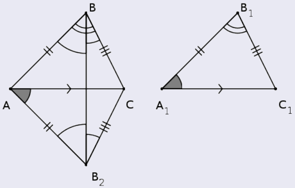


Hol a hiba?

3. PROBLÉMA

Feladat

A következő „tétel” egy kiegészítő vizsgálat a háromszögek egybevágóságához. Ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, valamint $ABC\angle = A_1B_1C_1\angle$, akkor ezek a két háromszög egybevágó, mivel két oldaluk és egy szögük megegyezik.



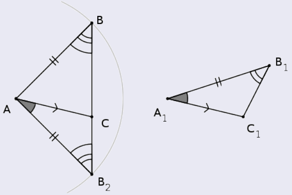
Hol a hiba?

Ezen egybevágsósági feltétel esetén ki kell kötni, hogy a két oldal közül a nem kisebbikkel szemközti szögben egyeznek meg.

3. PROBLÉMA

Ellenpélda

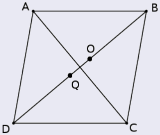
Ha a BB_2 szakasz áthalad a C ponton, ahogy az ábrán látható, az indoklás hamis. Ebben az esetben, bár $CBB_2\angle$ és $CB_2B\angle$ egyenlőek, értékük 0, emiatt nem használhatjuk fel az egyenlőszárú háromszögek tulajdonságait.



4. PROBLÉMA

Feladat

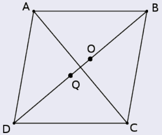
Adott egy $ABCD$ paralelogramma, amelyben $ABD\angle = 40^\circ$. Az ABC és CAD háromszögek körülírt köreinek középpontjai a BD átlóra esnek. Miféle paralelogrammáról van szó?



4. PROBLÉMA

FELADAT

Adott egy $ABCD$ paralelogramma, amelyben $ABD\angle = 40^\circ$. Az ABC és CAD háromszögek körülírt köreinek középpontjai a BD átlóra esnek. Miféle paralelogrammáról van szó?



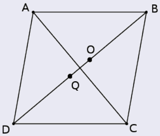
HIBÁS MEGOLDÁS

Legyenek O és Q az ABC és CAD háromszögek körülírt köreinek középpontjai. Mivel ezekből a pontokból az AC-re bocsátott merőlegesek felezik AC-t, megállapíthatjuk, hogy OQ merőleges az AC átlóra. Ebből következik, hogy a paralelogramma átlói merőlegesek egymásra, tehát egy rombuszról beszélünk.

4. PROBLÉMA

Feladat

Adott egy $ABCD$ paralelogramma, amelyben $ABD\angle = 40°$. Az ABC és CAD háromszögek körülírt köreinek középpontjai a BD átlóra esnek. Miféle paralelogrammáról van szó?

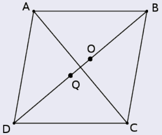


Hol a hiba?

4. PROBLÉMA

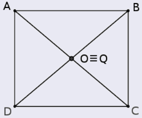
Feladat

Adott egy $ABCD$ paralelogramma, amelyben $ABD\angle = 40°$. Az ABC és CAD háromszögek körülírt köreinek középpontjai a BD átlóra esnek. Miféle paralelogrammáról van szó?



Hol a hiba?

Van egy eset, amikor mindkét említett kör középpontja egybeesik a paralelogramma középpontjával, ebben az esetben egy téglalapról beszélünk.



5. PROBLÉMA

Feladat

A p és q számok kielégítik az $x^2 + px + q = 0$ egyenletet.
Adjuk meg p-t és q-t.

5. PROBLÉMA

Feladat

A p és q számok kielégítik az $x^2 + px + q = 0$ egyenletet.
Adjuk meg p-t és q-t.

Hibás megoldás

A másodfokú egyenlet gyökeire vonatkozó összefüggéseket felhasználva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} p + q = -p, \\ p \cdot q = q \end{cases}$$

Ezt megoldva két számpárt kapunk: $p = q = 0$ és $p = 1, q = -2$.

5. PROBLÉMA

Feladat

A p és q számok kielégítik az $x^2 + px + q = 0$ egyenletet.
Adjuk meg p-t és q-t.

Hol a hiba?

5. PROBLÉMA

Feladat

A p és q számok kielégítik az $x^2 + px + q = 0$ egyenletet. Adjuk meg p-t és q-t.

Hol a hiba?

A szöveg nem mondja, hogy az egyenletnek nincs más gyöke p-n és q-n kívül. Ugyancsak megoldás a $p = q = -\frac{1}{2}$ számpár, ebben az esetben az 1 is kielégíti az egyenletet.

6. PROBLÉMA

Feladat

Oldjuk meg a következő egyenletet: $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3 \cdot \operatorname{ctg} x - 1$

6. PROBLÉMA

Feladat

Oldjuk meg a következő egyenletet: $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=3\cdot\operatorname{ctg}x-1$

Hibás megoldás

Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát az addíciós-tételek segítségével, és vezessük be új változóként $y=\operatorname{tg}x$-et. Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{y+1}{1-y}=\frac{3}{y}-1$$

Ebből $y=\frac{3}{5}$-öt kapjuk, ebből $x=\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+\pi\cdot k$

6. PROBLÉMA

Feladat

Oldjuk meg a következő egyenletet: $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=3\cdot\operatorname{ctg}x-1$

Hol a hiba?

6. PROBLÉMA

Feladat

Oldjuk meg a következő egyenletet: $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=3\cdot\operatorname{ctg}x-1$

Hol a hiba?

Az egyenlet átalakításakor leszűkítettük a benne szereplő függvények értelmezési tartományát, így a következő megoldások sorozata elveszett: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$.

7. PROBLÉMA

Feladat

Hány megoldása van az $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ egyenletnek?

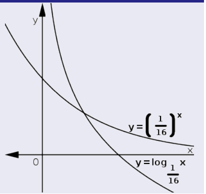
7. PROBLÉMA

Feladat

Hány megoldása van az $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ egyenletnek?

Hibás megoldás

A jobb- és a baloldalon lévő kifejezések egymás inverzei. Ha grafikusan ábrázoljuk őket, „láthatjuk”, hogy csak az első síknegyed felezőegyenesén van egy közös pontjuk. Tehát az egyenletnek egy megoldása van.



7. PROBLÉMA

Feladat

Hány megoldása van az $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ egyenletnek?

Hol a hiba?

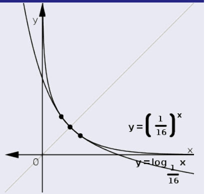
7. PROBLÉMA

Feladat

Hány megoldása van az $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ egyenletnek?

Hol a hiba?

Az ábra rossz. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az $\frac{1}{2}$ és az $\frac{1}{4}$ számok mindketten kielégítik az egyenletet. Ezek a megoldások az $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ és az $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{1}\right)$ pontokhoz tartoznak az $\log_{\frac{1}{16}} x$ és az $\left(\frac{1}{16}\right)^x$ függvények ábrázolásakor. Ezek a függvények szimmetrikusak az $x = y$ egyenesre, tehát ezen az egyenesen is metszik egymást.



7. PROBLÉMA

Feladat

Hány megoldása van az $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ egyenletnek?

Helyes megoldás

Analízis segítségével könnyen bizonyítható, hogy az egyenletnek pontosan három megoldása van. Ugyancsak könnyen belátható, hogy az $\log_a x = a^x$ típusú egyenleteknek nincs háromnál több megoldása, csak azt kell belátni, hogy a különbségük által meghatározott függvény maximum 3 helyen metszi a tengelyt, azaz e függvény deriváltja legfeljebb kétszer veszi fel a 0 értéket.

7. PROBLÉMA

Feladat

Hány megoldása van az $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ egyenletnek?

Helyes megoldás

A $f(x) = \log_{\frac{1}{16}} x - \left(\frac{1}{16}\right)^x$ lokális szélsőértékeit keressük, azaz a $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln \frac{1}{16}} - \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{16}$ zérushelyei kellenek.

7. PROBLÉMA

Feladat

Hány megoldása van az $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ egyenletnek?

Helyes megoldás

A $f(x) = \log_{\frac{1}{16}} x - \left(\frac{1}{16}\right)^x$ lokális szélsőértékeit keressük, azaz
a $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln \frac{1}{16}} - \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{16}$ zérushelyei kellenek.
$\frac{1}{x \cdot \ln \frac{1}{16}} - \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{16} = 0$ kicsit átalakítva:

7. PROBLÉMA

FELADAT

Hány megoldása van az $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ egyenletnek?

HELYES MEGOLDÁS

A $f(x) = \log_{\frac{1}{16}} x - \left(\frac{1}{16}\right)^x$ lokális szélsőértékeit keressük, azaz a $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln \frac{1}{16}} - \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{16}$ zérushelyei kellenek.

$\frac{1}{x \cdot \ln \frac{1}{16}} - \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{16} = 0$ kicsit átalakítva: $\frac{1}{x \cdot \ln^2 \frac{1}{16}} = \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

Ennek $\frac{1}{16}$ alapú logaritmusát véve:

7. PROBLÉMA

Feladat

Hány megoldása van az $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ egyenletnek?

Helyes megoldás

A $\mathrm{f}(x) = \log_{\frac{1}{16}} x - \left(\frac{1}{16}\right)^x$ lokális szélsőértékeit keressük, azaz a $\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln \frac{1}{16}} - \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{16}$ zérushelyei kellenek.

$\frac{1}{x \cdot \ln \frac{1}{16}} - \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{16} = 0$ kicsit átalakítva: $\frac{1}{x \cdot \ln^2 \frac{1}{16}} = \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

Ennek $\frac{1}{16}$ alapú logaritmusát véve: $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{x \cdot \ln^2 \frac{1}{16}} = x$.

Ezt kicsit átalakítva:

7. PROBLÉMA

Feladat

Hány megoldása van az $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ egyenletnek?

Helyes megoldás

A $f(x) = \log_{\frac{1}{16}} x - \left(\frac{1}{16}\right)^x$ lokális szélsőértékeit keressük, azaz a $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln \frac{1}{16}} - \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{16}$ zérushelyei kellenek.

$\frac{1}{x \cdot \ln \frac{1}{16}} - \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{16} = 0$ kicsit átalakítva: $\frac{1}{x \cdot \ln^2 \frac{1}{16}} = \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

Ennek $\frac{1}{16}$ alapú logaritmusát véve: $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{x \cdot \ln^2 \frac{1}{16}} = x$.

Ezt kicsit átalakítva: $-\log_{\frac{1}{16}} x = x + \log_{\frac{1}{16}} \ln^2 \frac{1}{16}$.

7. PROBLÉMA

Feladat

Hány megoldása van az $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ egyenletnek?

Helyes megoldás

A $f(x) = \log_{\frac{1}{16}} x - \left(\frac{1}{16}\right)^x$ lokális szélsőértékeit keressük, azaz
a $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln \frac{1}{16}} - \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{16}$ zérushelyei kellenek.
$\frac{1}{x \cdot \ln \frac{1}{16}} - \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{16} = 0$ kicsit átalakítva: $\frac{1}{x \cdot \ln^2 \frac{1}{16}} = \left(\frac{1}{16}\right)^x$.
Ennek $\frac{1}{16}$ alapú logaritmusát véve: $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{x \cdot \ln^2 \frac{1}{16}} = x$.
Ezt kicsit átalakítva: $-\log_{\frac{1}{16}} x = x + \log_{\frac{1}{16}} \ln^2 \frac{1}{16}$.
Az egyenlet mindkét oldalát ábrázolva látható, hogy két helyen metszik egymást.

8. PROBLÉMA

Feladat

Egy egyenes körkúp lehető legnagyobb területű síkmetszetét a csúcspontján keresztül megrajzolva kaptuk meg. Kiderült, hogy e metszet területe kétszer akkora, mint a tengelypárhuzamos metszeté. Határozzuk meg a tengelypárhuzamos metszet csúcsánál lévő szöget. A feladat állítása lehetetlennek tűnik, hiszen egy kúp síkmetszetei közül a tengellyel párhuzamosnak a legnagyobb a területe.

8. PROBLÉMA

Feladat

Egy egyenes körkúp lehető legnagyobb területű síkmetszetét a csúcspontján keresztül megrajzolva kaptuk meg. Kiderült, hogy e metszet területe kétszer akkora, mint a tengelypárhuzamos metszeté. Határozzuk meg a tengelypárhuzamos metszet csúcsánál lévő szöget. A feladat állítása lehetetlennek tűnik, hiszen egy kúp síkmetszetei közül a tengellyel párhuzamosnak a legnagyobb a területe.

Hol a hiba?

8. PROBLÉMA

Feladat

Egy egyenes körkúp lehető legnagyobb területű síkmetszetét a csúcspontján keresztül megrajzolva kaptuk meg. Kiderült, hogy e metszet területe kétszer akkora, mint a tengelypárhuzamos metszeté. Határozzuk meg a tengelypárhuzamos metszet csúcsánál lévő szöget. A feladat állítása lehetetlennek tűnik, hiszen egy kúp síkmetszetei közül a tengellyel párhuzamosnak a legnagyobb a területe.

Hol a hiba?

A kúp csúcsán áthaladó metszetek egyenlőszárú háromszögeket határoznak meg. Jelöljük α-val a tengelypárhuzamos metszet csúcsánál lévő szöget, ϕ-vel pedig egy tetszőleges másik csúcsánál lévőt. Ekkor $0 < \phi \leq \alpha$.

8. PROBLÉMA

FELADAT

Egy egyenes körkúp lehető legnagyobb területű síkmetszetét a csúcspontján keresztül megrajzolva kaptuk meg. Kiderült, hogy e metszet területe kétszer akkora, mint a tengelypárhuzamos metszeté. Határozzuk meg a tengelypárhuzamos metszet csúcsánál lévő szöget. A feladat állítása lehetetlennek tűnik, hiszen egy kúp síkmetszetei közül a tengellyel párhuzamosnak a legnagyobb a területe.

HOL A HIBA?

Ezen metszetek területe $\sin\phi$-vel arányos. Tehát ha $\alpha \leq 90^\circ$, akkor a tengelypárhuzamos metszeté a legnagyobb terület. De ha $\alpha > 90^\circ$, akkor a legnagyobb területtel rendelkező metszet az, amire $\phi = 90^\circ$. A feladat feltételei miatt $\alpha > 90^\circ$ és $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, tehát $\alpha = 150^\circ$.

9. PROBLÉMA

FELADAT

Egy gömb középpontja egy másik gömb felszínén fekszik. Tudjuk, hogy a második gömb elsőn belül eső részének felszíne ötöde az első gömb felszínének.

Határozzuk meg a két gömb sugarának hányadosát.

A gömbsüveg felszíne: $S = 2\pi hR$, ahol R a gömb sugara, h pedig a süveg magassága

9. PROBLÉMA

Feladat

Egy gömb középpontja egy másik gömb felszínén fekszik. Tudjuk, hogy a második gömb elsőn belül eső részének felszíne ötöde az első gömb felszínének.
Határozzuk meg a két gömb sugarának hányadosát.

Hibás megoldás

Az első és második gömb sugara legyen rendre R, illetve r. Fektessünk egy, a két középpontra illeszkedő síkot. Ekkor $OA = OB = R$ és $AB = r$. Legyen C a B-ből az OA-ra állított merőleges talppontja. Így AC annak a gömbsüvegnek a magassága, amely a második gömb első által tartalmazott rész segítségével meghatározott gömbsüveg magassága.

9. PROBLÉMA

Feladat

Egy gömb középpontja egy másik gömb felszínén fekszik. Tudjuk, hogy a második gömb elsőn belül eső részének felszíne ötöde az első gömb felszínének.
Határozzuk meg a két gömb sugarának hányadosát.

Hibás megoldás

Tehát $h = AC$. ABC és OBC háromszögekre felírva a Pitagorasz-tételt az alábbi egyenletet kapjuk: $r^2 - h^2 = R^2 - (R - h)^2$, amiből $h = \frac{r^2}{2R}$.

9. PROBLÉMA

Feladat

Egy gömb középpontja egy másik gömb felszínén fekszik. Tudjuk, hogy a második gömb elsőn belül eső részének felszíne ötöde az első gömb felszínének.
Határozzuk meg a két gömb sugarának hányadosát.

Hibás megoldás

Ezt behelyettesítve a gömbsüveg alapkör nélküli felszínképletébe: $S = \pi r^2$. Ám az első gömb teljes felszíne $4\pi r^2$. Ezek szerint a második gömb első által tartalmazott részének felszíne mindig negyede az első gömb felszínének, tehát a feladatnak nincs megoldása.

9. PROBLÉMA

Feladat

Egy gömb középpontja egy másik gömb felszínén fekszik. Tudjuk, hogy a második gömb elsőn belül eső részének felszíne ötöde az első gömb felszínének.
Határozzuk meg a két gömb sugarának hányadosát.

Hol a hiba?

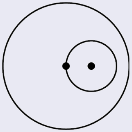
9. PROBLÉMA

Feladat

Egy gömb középpontja egy másik gömb felszínén fekszik. Tudjuk, hogy a második gömb elsőn belül eső részének felszíne ötöde az első gömb felszínének.
Határozzuk meg a két gömb sugarának hányadosát.

Hol a hiba?

Nem vettük figyelembe azt az esetet, amikor a második gömb teljesen az első belsejében van, ekkor 5 a második gömb felületének aránya az elsőéhez. Tehát a sugaraik aránya $\sqrt{5}$.



10. PROBLÉMA

Feladat

Egy gúla alapja egy konvex négyszög, melynek két oldala 10, másik két oldala pedig 6 egység. A gúla magassága 7 egység. Az összes oldallap 60°-os szöget zár be az alaplappal.
Határozzuk meg a gúla térfogatát.

10. PROBLÉMA

Feladat

Egy gúla alapja egy konvex négyszög, melynek két oldala 10, másik két oldala pedig 6 egység. A gúla magassága 7 egység. Az összes oldallap 60°-os szöget zár be az alaplappal.
Határozzuk meg a gúla térfogatát.

Hibás megoldás

Mivel az összes oldallap ugyanakkora szöget zár be az alappal, az $ABCDS$ gúla S csúcsának az alapra vett merőleges vetülete egybeesik az $ABCD$ négyszög beírt körének középpontjával, O-val. A beírt kör sugara $7 \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Az $ABCD$ négyszög területe megegyezik az ABO, BDO, CDO és DAO háromszögek területeinek összegével. Ezt igen könnyű meghatározni. Rendezés után megkapjuk, hogy az alap területe $\frac{(10+6)\cdot 7}{\sqrt{3}} = \frac{112}{\sqrt{3}}$. Tehát a gúla térfogata $\frac{784}{3\sqrt{3}}$.

10. PROBLÉMA

Feladat

Egy gúla alapja egy konvex négyszög, melynek két oldala 10, másik két oldala pedig 6 egység. A gúla magassága 7 egység. Az összes oldallap 60°-os szöget zár be az alaplappal.
Határozzuk meg a gúla térfogatát.

Hol a hiba?

10. PROBLÉMA

Feladat

Egy gúla alapja egy konvex négyszög, melynek két oldala 10, másik két oldala pedig 6 egység. A gúla magassága 7 egység. Az összes oldallap 60°-os szöget zár be az alaplappal.
Határozzuk meg a gúla térfogatát.

Hol a hiba?

Vegyük az $ABCD$ négyszöget, amelyben $AB = BC = 10$, valamint $AD = DC = 6$. Ekkor $BAD\angle = BCD\angle$. A négyszög területe akkor maximális, ha ez a két szög derékszög. Ekkor a négyszög területe 60, ami kevesebb mint a megoldásban szereplő $\frac{112}{\sqrt{3}}$.
Tehát a feladatnak nincs megoldása?

10. PROBLÉMA

Feladat

Egy gúla alapja egy konvex négyszög, melynek két oldala 10, másik két oldala pedig 6 egység. A gúla magassága 7 egység. Az összes oldallap 60°-os szöget zár be az alaplappal.
Határozzuk meg a gúla térfogatát.

Helyes megoldás

10. PROBLÉMA

Feladat

Egy gúla alapja egy konvex négyszög, melynek két oldala 10, másik két oldala pedig 6 egység. A gúla magassága 7 egység. Az összes oldallap $60°$-os szöget zár be az alaplappal.
Határozzuk meg a gúla térfogatát.

Helyes megoldás

A feladat leírásából az nem következik, hogy a csúcspont vetülete a beírt kör középpontja kell legyen, csak az, hogy az AB, BC, CD, DA egyenesektől egyenlő távol kell lennie, s ez a távolság $\frac{7}{\sqrt{3}}$. Ez a pont a négyszög területén kívülre is eshet. Nevezzük el O_1-nek.
Ekkor az $ABCD$ négyszög területe felírható a következő módon: $(ABO_1 + BCO_1) - (CDO_1 + DAO_1)$. Ezt kiszámolva a négyszög területe $(10-6) \cdot 7\sqrt{3} = 28\sqrt{3}$. Tehát a gúla térfogata $\frac{196}{\sqrt{3}}$.

Elkövetők

Tanerő:

- Groma Virág

Elkövetők

B tagozat:

- Botos Csongor
- Farkas Gergő

Elkövetők

C tagozat:

- Balla Attila
- Csajbók Zsófia
- Györgyi Ábel
- Korondi Zénó
- Szendrei Péter
- Szentmihályi Zsombor

Elkövetők

D tagozat:

- Garaczi Larion