BDG Matektábor 2009

Készítette a Berzsenyi Dániel Gimnázium matematika munkaközössége

2010. április 11.

Tartalomjegyzék

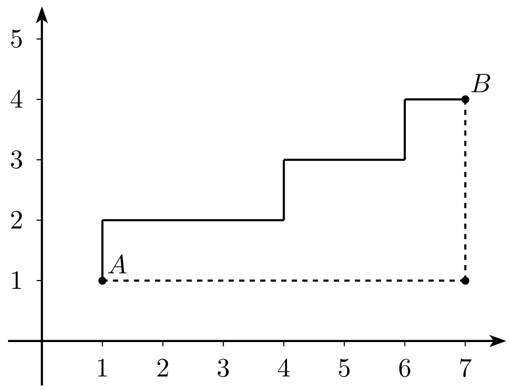
Csajbók Bence: Taxi-geometria

Távolság

Definíció (szöveges változat): A derékszögű koordinátarendszerben két pont távolsága legyen annak a legrövidebb törött vonalnak a hossza, mely őket összeköti és benne minden szakasz párhuzamos valamelyik tengellyel.

Definíció (képlettel): $P(p_x, p_y)$ és $Q(q_x, q_y)$ pontok $d(P, Q)$ távolsága legyen: $|p_x - q_x| + |p_y - q_y|$.

1. észrevétel: A két definíció ekvivalens (*1. ábra*).



2. észrevétel: A fent definiált $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ függvény metrika.

a.) $d(x, y) = 0$ pontosan akkor, hogyha $x = y$

b.) $d(x, y) = d(y, x)$

c.) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Az a.) és b.) pont triviálisan teljesül, a c.) pont a háromszög-egyenlőtlenségből következik:

$|x_x - z_x| \leq |x_x - y_x| + |y_x - z_x|$

$|x_y - z_y| \leq |x_y - y_y| + |y_y - z_y|$

Tehát:

$$|x_x - z_x| + |x_y - z_y| \leq |x_x - y_x| + |y_x - z_x| + |x_y - y_y| + |y_y - z_y|$$

Másképp írva:

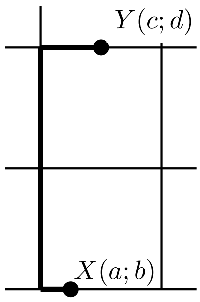
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Megjegyzés: Az előző bizonyítás felesleges, ha a szöveges definíciót használjuk, hiszen két törött vonal uniója is törött vonal, tehát $d(a, c)$ legfeljebb $d(a, b) + d(b, c)$ lehet.

Kitekintés

A taxi-távolságot használó geometriát elsőként Hermann Minkowski vizsgálta, a 19. században. Ezt az euklideszitől különböző metrikát szokás *Manhattan-távolságnak* is nevezni. Ez utóbbi elnevezés onnan ered, hogy Manhattan szigetén az utcák szabályos négyzetrácsot alkotnak, így ha egy taxi a legrövidebb úton akar egy kereszteződésből egy másikba eljutni, akkor éppen a taxi-távolság által megadott hosszúságú úton teheti ezt meg.

A Manhattan-távolságot definiálhatnánk máshogy is. Ha továbbra is négyzetrácsot alkotó úthálózatot feltételezünk, de nem csak kereszteződések között akarunk közlekedni, akkor két pont közötti legrövidebb út hosszát – bizonyos speciális esetekben – a taxi-távolságtól különböző formulával határozhatjuk meg. (*2. ábra*)



Ha a rácsnégyzet egységnyi oldalú, akkor az ábrán látható (,,azonos függőleges sávba eső") pontok távolsága: $d(X,Y) = |d-b| + \min(\{a\}+\{c\}, 2-\{a\}-\{c\})$.

A továbbiakban mi az első távolságdefiníciót fogjuk használni.

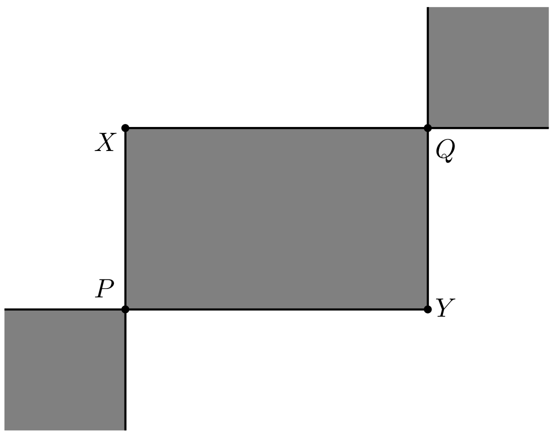
Körök és egyenesek

3. észrevétel: Ebben a metrikában az egységkör egy négyzet, melynek csúcsai: $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ hiszen az egységkör egyenlete: $|x|+|y|=1$. Hasonlóan egy $P(p_x,p_y)$ középpontú r sugarú kör, egy olyan négyzet lesz, melynek csúcsai: $(p_x+r,p_y), (p_x,p_y+r), (p_x-r,p_y), (p_x,p_y-r)$.

Def.: Az x_1,x_2,x_3 pontokra azt mondjuk, hogy egy egyenesre esnek, ha van olyan $\pi \in S_3$ permutáció, hogy $d(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)}) + d(x_{\pi(2)},x_{\pi(3)}) = d(x_{\pi(3)},x_{\pi(1)})$, vagyis a pontok egy permutációja egyenlőséggel teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget.

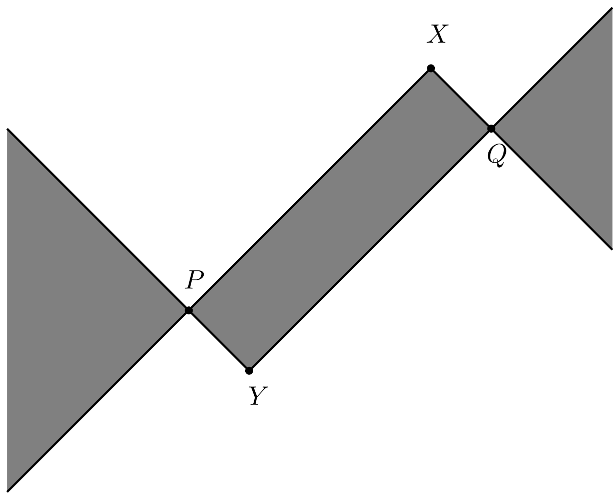
4. észrevétel: Az egyenesek a monoton függvények.

3. ábra: Az alábbi ábrán szürkével jelöltem azt a területet, ahová a P-vel és Q-val egy egyenesre eső pontok eshetnek:



XP és YQ az y, míg XQ és YP félegyenesek az x tengellyel párhuzamosak.

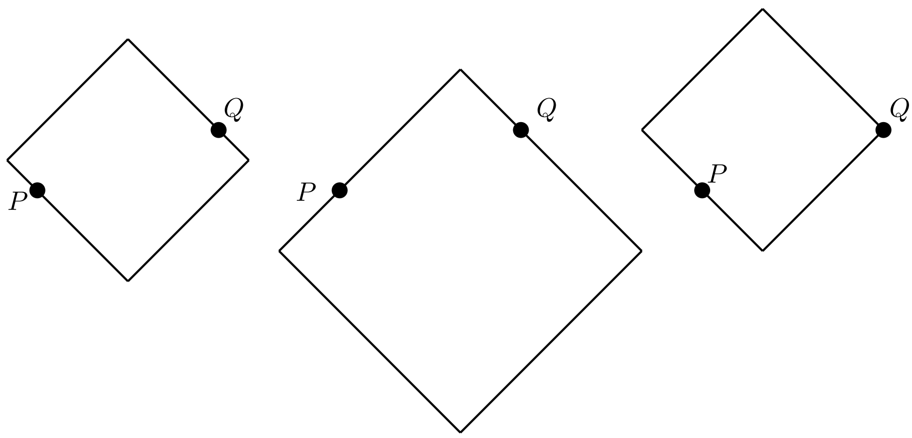
4. ábra: Ezen az ábrán azokat a pontokat jelöltem szürkével, melyek nem eshetnek egy körre P-vel és Q-val:



Itt XP és YQ az $y = x$, míg YP és XQ az $y = -x$ egyenesekkel párhuzamos.

Húzzuk be P-n át az $y = x$ és $y = -x$ egyeneseket. T.f.h. Q a jobb-oldali sík-negyedbe esik és, hogy $p_y < q_y$. (A maradék 7-eset is hasonlóan elintézhető.)

5. ábra: Egy kör 3-féleképpen illeszkedhet P-re és Q-ra:

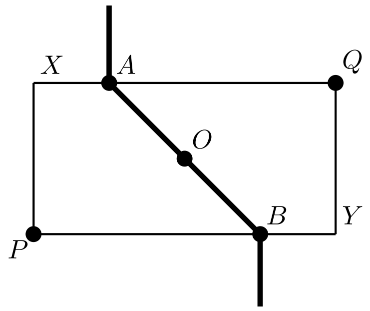


A négyzetek nagyságát (illetve az 1. esetben a helyét) változtatva kapjuk, hogy (a 4. ábrán) a szürke részeken kívül bármely ponton át mehet P-n és Q-n is átmenő kör.

5. észrevétel: Ebben a metrikában nem igaz, hogy bármely három ponton át megy egyenes vagy kör. Hiszen a 3. ábrán szürke rész nem fedi a 4. ábrán szürke részt. Három ponton át mehet egyenes ÉS kör is, illetve 3 pontnak lehet több köréírt köre is.

6. észrevétel: Mi lesz azon pontok halmaza melyek két rögzített ponttól egyenlő távolságra vannak? Megint tegyük fel hogy a rögzített P és Q pontokra teljesülnek azok a feltételek melyeket az 5. ábra előtt feltettünk.

6. ábra:



$PXQY$ téglalap O középpontján át húzzunk egy $y = -x$ -szel párhuzamos szakaszt a téglalap oldaláig (A és B) pontok. Ez a szakasz és az A ill. B pontból az ábrán látható módon indított, y tengellyel párhuzamos félegyenesek alkotják a keresett ponthalmazt.

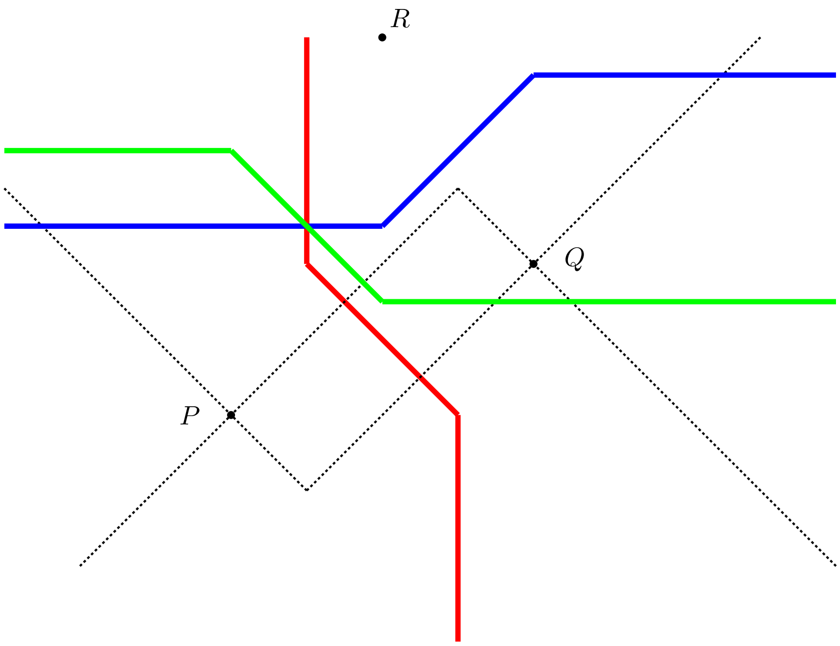
Ez 5 darab egyszerű egyenlet megoldásából jön ki (az 5 egyenlet onnan adódik, hogy a PX, XQ, QY, YP egyenesek által meghatározott síkrészek melyikében keressük az $|x-p_x|+|y-p_y| = |x-q_x|+|y-q_y|$ egyenlet (x, y) megoldásait). A másik 7 eset hasonlóan elintézhető és hasonló eredményeket ad.

Megjegyzés: Elemi geometriai úton (számolás nélkül) is megkapható a felezőmerőleges.

Speciális eset: Ha P és Q egy tengelypárhuzamos négyzet két szemközti csúcsa (az egyszerűség kedvéért legyen $P = (0; 0)$ és $Q = (1; 1)$), akkor azok a pontok melyek egyenlő távol vannak tőlük:

A $(0; 1)$-et és $(1; 0)$-t összekötő szakasz és az $y = 1$, $x = 0$ egyenesek által meghatározott bal-felső síknegyed, valamint az $y = 0$ és az $x = 1$ egyenesek által meghatározott jobb-alsó síknegyed.

7. ábra:



Itt az látható, hogy ha R-et megfelelően választjuk (ebben segítenek a szaggatott vonalak), akkor a piros, zöld és kék törött vonalak egy ponton mennek át. (A piros a P-től és Q-tól, a kék az R-től és Q-tól, a zöld a P-től és R-től egyenlő távolságra lévő pontokat jelöli.) Hiszen ha létezik a köréírt kör, akkor annak középpontja rajta kell legyen mindhárom töröttvonalon.

Megjegyzés: Speciális esetekben előfordulhat, hogy három pontnak több köréírt köre is van.

Kúpszeletek

Ellipszis

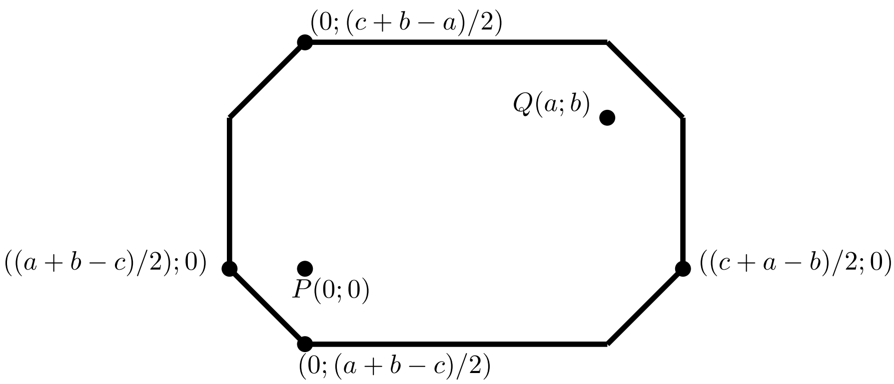
Mi lesz azon pontok halmaza, melyeknek két adott ponttól mért távolság összege egy c konstans?

Feltehetjük, hogy az egyik pont a $P(0;0)$, másik pedig $Q(a;b)$ ($a, b > 0$ az egyszerűség kedvéért).

A $(0;0), (0;a), (a;b), (b;0)$ téglalapban bármely $(x;y)$-ra ez a távolságösszeg: $a+b$.

- $d(P,Q) = a+b$ és a háromszög-egyenlőtlenség miatt $c < a+b$ esetben az üres halmazt kapjuk.
- $c = a+b$ esetben pedig könnyen látható, hogy pontosan az előbb leírt téglalap pontjai lesznek a keresett pontok.
- Végül, ha $c > a+b$, akkor az $|x|+|y|+|x-a|+|y-b| = c$ egyenlet megoldásait keressük. Megint csak esetszétválasztással azt kapjuk, hogy ez két az y tengellyel párhuzamos szakasszal, két az x tengellyel párhuzamos szakasszal, két az $x=y$-nal és két $x=-y$-nal párhuzamos szakaszból fog állni, az ábrán látható módon nyolcszöget alkotva (ha $b=0$, akkor speciálisan hatszöget):

8. ábra:



Az ábráról leolvasható, hogy a kis tengely hossza $c-a$, a nagy tengely hossza $c-b$.

Hiperbola

Mi lesz azon pontok halmaza, melyeknek két rögzített ponttól vett távolságkülönbségének abszolút értéke egy adott c konstans?

A két rögzített pont legyen megint $P(0;0)$ és $Q(a;b)$ ($a, b > 0$).

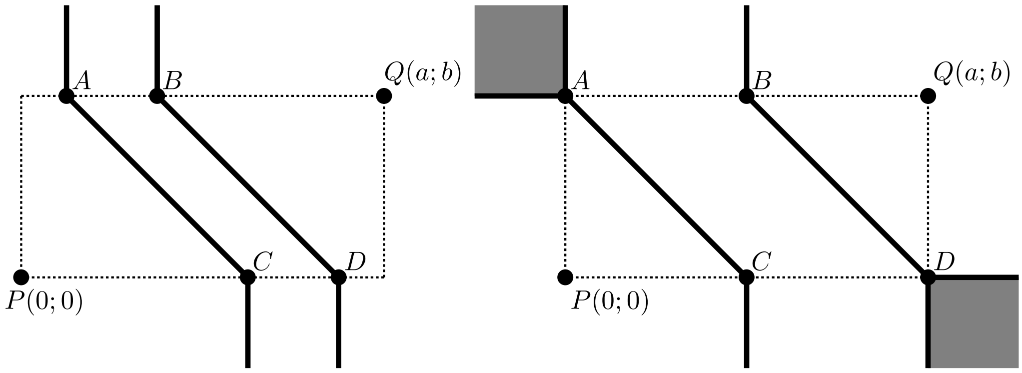
A $c = 0$ esetet már vizsgáltuk („felezőmerőleges”) és a háromszög-egyenlőtlenségből könnyen látható, hogy $c > a+b$ esetén az üres halmazt kapjuk, $c = a+b$ esetén pedig P-t és Q-t.

Vizsgáljuk tehát a $0 < c < a+b$ esetet!

Az $x=a$, $y=b$, $x=0$, $y=0$ egyenesek által meghatározott síkrészekben külön vizsgáljuk az $||x|+|y|-|x-a|-|x-b|| = c$ egyenletet, azt is figyelembe véve, hogy $|x|+|y|-|x-a|-|x-b|$ hol negatív, hol pozitív. Szerencsére a 6. észrevétel miatt tudjuk, hogy a kifejezés hol 0 és folytonossági okok miatt ezen ponthalmaz egyik oldalán lesz pozitív, másikon negatív.

Amennyiben $a-b > c$ úgy a hiperbola képe a bal oldali ábrán látható, az elfajuló $a-b=c$ eset pedig a jobb oldali ábrán. (Feltesszük, hogy $a \geq b$, az $a < b$ hasonlóan elintézhető.)

9. ábra:



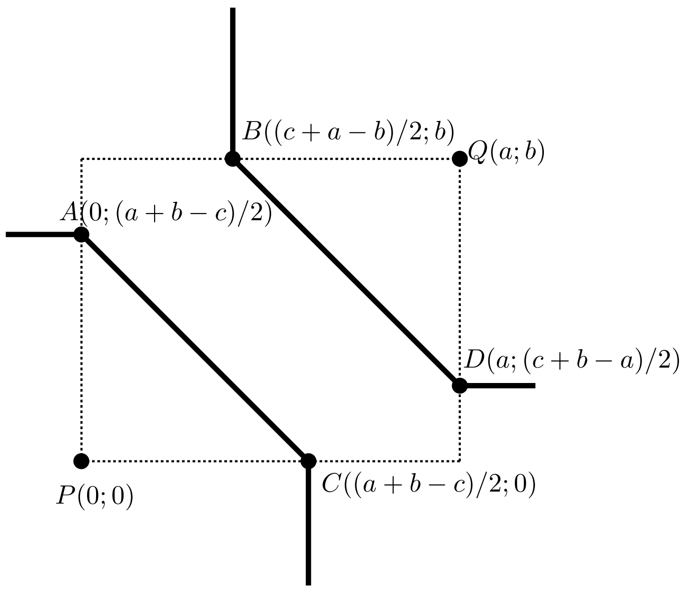
$A((a-c-b)/2; b)$, $B((a+c-b)/2; b)$
$C((a-c+b)/2; 0)$, $D((a+c+b)/2; 0)$

$A(0; b)$, $B(a-b; b)$
$C(b; 0)$, $D(a; 0)$

Az $a - b = c$ esetben az $x = 0$ és $y = b$ egyenesek által meghatározott bal-felső síknegyed illetve az $y = 0$ és az $x = a$ félegyenesek által meghatározott jobb-alsó síknegyed is teljes egészében a hiperbolához tartozik.

Végül, ha $a - b < c$, akkor a következő ábrát kapjuk:

10. ábra:

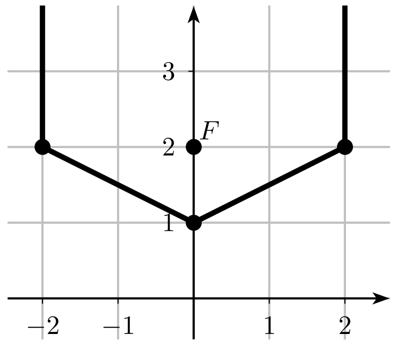


Parabola

Vezéregyenesnek egy euklideszi egyenest választunk: az x-tengelyt a fókusz pedig legyen $F(0; 2)$.

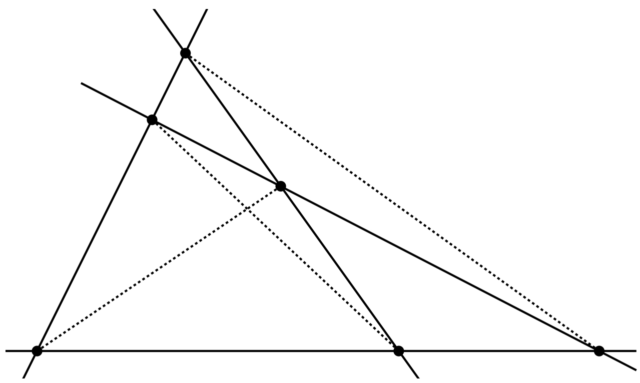
Ekkor $(0; 1)$, $(-2; 2)$, $(2; 2)$ triviálisan a parabola pontjai. Valamint a $(-2; 2)$-t $(0; 1)$-gyel illetve a $(2; 2)$-t $(0; 1)$-gyel összekötő szakaszok és a $(-2; t)$ illetve $(2; t)$ pontok is a parabolán vannak, amennyiben $t \geq 2$.

11. ábra:



Erben Péter: A teljes négyoldal

A *teljes négyoldal* olyan geometriai alakzat, amelyet négy egyenes határoz meg, melyek között nincsenek párhuzamosak és semelyik három nem megy át egy ponton. A négy egyenes hat metszéspontját nevezzük a teljes négyoldal *csúcsainak*. A csúcspárok által meghatározott egyenesek közül három nem egyezik az eredeti négy egyenes egyikével sem, ezek a teljes négyoldal *átlói*.



A teljes négyoldal a *projektív geometria* alapvető objektuma, szerepe hasonló az euklideszi geometria háromszögéhez. Ennek ellenére a következőkben nem fogjuk használni a projektív geometria tételeit, éppen ellenkezőleg, azt kívánjuk bemutatni, hogy az euklideszi (elemi) geometria eszközeinek milyen széles arzenálját kell mozgósítanunk, ha a teljes négyoldal tulajdonságait kívánjuk bizonyítani.

A kitűzött feladatokat I. F. Sharygin publikálta *The complete quadrilateral* címmel, a Quantum című folyóirat 1997 júliusi számában. A feladatanyag hátterének feltárása közben hamar felfedezhető, hogy a 11 feladat lényegében megfelel azon cikk tartalmának, amelyet Jakob Steiner 1828-ban jelentetett meg az *Annales de Mathematiques pures et appliquees* című folyóiratban, melynek szerkesztője abban az időben a szintén neves matematikus J. D. Gergonne volt.

Jakob Steiner

Jakob Steiner (1796-1863) svájci matematikus volt. Egy kis faluban született, Utzenstorf-ban, a berni kantonban. Jakob, aki a legfiatalabb volt a nyolc testvér között, 14 éves koráig még írni és olvasni sem tanult meg, mert szüleinek segített a családi gazdaságban.

Tizennyolc évesen – szülei akarata ellenére – elhagyta otthonát, és beiratkozott Johann Heinrich Pestalozzi intézetébe. Steiner nem tudott fizetni tanulmányaiért, de Pestalozzi iskolájában ez nem jelentett gondot, a híres pedagógus örömmel próbálta ki új módszereit tehetséges fiatalokkal.

Egy idejig Steiner is tanított Pestalozzi intézetében, aztán tovább folytatta tanulmányait Heidelbergben. Itt ismerkedett meg a francia geometriai áramlatokkal. Az egyetem után Pestalozzi Berlinbe csábította, ahol kiváló eredménnyel tanított és közben geometriai kutatásokat végzett. A történethez hozzátartozik, hogy Steiner nem igazán jött ki igazgatójával, K. F. von Klödennel, aki úgy érezte, Steiner nem adja meg neki a kellő tiszteletet, de a rideg légkör ellenére sikerült komoly eredményeket elérnie.

Kizárólag geometriával foglalkozott. Az algebrának és az analízisnek még az alkalmazását sem szerette. Azt tartotta, hogy a számolás helyettesíti, a geometria viszont ösztönzi a gondolkodást. 1832-ben jelent meg Systematische Entwicklung (Rendszeres kifejtés) című műve, ami a projektív geometriának minden algebrai módszertől mentes felépítését adja.

Szintetikus geometriában eléret eredményeivel messze felülmúlta kortársait, sokan úgy tartották, hogy ő volt a legnagyobb geométer a pergai Apollóniusz óta.

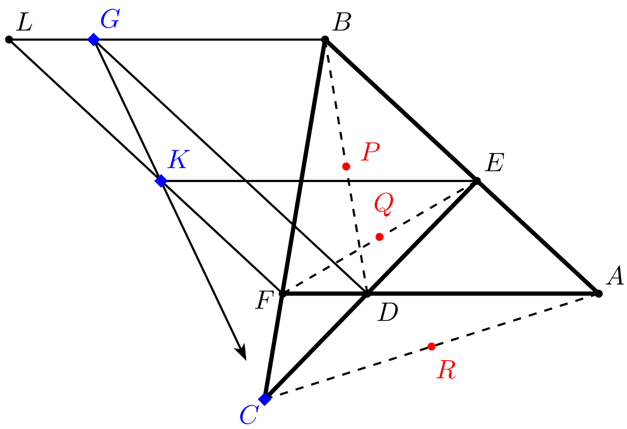
Feladatok

A teljes négyoldal 11 geometriai tulajdonságát soroljuk fel. Minden esetben az a feladat, hogy bizonyítsuk az adott tulajdonságot.

1. A teljes négyoldal átlóinak felezőpontjai egy egyenesen vannak. Ezt az egyenest szokás *Gauss-egyenesnek* vagy *Newton-egyenesenek* hívni, a továbbiakban mi az utóbbi elnevezést használjuk.
2. *Newton tétele.* Ha van olyan k kör, aminek a teljes négyoldal minden egyenese érintője, akkor k középpontja rajta van a teljes négyoldal Newton-egyenesén.
3. *Van Oebel-egyenes.* A teljes négyoldal egyenesei közül bármely három háromszöget alkot, összesen négy ilyen háromszög van. Ennek a négy háromszögnek a magasságpontjai egy egyenesre esnek, ami a Newton-egyenesre merőleges.
4. *Miquel-pont.* Az előző pontban említett négy háromszög köréírt körei egy ponton mennek át.
5. A Miquel-pontot adó körök középpontjai egy körön vannak.
6. Ha a teljes négyoldal valamelyik négy csúcsa egy körön van, akkor a Miquel-pont a maradék két csúcsot összekötő átlón van.
7. Tegyük fel, hogy a teljes négyoldal valamelyik négy csúcsa húrnégyszöget alkot. Tekintsük azt a háromszöget, aminek csúcsai a maradék két csúcs, és a húrnégyszög köréírt körének középpontja. Ennek a háromszögnek a magasságpontja egybeesik a húrnégyszög ,,átlóinak” metszéspontjával. (*Mit jelent az idézőjel?*)
8. A teljes négyoldal átlói, mint átmérők fölé köröket írunk. Ezeknek a köröknek két közös pontja van (tehát egy kör-sorhoz tartoznak), és ez a két közös pont a Van Oebel-egyenesre illeszkedik.
9. Tegyük fel, hogy a teljes négyoldal átló-egyenesei háromszöget zárnak közre. E háromszög köréírt körének középpontja rajta van a Van Oebel-egyenesen.
10. Ha a teljes négyoldal valamelyik egyenese párhuzamos a másik három egyenes által alkotott háromszög Euler-egyenesével, akkor a teljes négyoldal többi egyenese is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.
11. *Harvey-pont.* A teljes négyoldal egyenesei négy háromszöget alkotnak. Mindegyik háromszögnek megrajzoljuk a magasságpontját és a köréírt körének középpontját, és összekötjük őket, így négy szakaszt kapunk. Ezeknek a szakaszoknak a felezőmerőlegesei egy ponton mennek át.

Megoldások

1. **Első megoldás:** Az $ABCDEF$ teljes négyoldal BD, EF és AC átlójának felezőpontja rendre P, Q és R. Az A pontból kétszeres nagyítást alkalmazunk a P, Q, R pontokra, és a képekről látjuk be, hogy egy egyenesen vannak.



Második megoldás: Az AED háromszög MK, LM, KL középvonalai rendre tartalmazzák a P, Q, R pontokat. Az ADE háromszögre (és a BFC egyenesre) felírva Menelaosz tételét:

$$\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EC}{CD} \cdot \frac{DF}{FA} = -1.$$

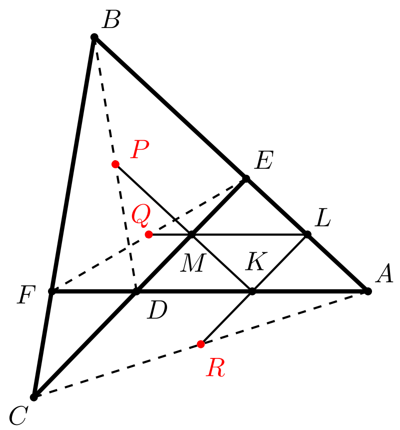
A középvonalak párhuzamosságából:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{KP}{PM}, \frac{EC}{CD} = \frac{LR}{RK}, \frac{DF}{FA} = \frac{MQ}{QL}$$

Az eddigiek alapján:

$$\frac{KP}{PM} \cdot \frac{LR}{RK} \cdot \frac{MQ}{QL} = -1.$$

Vagyis az MKL háromszögre alkalmazva a Menelaosz-tétel megfordítását kapjuk, hogy P, Q, R kollineáris.



Harmadik megoldás: Ha már bizonyítottuk a 8-as tulajdonságot, akkor elég arra hivatkoznunk, hogy három közös hatványvonallal rendelkező kör középpontja kollineáris.

2. Területekkel trükközünk. Legyen $ABCD$ érintőnégyszög, beírt körének középpontja O. Az AC átló P és a BD átló Q felezőpontjára is teljesül, hogy az AB és CD oldalak végpontjával összekötve őket két olyan háromszöget adnak, amelyek területének összege az $ABCD$ négyszög területének fele. Az O pontra szintén teljesül ez a tulajdonság, felhasználva az érintőnégyszögek tételét.

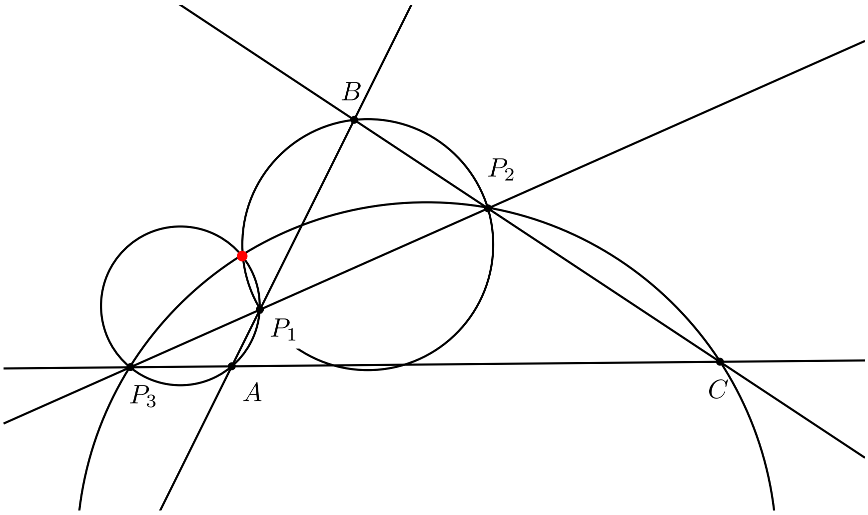
   Azt kell tehát csak belátnunk, hogy ha a $T(X) = T_{ABX} + T_{CDX}$ függvényre $T(P) = T(Q) = T(O)$, akkor P, Q, O egy egyenesen vannak.

3. A teljes négyoldal Miquel-pontjához tartozó Simson-egyenesek a négy háromszög esetében azonosak. Ezt a közös egyenest a Miquel-pontból kétszeresére nagyítva éppen a magasságpontokon átmenő egyenest kapunk, felhasználva a (vii.) lemmát.

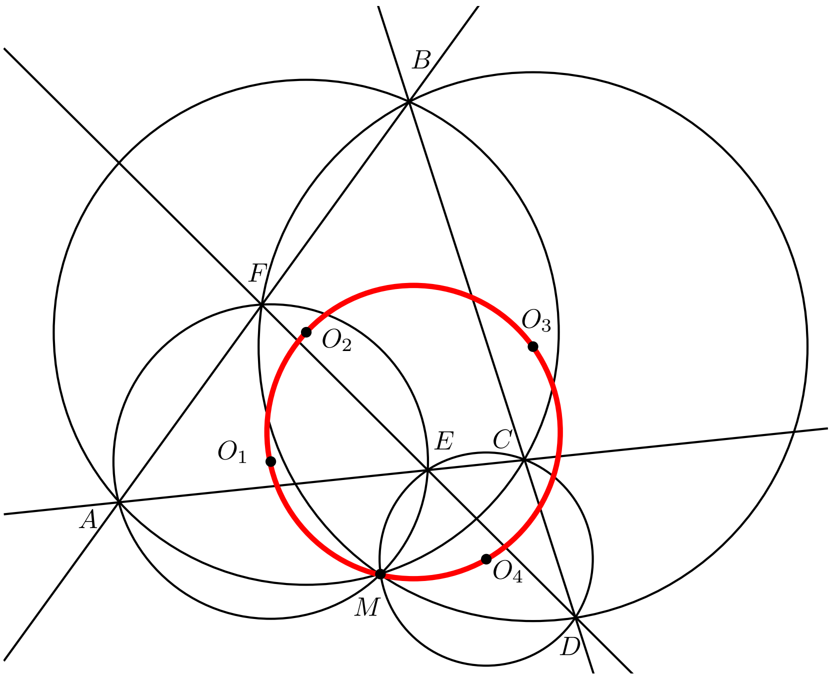
   A teljes négyoldal átlói, mint átmérők fölé írt körök hatványvonala éppen ez az egyenes, tehát a középpontok egyenesére merőleges.

   Megjegyzés: Ha a négy egyenes egy parabola négy érintője, akkor a Miquel-pont a fókusz, és a magasságpontok egyenese a vezéregyenes.

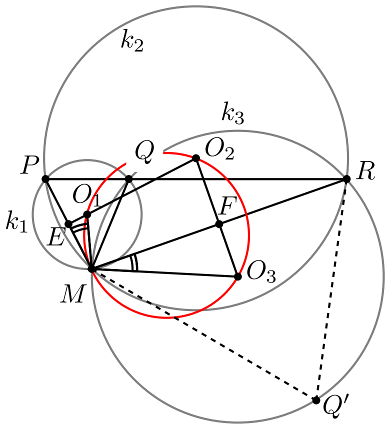
4. A négy kör helyett nézzünk csak hármat és használjuk a (ix.) lemmát abban a speciális esetben, amikor P_1, P_2 és P_3 egy egyenesre esnek!



5. Ha ábrát készítünk, rögtön feltűnik, hogy a négy középpont köre átmegy a Miquel-ponton is.

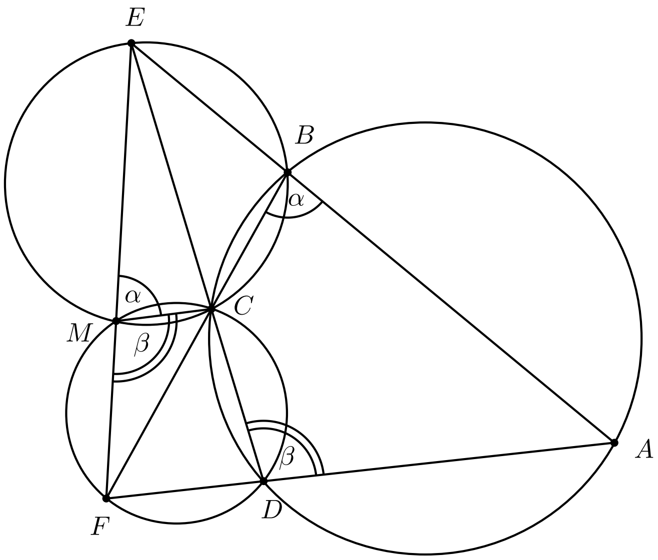


Elég lesz azt megmutatni, hogy ha a P, Q, R pontok egy egyenesen vannak, akkor az MPQ, MPR és MQR háromszögek köréírt körének középpontja és az M pont egy körre esnek. Ezt az állítást alkalmazva az A, E, C pontokra és M-re, majd az F, E, D pontokra és M-re megkapjuk a feladat bizonyítását.



A segédtétel bizonyítása: Legyen PM felezőpontja E, RM felezőpontja pedig F. Mivel O_2 PM és RM felezőmerőlegesének metszéspontja, ezért EO_2FM húrnégyszög, hiszen szemközti szögeinek összege $180°$. Tekintsük most azt a forgatva nyújtást, aminek középpontja M, és a P pontot az R pontba viszi. Mivel $PQM\sphericalangle$ és $RQM\sphericalangle$ kiegészítő szögek, ezért Q' rajta van a k_3 körön, mert $RQ'M\sphericalangle$ $180°$-ra egészíti ki $RQM\sphericalangle$-et. Tehát k_1 képe a forgatva nyújtásnál k_3, emiatt a kétíves szögek egyenlők. Ebből viszont az következik, hogy $EMF\sphericalangle = O_1MO_3\sphericalangle$, tehát $O_1O_2O_3M$ valóban húrnégyszög.

6. Legyen a kör fekvő négy pont A, B, C és D, a szóban forgó átló pedig EF. Az EBC és FDC háromszögek köréírt köreinek C-től különböző metszéspontja legyen M. Azt fogjuk megmutatni, hogy $EMF\sphericalangle = 180°$.

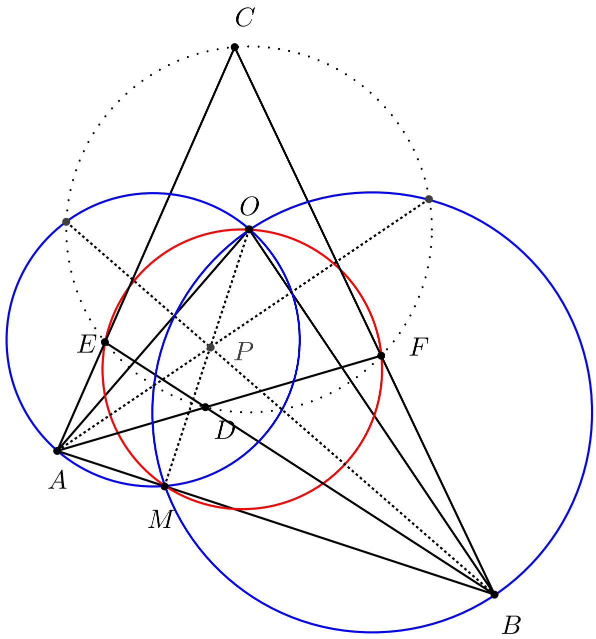


A $CMFD$ húrnégyszögben $CMF\sphericalangle = CDA\sphericalangle$, hasonlóan a $BEMC$ húrnégyszögben $EMC\sphericalangle = CBA\sphericalangle$. Végül az $ABCD$ húrnégyszögben $\alpha + \beta = 180°$, ezzel igazoltuk az állítást.

Megjegyzés: Érdemes meggondolni, előfordulhat-e, hogy nem jön létre C-től különböző M pont.

7. A teljes négyoldal csúcsai: A, B, C, D, E és F, átlói AB, CD és EF, Miquel-pontja pedig M. Jelölje továbbá O a $CEDF$ köréírt körének középpontját, P pedig az AOB magasságpontját. Azt kell megmutatnunk, hogy P éppen a CD és EF átlók metszéspontja.

Az előző pontban bizonyítottuk, hogy ha $CEDF$ húrnégyszög, akkor M az AB átló pontja. Ezt fel fogjuk használni.



A bizonyítást több részre bontjuk.

I. $EOFM$ **húrnégyszög**

II. OM **magasságvonal**

III. OA **átmérőjű kör és** $ECFDM$ **kör hatványvonala** m_B

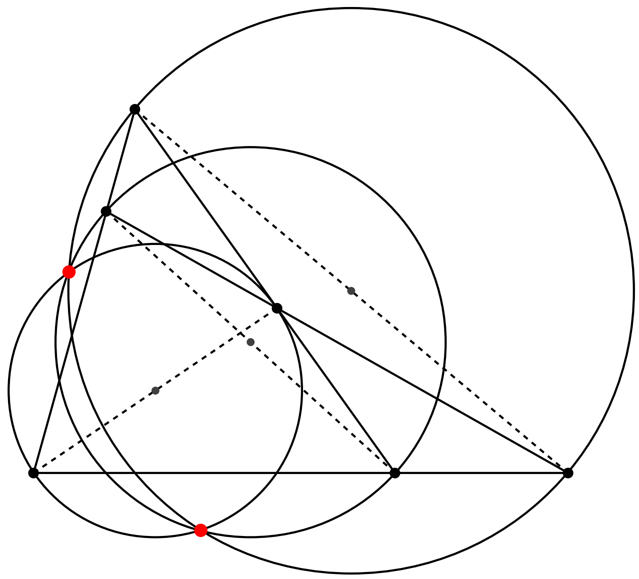
IV. OB **átmérőjű kör és** $ECFDM$ **kör hatványvonala** m_A

V. m_A **és** m_B **metszéspontja az** $ECFD$**,** OMB **és** OMA **körök hatványvonala**

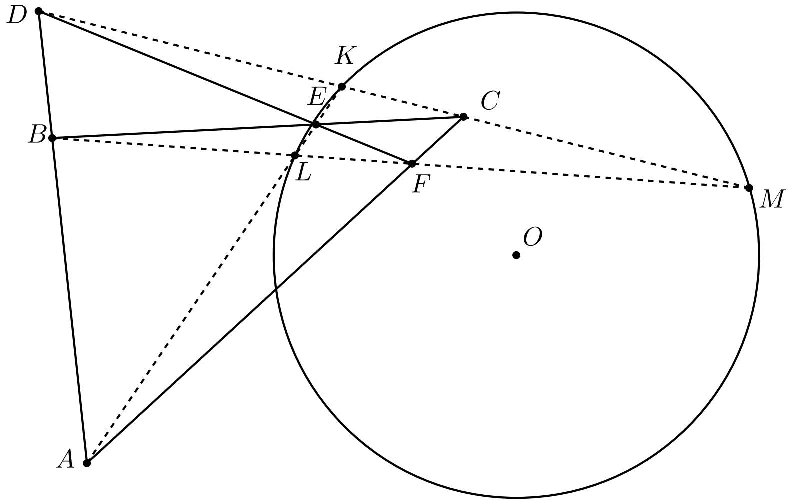
VI. pont hatványa $CFDE$ **körre (átlók metszéspontja)**

VI. inverzió k_{CFDE}**-re:** P **képe** M

8. Az (v.)-ös lemmát használva kapjuk, hogy a három körnek közös a hatványvonala. Tehát az állítást pontosítani kell: a három kör két közös pontban metszi egymást *vagy* semelyik kettő nem metszi egymást *vagy* mindhárman egy közös pontban érintik egymást.



9. Az ábra jelöléseit használjuk: az ABC háromszög oldalegyeneseit metszi a DEF egyenes. Az AE és DC átlók metszéspontja K, BF és AE metszéspontja L, végül BF és DC metszéspontja M.



Felírjuk Menelaosz tételét (előjel nélküli hosszúságokkal) a BEA, AEC és ABC háromszögekre:

$$
\begin{aligned}
BEA_\Delta &: \quad \frac{AK}{KE} \cdot \frac{EC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1 \\
AEC_\Delta &: \quad \frac{AL}{LE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \\
ABC_\Delta &: \quad \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BD}{DA} \cdot \frac{AF}{FC} = 1
\end{aligned}
$$

Az első két egyenletet tényezőnként leosztva egymással, majd alkalmazva a harmadik egyenlőséget, a következőt kapjuk:

$$\frac{AK}{KE} = \frac{AL}{LE}$$

Innen következik, hogy az AE átmérőjű k_{AE} kör az L és K pontokhoz tartozó Apollóniusz-kör (KLM létezéséből következik, hogy az AL/AK arány értéke 1-től különböző), tehát a k_{AE} kör P pontjaira $\frac{PK}{PL}$ állandó.

Hasonlóan a k_{DC} kör Q pontjaira QK/QM állandó, továbbá a k_{BF} kör R pontjaira RL/RM állandó.

A három feltételből következik, hogy ha a három körnek van két közös pontja: P_1 és P_2, akkor

$$P_1K : P_1L : P_1M = P_2K : P_2L : P_2M,$$

így a (xiii.) lemmát használva adódik, hogy a P_1P_2 egyenes átmegy KLM köréírt körének középpontjám. A 8. feladatból pedig az következik, hogy a P_1P_2 egyenes éppen a Van-Oebel egyenes.

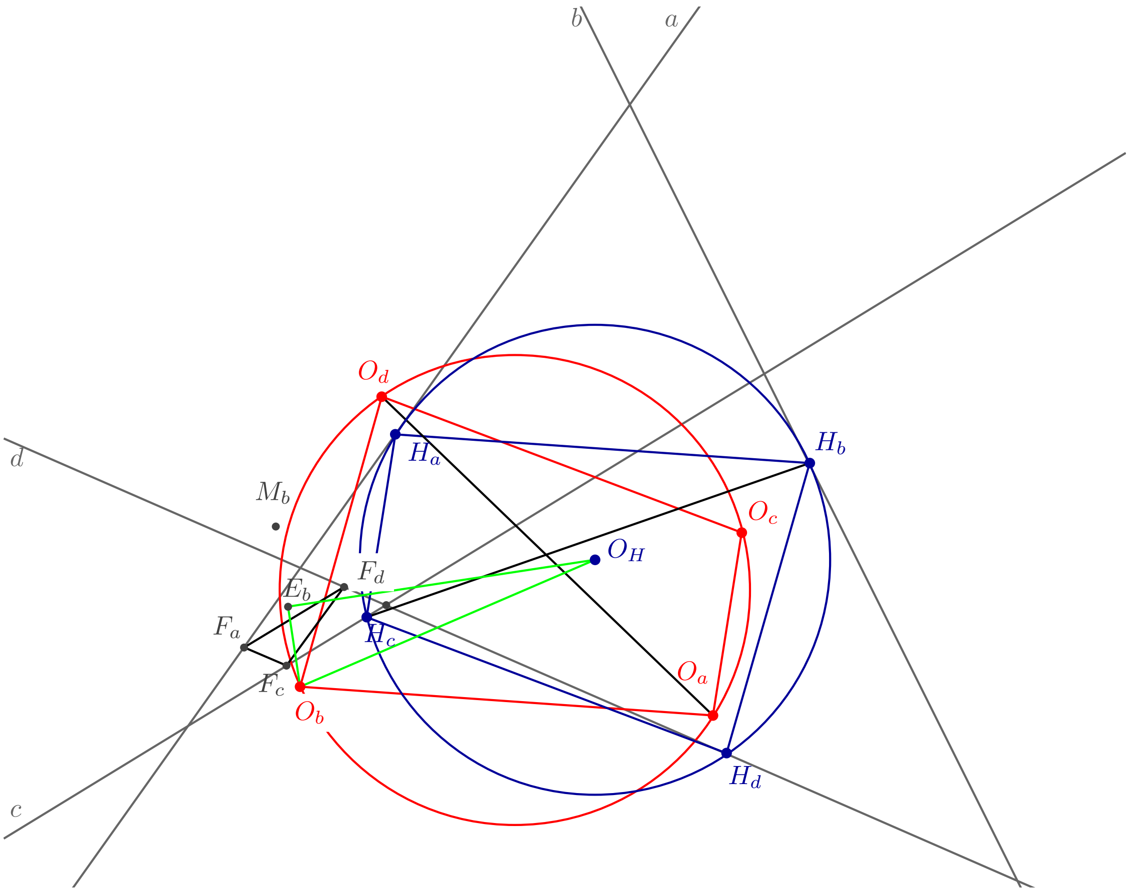
Amennyiben a k_{AE}, k_{DC} és k_{BF} körök nem metszik egymást, akkor a Van-Oebel egyenes a körök hatványvonala, ekkor a bizonyítás módosításra szorul. (TODO: módosítás)

10. Nem változtat az állítás igazságtartalmán, ha a négy egyenes egyikét önmagával párhuzamosan eltoljuk. Elég tehát belátni, hogy az ABC háromszög BC oldalán felvett D pont esetén ABD és ACD háromszögek Euler-egyenese pont ugyanakkor párhuzamos az AC illetve AB oldallal. Ehhez a (x.) és (xi.) lemmákat használhatjuk.

11. Bevezetünk néhány jelölést. A teljes négyoldal egyeneseit nevezzük a-nak, b-nek, c-nek és d-nek. A négy egyenesből hármat kiválasztva kapunk egy háromszöget. Ezt a háromszöget, és nevezetes pontjait címkézzük a negyedik egyenes nevével. Tehát például az a, b és c egyenesek által alkotott háromszög köréírt körének középpontja O_d.

    Ha j, k, l és m az a, b, c, d valamilyen permutációja, akkor az $O_jO_kO_l$ magasságpontját jelöljük H_m-mel. Korábban láttuk (5. feladat), hogy $O_aO_bO_cO_d$ húrnégyszög. Ismert tétel, hogy ha egy húrnégyszög csúcsai közül minden leheztséges módon kiválasztunk hármat, és ezeknek a hármasoknak – mint háromszögnek – megrajzoljuk a magasságpontját, akkor az így kapott pontok az eredetivel egybevágó húrnégyszöget alkotnak. Ezek alapján jelöljük a $H_aH_bH_cH_d$ húrnégyszög köréírt körének középpontját O_H-val.

    Megmutatjuk, hogy a feladatban szereplő szakaszok (az úgynevezett Euler-szakaszok) felezőmerőlegesei átmennek az O_H ponton.



Legyen k, l, m az a, b, c, d egyenesek közül három. A klm háromszög középvonal háromszöge $F_kF_lF_m$. A klm, $F_kF_lF_m$, $H_kH_lH_m$ és $O_kO_lO_m$ háromszögek hasonlók.

Ha j a negyedik "index", akkor O_j a $\triangle H_kH_lH_m$ magasságpontja, a $\triangle klm$ köréírt körének középpontja, és a középvonal háromszög magasságpontja. Jelölje E_j a klm háromszög középvonal háromszögének köréírt köre középpontját, ez egyben a klm-hez tartozó Euler-szakasz felezőpontja is.

[Felhasználjuk, hogy $H_x \in x$.

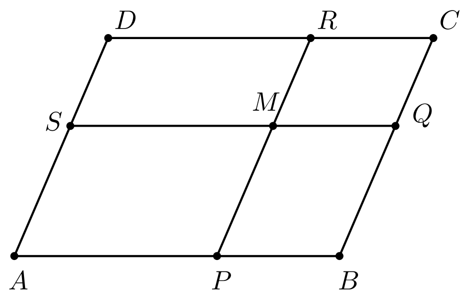
Bizonyítás: Az abd és abc háromszögek köréírt körének metszéspontjai: M és P. M és P szimmetrikus a két kör O_cO_d centrálisára. Hasonlóan, M tükörképe O_bO_d-re R, Q tükörképe O_bO_c-re S.

Mivel M rajta van $\triangle O_bO_cO_d$ köréírt körén, ezért a háromszög oldalaira vett tükörképei (R, S, és P) egy a háromszög magasságpontján átmenő egyenesen vannak. Emiatt $O_bO_cO_d$ magasságpontja – H_a – rajta van a-n.]

Az $O_jF_lH_l$, $O_jF_kH_k$ és $O_jF_mH_m$ hasonló derékszögű háromszögek. Tekintsük azt az O_j középpontú forgatva nyújtást, ami az F_k pontot H_k-ba viszi. Ez a transzformáció F_l-hez H_l-t, F_m-hez pedig H_m-et rendeli. Tehát a középvonal háromszög E_j középpontját O_H-ba, a $H_kH_lH_m$ köréírt körének középpontjába kell vinnie. Tehát $O_jE_jO_H$ is az előzőekhez hasonló derékszögű háromszög. Így E_jO_H merőleges O_jE_j-re tehát O_H az O_jM_j Euler-szakasz felezőmerőlegesén fekszik.

Felhasznált tételek és feladatok

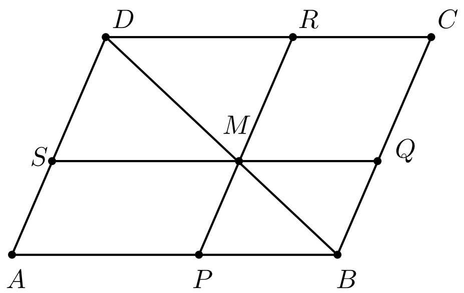
(i.) Egy $ABCD$ paralelogramma belső pontja M. M-en keresztül párhuzamosokat húztunk a paralelogramma oldalaival, ezek az oldalakat a P, Q, R, S pontokban metszik, az ábra szerint.

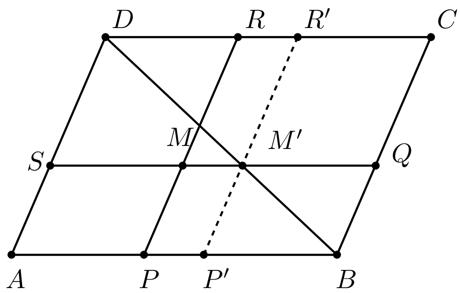


M akkor és csak akkor esik a BD átlóra, ha $T_{SMPA} = T_{MQCR}$.

Bizonyítás: a) Először tegyük fel, hogy M a BD átló pontja. Mivel a paralelogrammát átlója két egybevágó, így egyenlő területű háromszögre bontja, ezért $T_{ABD} = T_{BCD}$, $T_{SMD} = T_{MRD}$, $T_{PBM} = T_{BQM}$. Innen

$$T_{SMPA} = T_{ABD} - (T_{SMD} + T_{PBM}) = T_{BCD} - (T_{MRD} + T_{BQM}) = T_{MQCR}.$$





b) Ha pedig M nem illeszkedik az átlóra, akkor a BD által meghatározott háromszögek egyikébe – legyen ez mondjuk ABD – esik. Ilyenkor a PR szakaszt önmagával párhuzamosan eltolhatjuk a $P'R'$ helyzetbe, ahol M eltoltja – M' – a BD-re illeszkedik. Az ábráról leolvasható tartalmazásokat és az a) pontot felhasználva

$$T_{APMS} < T_{AP'M'S} = T_{M'QCR'} < T_{MQCR},$$

tehát, ha M nem illeszkedik az átlóra, akkor a kérdéses területek nem egyezhetnek meg.

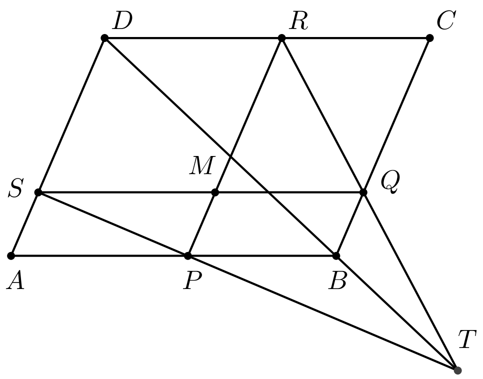
Megjegyzés: Euklidesz Elemek, I.43. tétel.

(ii.) Egy $ABCD$ paralelogramma belső pontja M. M-en keresztül párhuzamosokat húztunk a paralelogramma oldalaival, ezek az oldalakat a P, Q, R, S pontokban metszik, az ábra szerint.

Az SP, DB és RQ egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak.

Első bizonyítás: Először vizsgáljuk meg, mit jelent, ha SP és RQ párhuzamos! Ilyenkor nyilván $SMP_\Delta \sim RQM_\Delta$, amiből $\frac{SM}{MQ} = \frac{PM}{MR}$ következik. Ez viszont azt jelenti, hogy az M-en áthaladó párhuzamosok azonos arányban osztják a paralelogramma oldalait, vagyis $APMS$ és $MQCR$ hasonló $ABCD$-hez. Emiatt a három paralelogramma megfelelő átlója párhuzamos, hiszen páronként hasonlósági helyzetben vannak.

Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor SP és RQ metszik egymást egy T pontban!



Rajzoljuk meg – az ábrán látható módon – a $JTFD$ paralelogrammát! (i.) alapján a következő egyenlőségeket kapjuk:

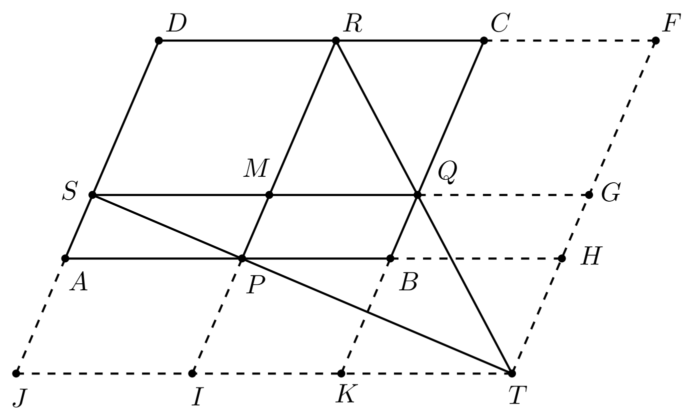
$$\begin{aligned} T_{JIPA} &= T_{PHGM} = T_{PBQM} + T_{BHGQ} \\ T_{IKBP} + T_{PBQM} = T_{IKQM} &= T_{QGFC} \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva és a közös T_{PBQM} tagot levonva

$$T_{JKBA} = T_{BHFC}$$

adódik, ami (i.) alapján azt jelenti, hogy a $JTFD$ paralelogrammában a B pont rajta van a DT átlón.

Ez pont azt jelenti, hogy SP, RQ és DB egy pontban metszik egymást.



Második bizonyítás: A feladat állítása *affin invariáns.* Alkalmazzunk olyan affinitást, aminél $ABCD$ téglalapba megy át. Ezután helyezzük el úgy a koordinátarendszert, hogy B legyen az origó, a tengelyek pedig párhuzamosak a téglalap oldalaival.

A következő paraméterekkel fogunk dolgozni: $A(a;0), B(0;0), C(0;c), M(p;q)$. Ekkor P koordinátái $P(p;0)$, Q koordinátái $Q(0;q)$, S koordinátái $S(a;q)$, R koordinátái pedig $R(p;c)$.

SP egyenlete: $y = \dfrac{q}{a-p}(x-a)+q.$

RQ egyenlete: $y = \dfrac{c-q}{p}(x-p)+c.$

Megoldva az egyenletrendszert:

$$x = \frac{apq}{-ac+aq+cp}, \qquad y = \frac{cpq}{-ac+aq+cp}$$

A kapott pont rajta van az $y = \frac{c}{a}x$ egyenletű egyenesen, ami éppen a BD átló egyenlete. Tehát a három egyenes egy ponton megy át.

Természetesen meg kell vizsgálni azt az esetet is, amikor SP és RQ párhuzamosak. Ennek feltétele:

$$\frac{q}{a-p} = \frac{c-q}{p} = m \in \mathbb{R}$$

Innen $q = m(a-p)$ és $c-q = mp$, vagyis $c = q+(c-q) = m(a-p)+mp = ma$. Ebből következik, hogy a BD átló is párhuzamos a vizsgált egyenesekkel, hiszen $\frac{c}{a} = m = \frac{c-q}{p} = \frac{q}{a-p}$.

Harmadik bizonyítás: Mutatunk még egy analitikus megoldást, most vektorokkal. Ez a módszer nem eleganciája, hanem gyakori használhatósága miatt kívánkozik ide. Két vektor és néhány skalár segítségével írjuk fel az elrendezés összefüggéseit. $\overrightarrow{BC} = \underline{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{BQ} = \lambda\underline{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{BA} = \underline{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{BP} = \mu\underline{\mathbf{b}}$.

Az eljárás a következő: egy választott vektort kétféleképpen felírunk a két ,,bázisvektor" és néhány skalár-paraméter segítségével. A kétféle felírás egyenlőségéből egyenletrendszert kapunk a paraméterekre, figyelembe véve, hogy a lineáris kombináció egyértelmű.

$$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{BQ} + x\overrightarrow{RQ} = \lambda\underline{\mathbf{a}} + x(\lambda\underline{\mathbf{a}} - (\mu\underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{a}}))$$

$$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{BP} + y\overrightarrow{SP} = \mu\underline{\mathbf{b}} + y(\mu\underline{\mathbf{b}} - (\lambda\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}))$$

Rendezve $\underline{\mathbf{a}}$-ra és $\underline{\mathbf{b}}$-re:

$$\underline{\mathbf{a}}(\lambda + x\lambda - x) + \underline{\mathbf{b}}(-x\mu) = \underline{\mathbf{a}}(-y\lambda) + \underline{\mathbf{b}}(\mu + y\mu - y)$$

A lineáris kombináció egyértelműségéből:

$$\begin{aligned} \lambda + x\lambda - x &= -y\lambda \\ -x\mu &= \mu + y\mu - y \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$x = \frac{\lambda}{1-\mu-\lambda}, \quad y = \frac{\mu}{1-\mu-\lambda}$$

Most már fel tudjuk írni $\overrightarrow{BT}$-t:

$$\overrightarrow{BT} = \lambda\underline{\mathbf{a}} + x(\lambda\underline{\mathbf{a}} - (\mu\underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{a}})) = \lambda\underline{\mathbf{a}} + \frac{\lambda}{1-\mu-\lambda} \cdot (\lambda\underline{\mathbf{a}} - (\mu\underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{a}})) = \frac{\mu\lambda}{\mu+\lambda-1}(\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}})$$

Ebből látszik, hogy T rajta van a BD átlón, mert $\underline{\mathbf{a}}$ és $\underline{\mathbf{b}}$ együtthatója megegyezik.

A levezetésből az is kiolvasható, hogy $\mu + \lambda = 1$ esetén nem jön létre a T pont. Ilyenkor

$$\overrightarrow{RQ} = \lambda\underline{\mathbf{a}} - ((1-\lambda)\underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{a}}) = (\lambda - 1)(\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}})$$

$$\overrightarrow{SP} = (1-\lambda)\underline{\mathbf{b}} - (\lambda\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}) = -\lambda(\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}})$$

Látható, hogy mindkét egyenes a paralelogramma BD átlójával párhuzamos.

(iii.) (*Menelaosz-tétel*) Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalegyenesén adottak a háromszög csúcsaitól különböző D, E és F pontok.

Az D, E és F pontok **akkor és csak akkor** vannak egy egyenesen, ha

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1.$$

(Az egyenletben szereplő szakaszok irányítottak.)

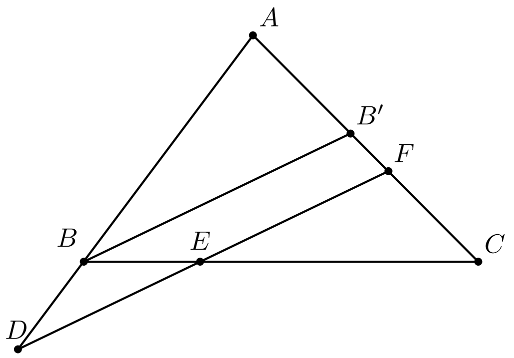
Első bizonyítás: Először tegyük fel, hogy D, E és F egy egyenesre esnek. Rajzoljuk meg a DEF egyenessel párhuzamos BB' egyenest, ahol B' az AC pontja. (A feltétel miatt a DEF egyenes nem párhuzamos AC-vel.)

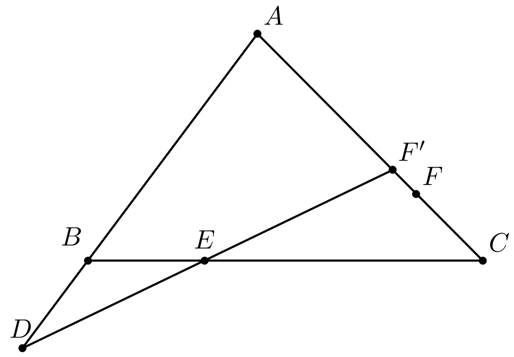
A párhuzamos szelők tétele alapján:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FB'}, \quad \frac{BE}{EC} = \frac{B'F}{FC}$$

Innen már következik a tétel állítása:

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{AF}{FB'} \cdot \frac{B'F}{FC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{AF}{FA} \cdot \frac{B'F}{FB'} \cdot \frac{CF}{FC} = (-1)^3 = -1$$





A megfordítás bizonyításához tegyük fel, hogy $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1$, de D, E és F nincsenek egy egyenesen. Legyen a DE egyenes és AC metszéspontja F'! A tétel már bizonyított iránya szerint:

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF'}{F'A} = -1,$$

a feltevés szerint pedig

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1.$$

Ebből

$$\frac{CF}{FA} = \frac{CF'}{F'A}$$

következik, ami csak akkor lehetséges, ha $F = F'$.

Meg kell még gondolnuk, hogy F' minden esetben létrejön-e, vagyis nem történhet-e meg, hogy $DE||AC$. Ha $DE||AC$, akkor $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} = 1$, a párhuzamos szelők tétele szerint, tehát a feltevésben szereplő egyenlet $\frac{CF}{FA} = -1$ alakra egyszerűsödik. Ez viszont lehetetlen, CF nem lehet egyenlő hosszú és ellentétes irányú az FA szakahoz képest.

Megjegyzés: az $(ABP) = \dfrac{AP}{PB}$ *osztóviszony* minden -1-től különböző valós értéket felvesz, amíg P befutja az AB egyenes B-től kölönböző pontjait.

Második bizonyítás: A három pont közül nulla vagy kettő lehet belső pontja a megfelelő háromszögoldalnak, ez garantálja a szorzat előjelének helyességét. A továbbiakban nem foglalkozunk az előjelekkel. A háromszög ,,szinuszos” területképlete alapján:

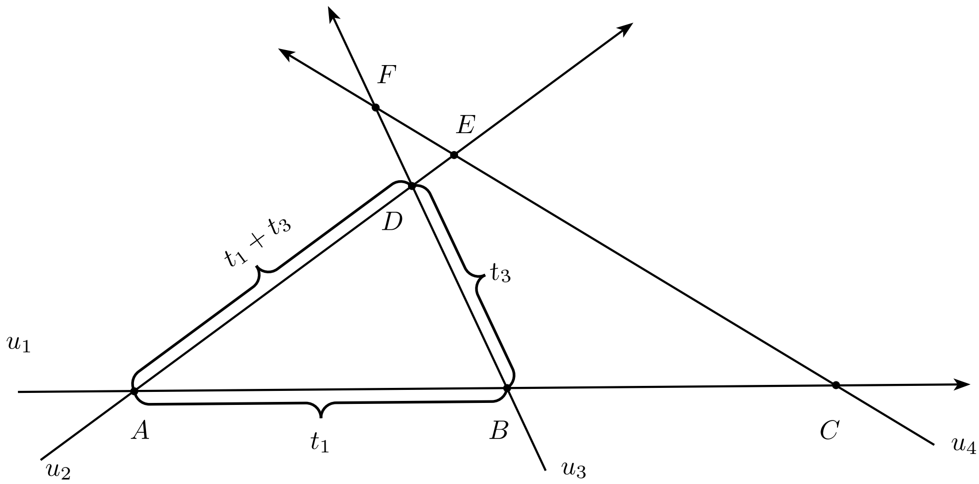
$$\frac{T_{DBE}}{T_{ADF}} = \frac{DB \cdot DE}{DA \cdot DF}, \quad \frac{T_{EFC}}{T_{DBE}} = \frac{EF \cdot EC}{EB \cdot ED}, \quad \frac{T_{ADF}}{T_{EFC}} = \frac{FA \cdot FD}{FE \cdot FC}$$

A három feltételt összeszorozva megkapjuk a bizonyítandó egyenletet. A megfordítás az előző megoldásban látottak szerint végezhető.

Egy érdekes alkalmazás: Meglepő módon a Menelaosz-tétel szorosan kapcsolódik a *négy utazó problémájához.* A klasszikus feladat így szól:

> Négy utazó mindegyike egyenes vonalban, állandó sebességgel halad. Tudjuk, hogy 1 találkozik 2-vel, 3-mal és 4-gyel, továbbá 2 találkozik 3-mal és 4-gyel.
>
> Bizonyítsuk be, hogy 3 találkozik 4-gyel! (Feltesszük, hogy a négy utazó haladási irányának megfelelő négy egyenes általános helyzetű.)

Készítsünk ábrát!



Az u_i utazó sebessége legyen v_i, a haladási irányt a nyilak jelzik az ábrán. A következő paraméterekkel írjuk le a feladatbeli találkozásokat:

$$AB = t_1v_1,\ AC = t_2v_1,\ \ BD = t_3v_3,\ BF = t_4v_3,\ \ CE = t_5v_4,\ CF = t_6v_4.$$

Vizsgáljuk most az ABD háromszöget! Mivel u_1 t_1 idő alatt ért A-ból B-be, és u_3 akkor indult t_3 ideig tartó útjára B-ből D-be, amikor u_1 megérkezett, ezért u_2-nek pontosan $t_1 + t_3$ idő alatt kellett D-be érkeznie, hiszen ott u_2 és u_3 találkozott. Hasonlóan látható, hogy u_2 $t_2 + t_5$ idő alatt ért E-be.

$$AD = (t_1 + t_3)v_2, AE = (t_2 + t_5)v_2$$

Az előző logikát követve u_3 és u_4 F-beli találkozásának feltétele:

$$t_4 = t_2 - t_1 + t_6 \Leftrightarrow t_1 + t_4 = t_2 + t_6$$

Ezt pedig a Menelaosz-tétel kétszeri alkalmazásából szépen megkapjuk. (Most előjel nélkül írjuk fel az arányokat.)

$$\begin{aligned}
BCF_\triangle &: \quad \frac{t_1}{t_2} \cdot \frac{t_5}{t_6 - t_5} \cdot \frac{t_4 - t_3}{t_3} = 1 \Rightarrow \frac{t_5}{t_3} t_1(t_4 - t_3) = t_2t_6 - t_2t_5 \\
EFD_\triangle &: \quad \frac{t_1 + t_3}{t_2 + t_5} \cdot \frac{t_5}{t_6} \cdot \frac{t_4}{t_3} = 1 \Rightarrow \frac{t_5}{t_3} t_4(t_1 + t_3) = t_2t_6 + t_6t_5
\end{aligned}$$

A második egyenletből kivonva az elsőt:

$$\frac{t_5}{t_3}(t_4t_3 + t_1t_3) = t_6t_5 + t_2t_5 \Rightarrow t_1 + t_4 = t_2 + t_6,$$

amit bizonyítani akartunk.

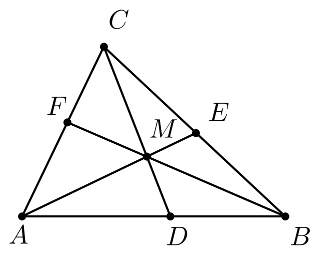
(iv.) (*Ceva-tétel*) Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalegyenesén adottak a háromszög csúcsaitól különböző D, E és F pontok.

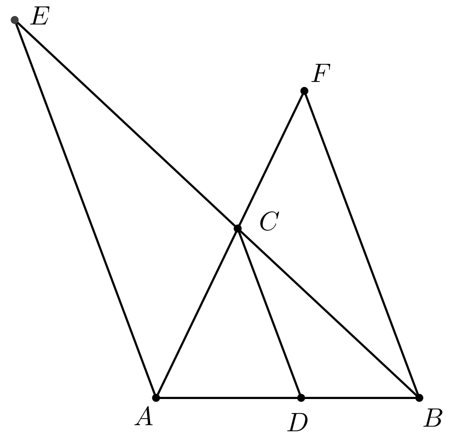
Az AE, BF és CD egyenesekre **akkor és csak akkor** teljesül, hogy egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak, ha

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1.$$

(Az egyenletben szereplő szakaszok irányítottak.)

Bizonyítás: Érdemes elsőnek meggondolni, hogy az előjelekkel ,,nincs baj", csak az alábbi ábrákon szemléltetett előjel-kombinációk fordulhatnak elő: vagy minhárom tört pozitív, vagy egy pozitív és kettő negatív.





Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor AE, BF és CD párhuzamos! Az előző megjegyzés miatt dolgozhatunk pozitív hosszúságokkal. A párhuzamos szelők tétele alapján $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AD}$ és $\frac{CF}{FA} = \frac{DB}{AB}$. Elvégezve a szorzásokat:

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{AB}{AD} \cdot \frac{DB}{AB} = 1$$

Most tegyük fel, hogy AE, BF és CD egy ponton megy át, legyen ez a pont M! Felhasználjuk a következőket: (a) ha két háromszög egy magassága közös, akkor területük aránya a közös magassághoz tartozó oldalal arányával egyezik meg; (b) ha két háromszög egy oldala közös, akkor területük aránya a közös oldalhoz tartozó magasságok arányával egyezik meg.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{T_{ADM}}{T_{DBM}} = \frac{T_{AMC}}{T_{BMC}}$$

Hasonló módon kapjuk a következőket:

$$\frac{BE}{EC} = \frac{T_{AMB}}{T_{AMC}}, \quad \frac{CF}{FA} = \frac{T_{BMC}}{T_{AMB}}.$$

A kapott törteket összeszorozva:

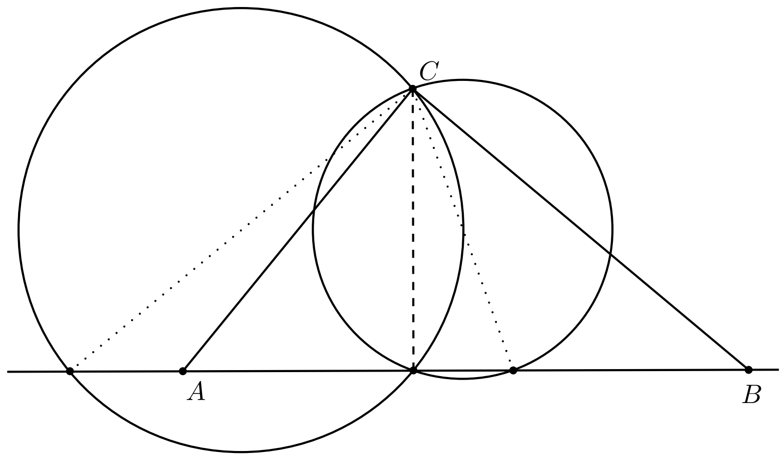
$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{T_{AMC}}{T_{BMC}} \cdot \frac{T_{AMB}}{T_{AMC}} \cdot \frac{T_{BMC}}{T_{AMB}} = 1$$

A megfordítás a Menelaosz-tétel bizonyításánál látott módon – indirekt – igazolható.

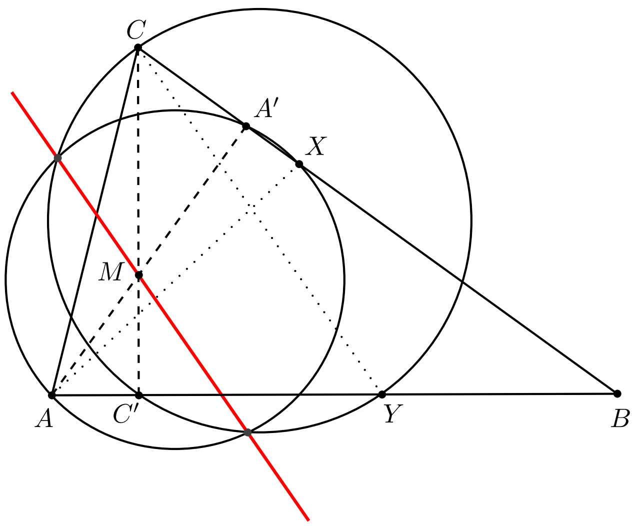
(v.) (*Ceva-szakaszok fölé írt körök*) Egy háromszög valamelyik csúcsát a szemközti oldalegyenes tetszőleges pontjával összekötő szakaszt *Ceva-szakasznak* nevezzük. Tekintsük az ABC háromszög két tetszőleges Ceva-szakaszát, és írjunk ezek fölé – mint átmérő fölé – köröket.

A két kör hatványvonala átmegy az ABC háromszög magasságpontján.

Bizonyítás: Thalesz tételéből következik, hogy ha a két Ceva-szakasz közös csúcsból indul, akkor az ezen csúcsból induló magasság talponttja is közös pontja a szakaszok fölé, mint átmérő fölé írt köröknek. Ekkor a két kör hatványvonala nem más, mint a közös csúcsból induló magasságvonal egyenese, ami nyilván tartalmazza a magasságpontot.



Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor a két Ceva-szakasz különböző csúcsból indul ki, legyenek e szakaszok AX és CY!

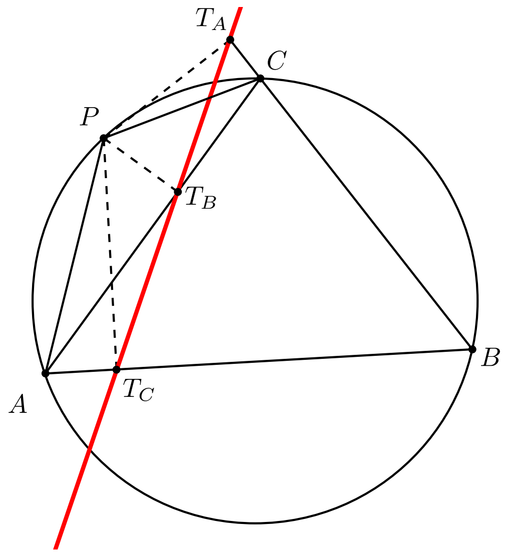


Ha az A-ból induló magasság talppontja A' a C-ből indulóé pedig C', akkor A' és C' az AX illetve CY Ceva-szakasz fölé írt kör pontja, Thalesz tétele miatt. Továbbá AMC' és CMA' hasonló háromszögek, mert két szögük egyenlő. A hasonlóságból $MC'/MA = MA'/MC$, átrendezve $MC' \cdot MC = MA' \cdot MA$, ami pont azt jelenti, hogy M-nek a két körre vonatkozó hatványa megegyezik. Tehát M valóban rajta van a körök hatványvonalán.

(vi.) (*Simson-Wallace egyenes*) Egy ABC háromszög síkjában lévő P pontból merőlegeseket bocsájtunk a háromszög oldalegyeneseire.

A talppontok akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha P a háromszög köréírt körére illeszkedik.

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy P a köréírt kör pontja. P-ből az AB, BC , CA oldalegyenesekre bocsájtott merőlegesek talppontja legyen T_C, T_A és T_B. A merőlegesek miatt húrnégyszög AT_CT_BP, PT_BCT_A és PT_CBT_A. (P helyzetétől függően az változhat, hogy mi a csúcsok körüljárás szerinti sorrendje.) Húrnégyszög természetesen $PABC$ is.



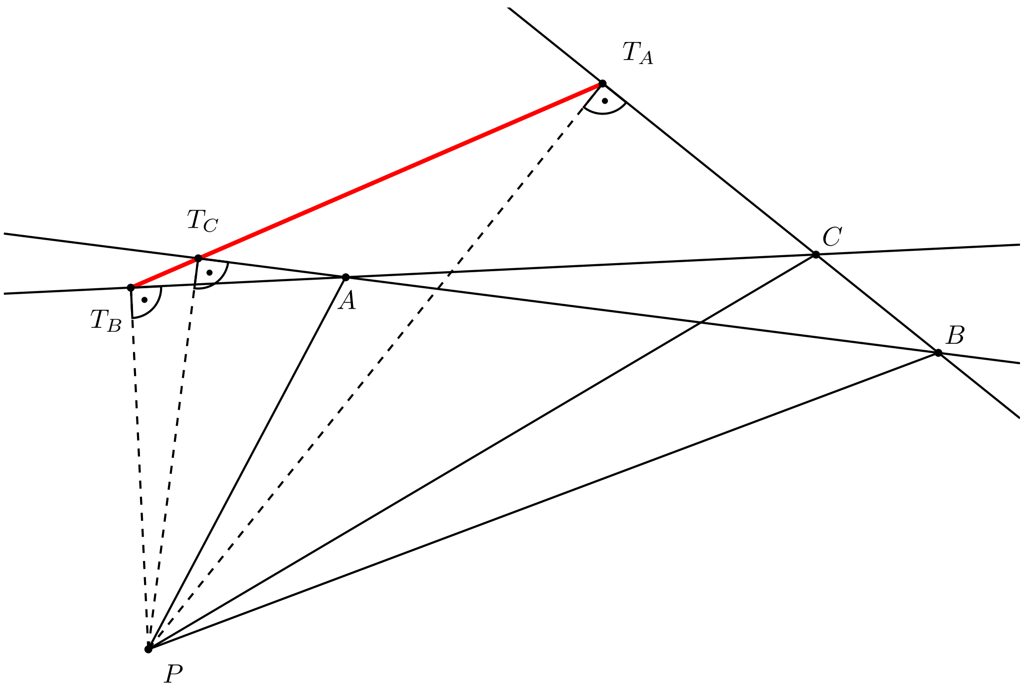
A kerületi szögek tétele szerint $APT_C\sphericalangle = AT_BT_C\sphericalangle$ és $CPT_A\sphericalangle = CT_BT_A\sphericalangle$.

Szintén a kerületi szögek tételéből $APC\sphericalangle = T_CPT_A\sphericalangle = 180° - \beta$, emiatt $APT_C\sphericalangle = CPT_A\sphericalangle$.

Az egyenlőségeket egybevetve $AT_BT_C\sphericalangle = CT_BT_A\sphericalangle$ következik, ami pont azt jelenti, hogy T_A, T_B és T_C egy egyenesre esnek.

A megfordítás bizonyításánál alaposabban megvizsgáljuk, hogyan helyezkedhetnek el a merőleges talppontok a háromszög oldalegyenesein. Ahhoz, hogy a három talppont kollineáris legyen, szükséges, hogy ne legyen mindhárom talppont a háromszög oldalainak belső pontja. Tovább pontosítva (Pasch-axióma!) azt mondhatjuk, hogy ha egy egyenes nem megy át egy háromszög csúcsain és mindhárom oldalegyenest metszi, akkor a metszéspontok között nulla vagy két belső pont lehet. Az ilyen elrendezések esetén kell bizonyítanunk tehát a megfordítást.

Nézzük azt az esetet, amikor a P-ből az oldalegyenesekre bocsájtott merőlegesek talpontjai közül egyik sem belső pontja a háromszög oldalainak!



A PT_BT_CA húrnégyszögben $PT_BT_C\sphericalangle = 180° - T_CAP\sphericalangle = BAP\sphericalangle$. A PT_BT_AC húrnégyszögben pedig $PT_BT_C\sphericalangle = 180° - T_ACP\sphericalangle = BCP\sphericalangle$. Tehát $BAP\sphericalangle = BCP\sphericalangle$, $PACB$ húrnégyszög, vagyis P rajta van ABC köréírt körén.

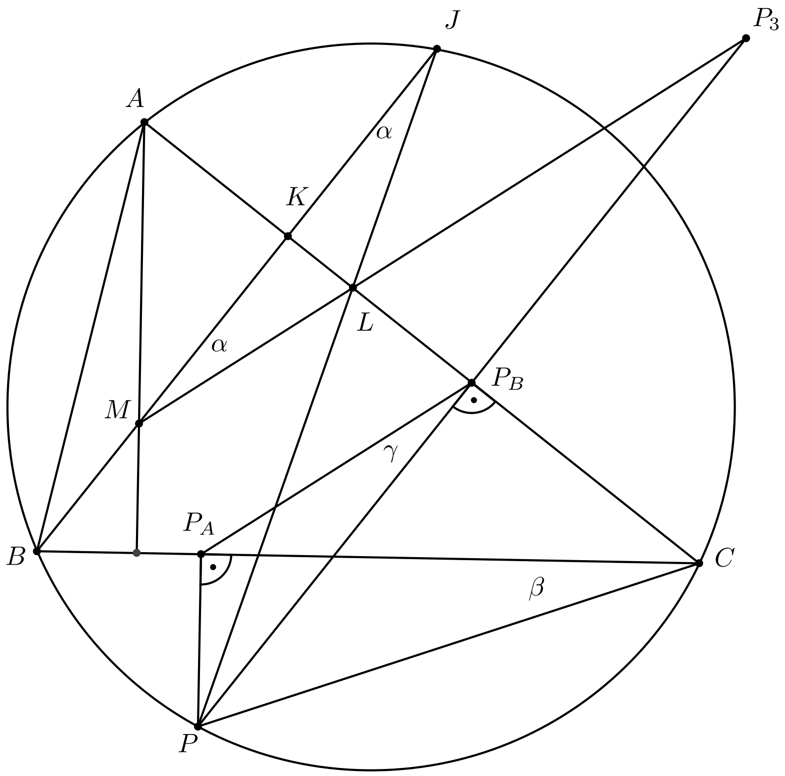
(vii.) Egy ABC háromszög köréírt körén lévő P pontot tükrözünk a háromszög oldalegyeneseire.

A tükörképek egy egyenesen vannak, és ez az egyenes átmegy a háromszög magasságpontján.

Bizonyítás: Az állítás első része következik az előző tételből, hiszen ha a tükörképekre P középpontú, $\frac{1}{2}$ arányú hasonlóságot alkalmazunk, akkor a Simson-Wallace egyenes pontjaiba mennek át.

Jelölje a tükörképeket P_1, P_2 és P_3! Mivel a $P_1P_2P_3$ egyenes – az előző észrevétel alapján – párhuzamos a P-hez tartozó Simson-Wallace egyenessel, elegendő megmutatni, hogy MP_3 (MP_1 és MP_2 is megfelel) is párhuzamos a szóban forgó Simson-Wallace egyenessel.

Készítsünk ábrát:



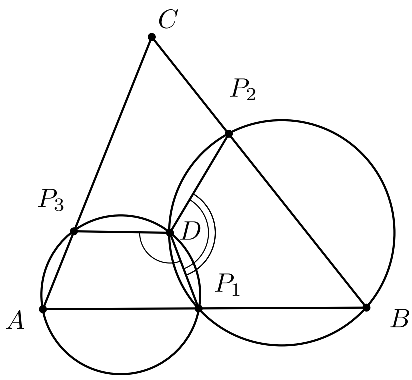
A PP_AP_BC húrnégyszögben $\beta = \gamma$. Ismert, hogy az M magasságpont AC-re (és a többi oldalra) vonatkozó tükörképe a köréírt körre illeszkedik. Esetünkben ez a tükörkép J. Tehát MP tükörképe AC-re JP_3, amiből az is következik, hogy MP_3 és JP az AC egyenesen metszik egymást. Ezt a metszéspontot L-lel jelöljük. Az MLJ háromszög egyenlő szárú, alapon fekvő szögeit jelölje α. A kerületi szögek tételét alkalmazva a BP ívre: $\alpha = \beta$. Az első egyenletünk alapján tehát $\alpha = \gamma$ is teljesül. Viszont tudjuk, hogy $MJ \parallel PP_3$, tehát $\alpha = \gamma$ miatt $MP_3 \parallel P_AP_B$ is igaz, és pont ezt akartuk bizonyítani.

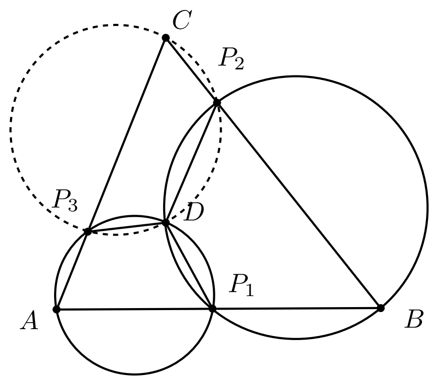
(viii.) (*Háromszög Miquel-pontja 1.*) Egy ABC háromszög AB, BC és CA *oldalán* tetszőlegesen felvesszük a P_1, P_2, P_3 pontokat.

Az AP_1P_3, BP_1P_2 és CP_2P_3 háromszögek köréírt körei egy ponton mennek át.

Bizonyítás: Az AP_1P_3 és BP_1P_2 háromszögek köréírt köreinek P_1-től különböző metszéspontját – ha létezik – jelölje D! Az AP_3DP_1 húrnégyszögben $P_3DP_1\sphericalangle = 180° - \alpha$, a BP_2DP_1 húrnégyszögben pedig $P_2DP_1\sphericalangle = 180° - \beta$.

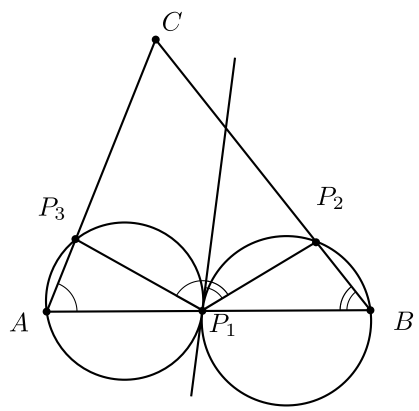
Tehát $P_3DP_2\sphericalangle = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma$, vagyis CP_3DP_2 is húrnégyszög, ezért a harmadik kör is átmegy D-n.



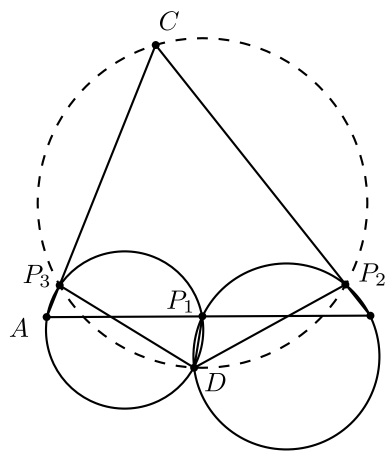


Mielőtt elégedetten hátradőlnénk gondoljuk végig, hogy teljes-e bizonyításunk. Nem vizsgáltuk azt az esetet, amikor a D pont egybeesik P_1-gyel, vagyis az AP_1P_3 és BP_1P_2 háromszögek köréírt körei érintik egymást (P_1-ben). Továbbá azt is meg kell gondolni, hogy a fenti ábráról levont következtetések minden elrendezés esetén érvényesek maradnak-e. Vegyük sorra e két kérdést!

A következő ábráról leolvasható, hogy abban az esetben, amikor AP_1P_3 és BP_1P_2 háromszögek köréírt körei érintik egymást, akkor $P_3P_1P_2\sphericalangle = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, tehát ilyenkor is teljesül az állítás, hiszen $CP_3P_1P_2$ húrnégyszög.



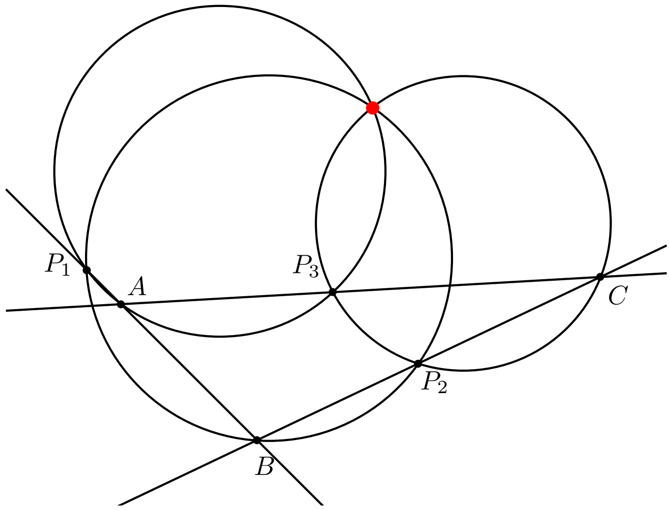
Végezetül – a diszkusszió hiányzó részének elemzéséhez – adunk egy ábrát egy olyan esetről, ahol a vizsgált körök metszik egymást, de fent közölt levezetést kicsit módosítani kell. Ebben az esetben is igaz az állítás, ennek végiggondolását az Olvasóra hagyjuk.



(ix.) (*Háromszög Miquel-pontja 2.*) Egy ABC háromszög AB, BC és CA *oldalegyenesén* tetszőlegesen felvesszük a csúcsoktól különböző P_1, P_2, P_3 pontokat.

Az AP_1P_3, BP_1P_2 és CP_2P_3 háromszögek köréírt körei egy ponton mennek át.

Bizonyítás: Első gondolatunk az lehet, hogy az előző lemma bizonyításának gondolata működik, csak több elrendezést kell végignézni. Ez valóban járható, de meglehetősen fáradságos út. A másik lehetőség, hogy – erősebb eszközök bevetésével – megpróbáljuk ,,megspórolni" a diszkusszió egy részét. Olyan megközelítést keresünk tehát, ahol a különböző elrendezések azonos módon írhatók le.



Egy kis kitérő: irányított szögek modulo π

Jelölje A, B, C, D, O, P a sík különböző pontjait. Irányított szögekre igazak a következők:

1. $\measuredangle ABC = -\measuredangle CBA$.
2. $\measuredangle APB + \measuredangle BPC = \measuredangle APC$.
3. $\measuredangle ABC = \measuredangle ABD$ akkor és csak akkor, ha B, C, D egy egyenesen van. Speciálisan $\measuredangle ABC = 0$ akkor és csak akkor, ha A, B, C egy egyenesen van.
4. $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$ akkor és csak akkor, ha A, B, C, D egy körön van.
5. $\measuredangle ABC = \measuredangle ACD$ akkor és csak akkor, ha CD érinti A, B, C köréírt körét.
6. $\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 0$.
7. $2\measuredangle ABC = \measuredangle AOC$, ha A, B, C egy O középpontú körön vannak.

Ezután a kitérő után már egységesen tudjuk elintézni az összes esetet.

Az előző lemma bizonyításához hasonlóan most is jelöljük D-vel az AP_1P_3 és BP_2P_1 háromszögek k_A és k_B köréírt körének második metszéspontját.

A k_A körben: $\measuredangle DP_1A = \measuredangle DP_3A$, a k_B körben $\measuredangle DP_1B = \measuredangle DP_2B$.

A P_1 pont az AB egyenesen van, ezért $\measuredangle DP_1A = \measuredangle DP_1B$.

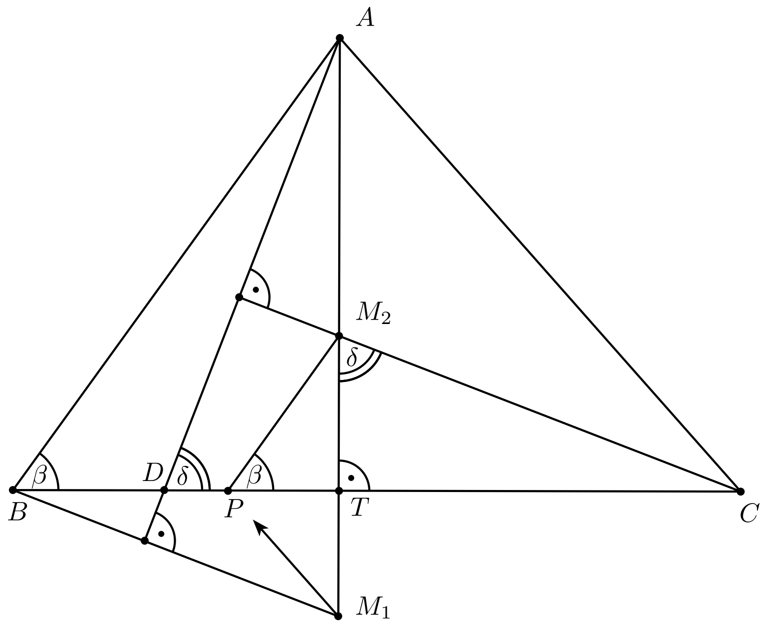
Hasonlóan $\measuredangle DP_3A = \measuredangle DP_3C$ és $\measuredangle DP_2B = \measuredangle DP_2C$.

Összegezve az eddigieket $\measuredangle DP_3C = \measuredangle DP_2C$, tehát D rajta van P_2CP_3 köréírt körén.

(x.) Az ABC háromszög BC oldalának pontja D. Az ABD háromszög magasságpontján át párhuzamost húzunk AC-vel (e_B), és az ACD háromszög magasságpontján át párhuzamost húzunk AB-vel (e_C).

Az e_B és e_C egyenesek BC-n metszik egymást.

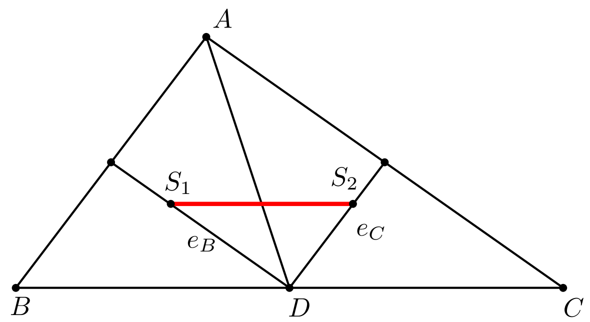
Bizonyítás: Kiszámoljuk, hol metszi e_B és e_C a BC egyenest. Az eredeti háromszög A csúcsából induló AD magasság D talppontjától való távolságot határozzuk meg, hasonló háromszögek segítségével.



(xi.) Az ABC háromszög BC oldalának pontja D. Az ABD háromszög súlypontján át párhuzamost húzunk AC-vel (e_B), és az ACD háromszög súlypontján át párhuzamost húzunk AB-vel (e_C).

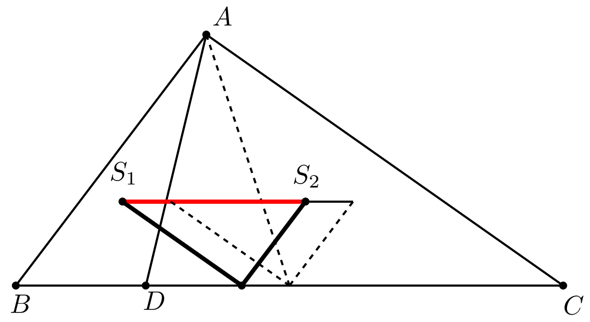
Az e_B és e_C egyenesek BC-n metszik egymást.

Bizonyítás: Elsőnek nézzük azt az esetet, amikor AD súlyvonal:



Ilyenkor az ABD háromszög D-ből induló súlyvonala az ABC háromszög AC-vel párhuzamos középvonala, és ADC D-ből induló súlyvonala szintén ABC háromszögben az AB-vel párhuzamos középvonal. Ekkor e_B és e_C egybesesik az előbb említett középvonalakkal, így nyilván a BC-n metszik egymást, D-ben.

Ezek után „mozdítsuk el” D-t a BC oldal felezőpontjából. Az S_1S_2 szakasz továbbra is párhuzamos marad BC-vel, és hossza sem változik, tehát S_1-en és S_2-n át megrajzolva az e_B, e_C egyeneseket az előző (speciális) esetben kapott S_1S_2D háromszöggel egybevágó háromszög keletkezik. Mivel S_1S_2 BC-től továbbra is a magasság harmada távolságra van, ezért e_B és e_C továbbra is BC-n metszi egymást.



(xii.) A síkon adottak az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok, továbbá adott n darab valós szám: $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Tekintsük azon P pontok mértani helyét a síkon, amelyekre a

$$k_1|PA_1|^2 + k_2|PA_2|^2 + \ldots + k_n|PA_n|^2 = c,$$

valamilyen rögzített valós c-re.

A P pontok mértani helye:

a) egy kör vagy egy pont vagy az üres halmaz, ha $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$;

b) egy egyenes vagy az egész sík vagy az üres halmaz, ha $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 0$.

Bizonyítás: Jelölje A_i koordinátáit $(x_i; y_i)$, P koordinátáit $(x; y)$. A feltételt koordinátákkal felírva:

$$\begin{aligned}(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)(x^2 + y^2) - 2(k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n)x - 2(k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots + k_ny_n)y+\\ +(k_1(x_1^2 + y_1^2) + k_2(x_2^2 + y_2)^2 + \ldots + k_n(x_n^2 + y_n^2) - c) = 0\end{aligned}$$

(xiii.) Adott egy ABC háromszög, továbbá a háromszög síkjában két pont, M_1 és M_2, amelyekre

$$AM_1 : BM_1 : CM_1 = AM_2 : BM_2 : CM_2.$$

Az M_1M_2 egyenes átmegy ABC köréírt körének középpontján.

Bizonyítás: Legyen $AM_1 : BM_1 : CM_1 = p : q : r$, és tekintsük azon M pontok halmazát a síkon, amelyekre $(r^2 - q^2)AM^2 + (p^2 - r^2)BM^2 + (q^2 - p^2)CM^2 = 0$. Az előző lemma miatt ez a halmaz egy egyenes vagy az egész sík vagy az üres halmaz. Ez utóbbit kizárhatjuk, hiszem M_1, M_2 és ABC köréírt körének O középpontja is eleme a halmaznak. Ha még azt is megmutatjuk, hogy a síknak nem minden pontja felel meg a feltételnek, akkor igazoltuk, hogy M_1 M_2 egyenese átmegy O-n.

Az A pont megfelel erre a célra, ha $p \neq 0$.

Források

1. Ehrmann J. *Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral*, Forum Geom. Vol. 4 (2004)
2. Honsberger R. *Episodes in nineteenth and twentieth century euclidean geometry*
3. Kendlaya K. S. *Geometry Unbound* (`http://www-math.mit.edu/~kedlaya/geometryunbound/`)
4. Lamoen-Grinberg *Six Surprises from Four Lines*,
   Mathematical Monthly (112) December 2005, 11025. feladat megoldása, 930. oldal
5. Reiman István *A geometria és határterületei*, Gondolat, 1986
6. Reiman István *Megjegyzések az Eötvös-Kürschák Verseny feladataihoz*, in: Új matematikai Mozaik
7. Sharygin I. F. *Problems in Plane Geometry*, Mir Publisher Moscow, 256-263. feladatok
8. Sharygin I. F. *The complete quadrilateral*, in: Quantum 1997 július
   (Ebben a cikkben található a 11 tulajdonság.)
9. Steiner M. J. *Questions proposées. Theoreme sur le quadrilatere complet*,
   Annales de Mathematiques pures et appliquees, tome 18 (1827-1828), p. 302-304.
10. Yaglom I. M. *Geometric transformations III.*
11. `http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/CircleOnCevian.shtml`
12. `http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Quadri.shtml`
13. `http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/NewtonTheorem.shtml`
14. `http://www.cut-the-knot.org/4travelers/Cabart.shtml`
15. `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Steiner.html`
16. `http://www.jgypk.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/1998/geometria/web.htm`

Gál Györgyné: Számelmélet – Irracionális és racionális számok, négyzetszámok

Források

Kosztolányi József - Makay Géza - Pintér Klára - Pintér Lajos: Matematikai problémakalauz I.

Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből

Feladatok

1. Keressünk irracionális számot $\frac{1}{17}$ és $\frac{1}{16}$ között!

   $17 = \sqrt{279}$, $16 = \sqrt{256}$, így pl. $\frac{1}{\sqrt{260}}$ egy lehetséges megoldás.

   Másképp: $\frac{1}{16} = 0,0625$ és $\frac{1}{17} < 0,06$, így pl. $0,0610110111011110\ldots$ jó lesz.

   Közben megbeszéljük , hogy

   a) Irracionális reciproka is irracionális

   Bizonyítás indirekt: racionális reciproka racionális

   b) Irracionálisok tizedestört alakja

2. Mikor lesz $\sqrt{n}$ irracionális?

   Indirekt: Tegyük fel, hogy $n = \frac{p}{q}$, ahol p és q egészek. Ekkor $nq^2 = p^2$. q^2 -ben és p^2 -ben minden prímtényező kitevője páros, tehát n -ben is minden kitevőnek párosnak kell lennie. Tehát n pontosan akkor racionális, ha n négyzetszám.

3. Összeadás, kivonás, szorzás, osztás

   — egy racionális és egy irracionális között

   Mindig irracionális, különben valamelyik alapművelet két racionális között irracionális lenne. (Végignéztük mindegyiket részletezve)

   — két irracionális között

   Minden lehet: pl. $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ irracionális, de $\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) = 2$ racionális. (Végignéztük az összes műveletet)

4. Miért lesz irracionális $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, ill. $\sqrt{12} + \sqrt{3}$?

   Az első: Tegyük fel, hogy racionális. Emeljük négyzetre. Az előbbiek alapján az kellene, hogy 6 racionális, ami nem igaz.

   A második: Ugyanez a módszer nem jó, hisz négyzetre emelés után $\sqrt{36}$ -ot kapunk, ami nem vezet ellentmondásra. De némi átalakítással ez a kifejezés $3\sqrt{3}$, ami a fentiek alapján irracionális.

5. Racionális vagy irracionális $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$?

   Legyen a fenti kifejezés "a". Köbre emelve és kiemelve kapjuk, hogy $a^3+3a-4=0$. Láthatóan az $a=1$ megoldás lesz. Kiemelve $(a-1)$-et, a másik tényező (a^2+a+4) nem lehet nulla, ami nem meglepő, hisz csak egyetlen a érték lehetséges.

   Tehát $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$.

6. Lehet-e irracionális szám irracionális kitevőn racionális?

   — Közben megbeszéljük a hatványozás kiterjesztését racionális ill. irracionális kitevőkre. (Megtartjuk az azonosságokat, ill. az a^x monotonitását.)

   Erre példa lehet a $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ha ez racionális, akkor készen vagyunk. Ha irracionális, akkor emeljük ezt $\sqrt{2}$ - dik hatványra. $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^2=2$, tehát racionális. A két eset közül tehát az egyikben irracionális szám irracionális hatványa racionális lett.

7. Egy háromszög oldalai legyenek $2, n$ és $n+1$, ahol n 1-nél nagyobb egész. Egy belső pont az oldalaktól x, y, z távolságra van. Bizonyítsuk be, hogy x, y, z nem lehet mind racionális.

   A háromszög területe $\frac{2x}{2}+\frac{ny}{2}+\frac{(n+1)z}{2}$. Ez racionális, ha x, y, z mindegyike racionális. Másképpen a terület Heron-képlettel: $\frac{1}{4}\sqrt{12n^2+12n-9}$, ami irracionális. Ugyanis a gyök alatti kifejezés 4-gyel osztva 3 maradékot ad, ami egy négyzetszámnál lehetetlen. (Egy szám 4-gyel osztva 0, ± 1 vagy 2 maradékot ad, ezek négyzete rendre 0, 1 ill. 0 maradékot ad.)

8. Adottak az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ tetszőleges valós számok. Igazoljuk, hogy van olyan a valós szám, amire $a+x_1, a+x_2, a+x_3, \ldots, a+x_{10}$ mindegyike irracionális.

   Ha minden x_i racionális, akkor tetszőleges a irracionális szám megfelel. Ha van egy x_i irracionális szám, akkor vizsgáljuk az $x_i, 2x_i, 3x_i, \ldots, 11x_i$ számokat, mint lehetséges a-kat. Tételezzük fel, hogy egyik sem jó, azaz mindegyiknél találunk legalább egy x_j-t, amire $a+x_j$ racionális. Mivel azonban ez 11 lehetőség, x_j pedig csak 10 van, biztosan van olyan x_j, amihez kétféle a-t hozzáadva racionális számot kapunk. Azaz $kx_i+x_m=$ racionális és $lx_i+x_n=$ racionális. Ez azt jelentené, hogy a különbségük, azaz $(k-l)x_i$ racionális, ez pedig lehetetlen.

   Könnyedén tudunk általánosítani 10 számról n számra, lényegében semmi nem változik.

9. Legyen az $x^2-6x+1=0$ egyenlet két megoldása x_1 és x_2. (Ezek a megoldóképletből: $\frac{-6\pm\sqrt{32}}{2}$ irracionális számok.) Állítás: Az $a_n=(x_1)^n+(x_2)^n$ sorozat minden eleme 5-tel nem osztható egész szám.

   A bizonyítás során felhasználjuk a gyökök és együtthatók közötti összefüggést, miszerint

   $x_1+x_2=6$ és $x_1x_2=1$.

   $a_1=x_1+x_2=6$

   $a_2=(x_1)^2+(x_2)^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=36-2=34$

   $a_3=(x_1)^3+(x_2)^3=(x_1+x_2)[(x_1)^2-x_1x_2+(x_2)^2]=6\cdot(34-1)=198=6\cdot 34-6=6a_2-a_3$

   $a_4=(x_1)^4+(x_2)^4=[(x_1)^2+(x_2)^2]^2-2(x_1x_2)^2=34^2-2=1154=6\cdot 198-34=6a_3-a_2$

   A fentiek alapján a sejtésünk:

   $a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}$

   Valóban:

   $a_n=(x_1)^n+(x_2)^n=(x_1+x_2)[(x_1)^{n-1}+(x_2)^{n-1}]-[(x_1(x_2)^{n-1}+x_2(x_1)^{n-1}]==(x_1+x_2)[(x_1)^{n-1}+(x_2)^{n-1}]-x_1x_2[(x_1)^{n-2}+(x_2)^{n-2}]=6a_{n-1}-a_{n-2}$

   Az eredeti állítást teljes indukcióval bizonyítjuk:

   a_1, a_2, a_3 láthatóan egészek, és nem oszthatóak 5-tel.

   Tegyük fel, hogy a_{n-1}-ig minden sorozatelemre igaz az állítás.

   $a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}=5a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}=5a_{n-1}+5a_{n-2}-a_{n-3}$, tehát a_n-re is igaz.

10. Lehet-e négyzetszám $2^n + 3^n$, ha n természetes szám?

    Ha $n = 2k$

$$2^{2k} + 3^{2k} = (5-1)^k + (10-1)^k = 5p + (-1)^k + 10q + (-1)^k = 5m + 2(-1)^k$$

    Ez lehetetlen, mert egy szám 5-tel osztva $0, \pm 1, \pm 2$ maradékot adhat, ennek a négyzete rendre 0, 1, 4 maradékot ad, előző kifejezésünk pedig ± 2-t ad maradékul.

    Ha $n = 2k + 1$

$$2^{2k+1} + 3^{2k+1} = (3-1)^{2k+1} + 3^{2k+1} = 3m - 1$$

    Ez lehetetlen, mert egy szám 3-mal osztva 0, ± 1, maradékot adhat, ennek a négyzete rendre 0, 1 maradékot ad, előző kifejezésünk pedig -1-et ad maradékul.

    Tehát $2^n + 3^n$ nem lehet négyzetszám.

11. Keressünk

    $2^k + 2^m$

    $3^k + 3^m$

    $4^k + 4^m$

    $5^k + 5^m$

    $6^k + 6^m$

    $7^k + 7^m$

    $8^k + 8^m$

    alakú négyzetszámokat, ahol k és m különböző pozitív egészek. Van-e végtelen sok?

    $2^5 + 2^2 = 6^2$, ill. innen $2^{2n+5} + 2^{2n+2} = (2^n \cdot 6)^2$

    $3^3 + 3^2 = 6^2$, ill. innen $3^{2n+3} + 3^{2n+}2 = (3^n \cdot 6)^2$

    $8^3 + 8^2 = 24^2$, ill. innen $8^{2n+3} + 8^{2n+2} = (8^n \cdot 24)^2 2$, tehát, ha egy van, akkor végtelen sok is van.

    A többi nem lehet négyzetszám, mert

    $4^k + 4^m = 4^m(4^{k-m} + 1)$, így $4^{k-m} + 1 = q^2$ kellene, de az nem lehet, mert ebből $1 = (q - 2^{k-m})(q + 2^{k-m})$ kellene legyen, de ez lehetetlen.

    5^k vége 25, ill. $k =$ 1-re 5. Így $5^k + 5^m$ vége 30 vagy 50, ami lehetetlen egy négyzetszámnál, hisz ha a végén 0 áll, akkor előtte is 0 áll.

    $6^k + 6^m$ utolsó jegye 2, ilyen négyzetszám pedig nincs.

    $7^k = (3 \cdot 2 + 1)^k$, ami 3-mal osztva 1-et ad maradékul, tehát $7^k + 7^m$ nem lehet négyzetszám, mert 3 -mal osztva 2-t ad maradékul.

Hubert Györgyné: Kúpszeletek

1. Előzmények

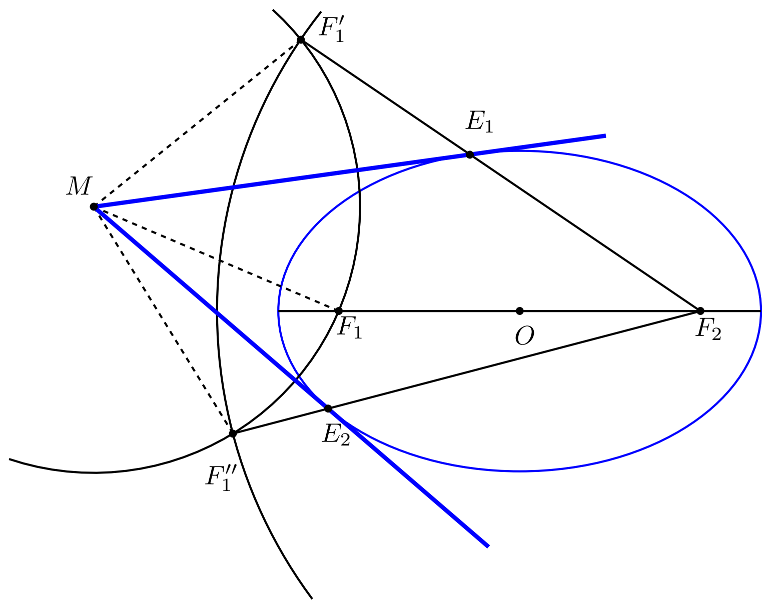
A következőkhöz ismernünk kell a görbék elemi definícióit, a görbék érintőit – mint a vezérsugarak (külső vagy belső) szögfelezőit–, a görbék vezérköreit (vezéregyenesét), főkörét (főegyenesét). (Ennek feldolgozása lényegében a 2005-ös tábor anyagának alapján történt.)

2. Érintők külső pontból

Szerkesszünk külső (M) pontból a görbékhez érintőt!

2.1 Az M középpontú, MF_1 (vagy MF) sugarú kör az F_2 középpontú vezérkörből (vagy a vezéregyenesből) kimetszi az F_1 (vagy F) fókusz érintőkre vett tükörképeit. Ezek után az F_1 F_1' és F_1F_1'' (vagy FF' és FF'') szakasz szakaszfelező merőlegeseként szerkeszthető az érintő. Az érintő és a tükörképhez tartozó vezérkör-sugár (vagy a tükörképben a vezéregyenesre állított merőleges) metszéspontja az érintési pont.

Például ellipszisnél:



Ugyanígy megy a másik két görbénél is.

2.2 Másként: MF Thalész köre a főalakzatból kimetszi az érintők egy-egy pontját.

2.3 Az előzőekből következik, hogy: Külső pontból a kúpszelethez (hiperbolánál: egyik ágához) húzott két érintőszakasz egy fókuszból azonos szög alatt látszik.

(Bizonyítása pl. ellipszisnél: Tekintsük az $MF_1'F_2F_1''$ négyszöget, mely egy deltoid, amelynek szimmetria tengelye MF_2. Így az MF_2E_1 és MF_2E_2 szögek megegyeznek, ill. egyenlőek az $MF_1'E_1$ és $MF_2'E_2$ szögek is, amelyek az MF_1E_1 és MF_2E_2 szögek érintőkre vett tükörképei.)

3. A társérintők

Társérintőknek nevezünk két érintőt, ha az érintési pontok által meghatározott egyenes átmegy a fókuszon (ellipszis és hiperbola esetében az egyik, mondjuk az F_1 fókuszon)

3.1 Társérintők esetében MF (ill. MF_1) merőleges E_1E_2-re. (Az állítás következik 2.3 tételből.)

3.2 Ismert tétel, hogy a parabola társérintői a parabola vezéregyenesén metszik egymást. (Ez az állítás is közvetlen következménye 2.3-nak)

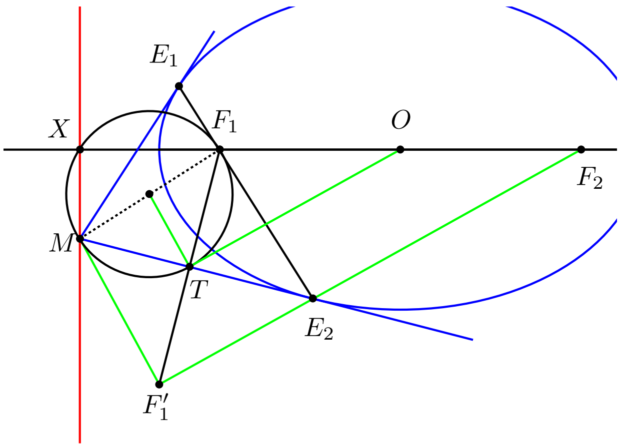
3.3 Érdemes megvizsgálni ellipszis ill. hiperbola esetén, hogy hol metszik egymást az F_1-hez (hiperbolánál az egyik ághoz) tartozó társérintők.

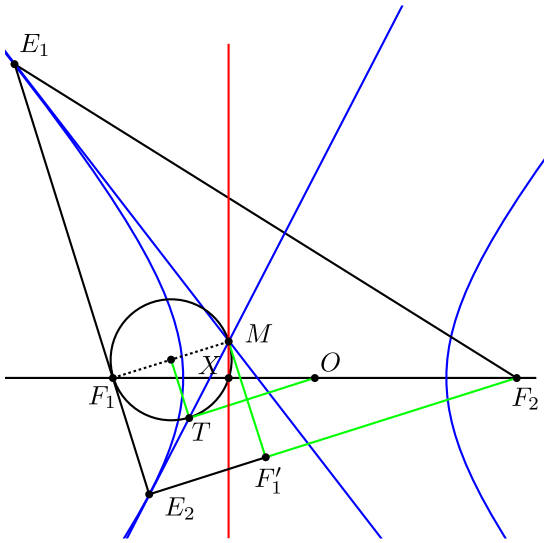
Állítás: az M metszéspontok egy, a nagytengely egyenesére merőleges egyenesen vannak!

Azt bizonyítjuk, hogy az M pontnak a nagytengely egyenesére vett merőleges vetülete (X pont) független a társérintők megválasztásától. Az MF_1 szakasz k Thalesz körén rajta van az X és a T pont is. E kört az OT szakasz T-ben érinti. (Hiszen OT merőleges a k kör T-hez tartozó sugarára, mert e szög az $MF_1'F_2$ szögből F_1 centrumú (1/2 arányú) centrális hasonlósággal kapható meg – s az $MF_1'F_2$ derékszög, hiszen az MF_1E_1 tükörképe.)

Mindezek után az O pont k körre vonatkozó hatványa: $OF_1 \cdot OX = OT^2$, ebből (a szokásos jelölésekkel) $OX = a^2/c$, hiszen a T pont rajta van a görbe főkörén.

Ellipszis és hiperbola társérintői:





4. Kúpszeletek vezéregyenese

A táborban eddig jutottunk. Csak meséltem még egy kicsit arról, hogy ez (ezek) az egyenes(ek) milyen ,,nevezetes(ek)". Azaz mindhárom görbére igaz, hogy minden fókuszhoz tartozik egy-egy egyenes (s pontosan ez az), melyre igaz, hogy a görbepontok fókusztól ill. ezen egyenestől mért távolságának aránya egy állandó érték, parabolánál 1, ellipszisnél $c/a < 1$, hiperbolánál $c/a > 1$. Egységesen ezeket az egyeneseket vezéregyenesnek hívjuk.

4.1 Paraboláról már ,,régen" tudjuk...

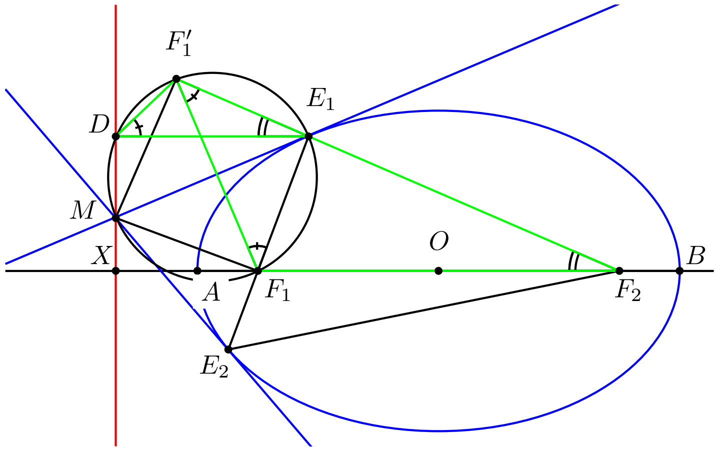
4.2 Az ellipszis pontjaira igaz az előbbi tétel.

Bizonyítása az előzőek alapján. E_1 a görbe nagytengely-végpontoktól különböző pontja. E pontba húzott érintőnek és társérintőjének metszéspontja M, rajta van az O-tól a/c távolságra levő, a nagytengelyre merőleges egyenesen.

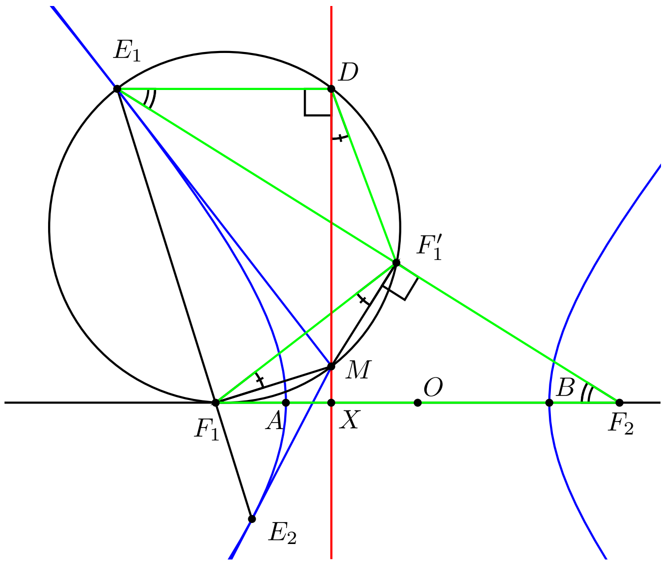
Áll.: $E_1F_1/E_1D = c/a$.

Biz.: ME_1 Thalesz körén rajta van az F_1, F_1' és a D pont is. Ezért az $F_1'DE_1$ szög megegyezik az $F_1'F_1E_1$ szöggel, amelynek tükörképe az $F_1F_1'F_2$ szög. A DE_1F_1' szög egyállású, s ezért egyenlő az $F_1F_2F_1'$ szöggel. Így a $DF_1'E_1$ háromszög hasonló az $F_1'F_1F_2$ háromszöghöz, tehát megfelelő oldalaik aránya megegyezik, azaz: $F_1'E_1/E_1D = F_1F_2/F_1'F_2 = 2c/2a(= c/a)$, de $E_1F_1' = E_1F_1$-gyel (hisz egymás tükörképei).

Az A és B pontokra az állítás egyszerű számolással adódik.



4.3 Hiperbolára is igaz a tétel, bizonyítása alig különbözik az előzőtől.



5. Továbblépés

A témát folytatni lehetne:

E görbék vezéregyenesei nem mások, mint:

Ha e három görbét előállítjuk egy kúp síkmetszeteként, akkor a vezéregyenesek nem mások, mint a metsző síknak (azaz a görbe síkjának) a Dandelin-féle gömbök kúppal alkotott érintőköreinek síkjával alkotott metszésvonala.

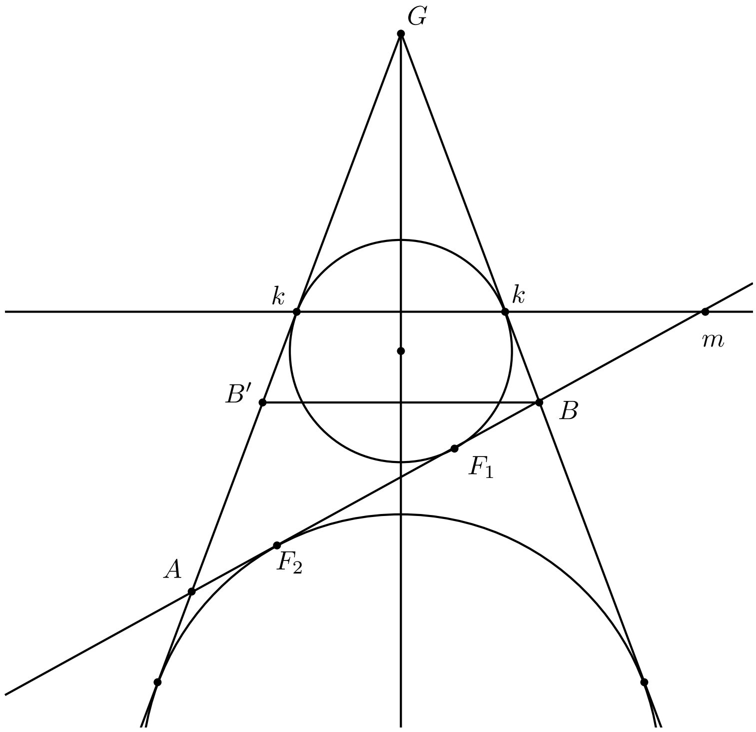
Parabolára ismert a tétel.

Ellipszisre:

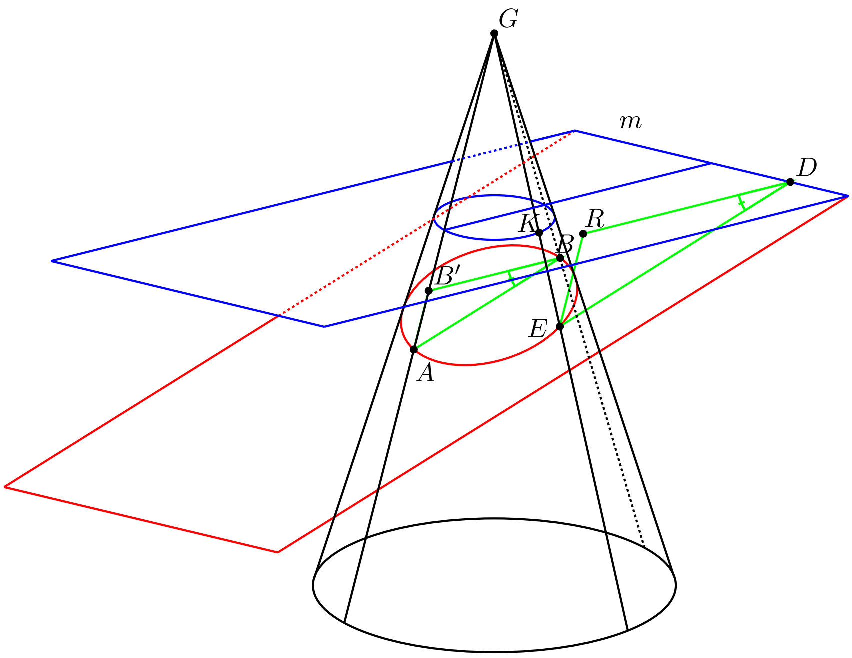
Ennek bizonyításához sem kell több a háromszögek hasonlóságánál.

Az $S(t)$ sík a kúpnak a metsző síkra merőleges tengelymetszete.

Itt : $2c = F_1F_2 = GA - GB = AB'$, $AB = 2a$



$S(k)$ a Dandelin gömb kúppal alkotott érintőkörének síkja, m pedig $S(k)$ és a metsző sík metszésvonala.



E legyen a metszetgörbe (ellipszis) tetszőleges pontja. $S(E)$ legyen az E-re illeszkedő, m-re merőleges sík (,ami párhuzamos $S(t)$-vel). Az E pont m-re vett merőleges vetülete legyen a D pont, ami persze az $S(E)$ és m döféspontja.

Az E-t tartalmazó (kúp-)alkotó k-val alkotott metszéspontja K. Tudjuk, hogy $EK = EF_1$. Az $S(E)$ síkban dolgozva húzzunk párhuzamost a GA egyenessel, ennek $S(k)$-val alkotott döféspontja az R pont. $ER = EK(= EF_1)$, hiszen az $S(k)$ síkkal alkotott szögük megegyezik.

Már csak azt kell belátni, hogy $ER/ED = c/a$.

Ez viszont következik az ERD háromszög és az $AB'B$ háromszögek (a megfelelő oldalak párhuzamosak) hasonlóságából. $ER/ED = AB'/AB = 2c/2a = c/a$.

Azt hiszem, hogy hiperbolára ugyanígy megy.

(Persze sokkal olcsóbban is meg lehet úszni, ha kiszámítjuk a Bm távolságot az $S(t)$ síkban – egyszerű hasonlósággal adódik, hogy $Bm = a \cdot (a - c)/c$, s ez megegyezik a 3.3-ban kapott eredménnyel, de ehhez kell minden előbbi...)

Mahler Attila: Focibajnokságok és véges geometriák

Mahler Attila szakdolgozata

1. Bevezető

A legtöbb labdarúgó-bajnokságot oda-visszavágós körmérkőzéses rendszerben bonyolítják le. A sportot kedvelő nézők megszokhatták, hogy egy ilyen $n$csapatos bajnokságot $2(n-1)$ forduló alatt rendeznek meg évről-évre, hiszen minden csapat kétszer csap össze az $(n-1)$ másik csapattal. Azonban egy ilyen szervezés megkonstruálása nem könnyű (és csak páros n esetén lehetséges). Ha el szeretnénk készíteni egy lehetséges lebonyolítást, már viszonylag kisebb létszámnál is beleszaladhatunk olyan helyzetbe, hogy az elkezdett beosztást nem lehet befejezni ennyi forduló alatt, mert az egyik együttesnek kettő másikkal is játszania kellene egy fordulóban. Nagyobb nemzeti bajnokságok esetében, ahol 16, 18 vagy 20 csapat szerepel, szinte lehetetlen „próbálgatással" jó szervezést találni. Emellett a valós bajnokságoknál meg van különböztetve a két csapat, aszerint, hogy melyik a hazai és melyik a vendég, sőt rendszerint figyelembe kell venni különböző egyéb igényeket is a stadionnal kapcsolatban. Ezek a kitételek tovább nehezítik az amúgy sem könnyű feladatot.

A szakdolgozat célja, hogy ennek a mindenki számára ismert és könnyen érthető problémának a megoldási lehetőségeit bemutassa a matematika különböző ágainak segítségével. Elsősorban a véges geometria eszközeivel létrehozható párosításokat mutatom be, de szerepel gráfelméleti megoldása is a problémának. Ezenkívül a szervezés gyakorlati oldalát is bemutatom, köszönhetően a Magyar Labdarúgó Szövetség segítőkész munkatársainak, ugyanis rendelkezésemre bocsátották a magyar bajnokságok szervezési rendjét, illetve személyes tájékoztatást adtak a sorsolásról is.

2. A körmérkőzéses bajnokság

Ahhoz, hogy a kérdést matematikailag meg tudjuk közelíteni, a feladatot át kell fogalmazni a matematika nyelvére. Ehhez pontosan rögzíteni kell a fogalmakat és azt, hogy mit várunk el egy szervezéstől.

Körmérkőzéses bajnokságnak olyan versenysorozatot nevezünk, ahol egy mérkőzésen két csapat találkozik és minden csapat mindegyik másikkal pontosan egy mérkőzést játszik. Egy ilyen bajnokság fordulókból áll össze, méghozzá úgy, hogy minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzést játszik. Ez lehetővé teszi, hogy egy forduló összes mérkőzését egyidőben rendezzék. Ha a bajnokságban n csapat szerepel, akkor értelemszerűen legalább $n-1$ fordulóra szükség van a bajnokság lebonyolításához, mivel egy adott csapat $n-1$ másikkal találkozik, és egy fordulóban csak egy mérkőzést játszhat. Páros n esetén elég is az $n-1$ forduló, de páratlan n-nél többre van szükség, hiszen egy fordulóban páros sok csapat játszik, azaz legalább egy csapatnak pihennie kell. Ezt a problémát úgy oldhatjuk meg, hogy a valódi csapatokhoz felveszünk egy „Pihenőnap" nevű képzeletbeli csapatot, és aki vele játszana egy adott fordulóban, az a csapat pihen. Így már $n+1$ csapatos a bajnokság, ahol $n+1$ páros, tehát $(n+1)-1=n$ forduló elegendő a bajnokság lebonyolításához. Ezért a továbbiakban csak a páros n-ekkel foglalkozunk.

A valóságban megszokott oda-visszavágós bajnokság rendszer is ugyanígy működik. Ekkor mindenki mindenkivel kétszer játszik, egyszer hazai pályán, egyszer pedig vendégként. Tulajdonképpen ősszel és tavasszal is megrendezik ugyanazt a körmérkőzéses bajnokságot, de közben minden mérkőzésen felcserélik a pályaválasztói jogot. Tehát ha megvan egy szervezése egy körmérkőzéses bajnokságnak, akkor abból rögtön elkészíthető az oda-visszavágós bajnokságé is.

Már megfogalmaztuk, hogy mik az elvárások egy körmérkőzéses bajnoksággal szemben, most nézzük meg, hogyan tudunk készíteni ilyen szervezéseket.

3. Véges geometriai megközelítés

3.1 Véges testek

3.1.1. Definíció: Adott egy H halmaz, amin értelmezve van két művelet: $\oplus$ és $\otimes$. Ezt a struktúrát *testnek* nevezzük, ha igaz rá a következő kilenc tulajdonság ($\forall a, b, c \in H$-ra):

— A műveletek *kommutatívak*, azaz:

$$(1)\ a \oplus b = b \oplus a \quad \text{és} \quad (2)\ a \otimes b = b \otimes a$$

— A műveletek *asszociatívak*, azaz:

$$(3)\ (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad \text{és} \quad (4)\ (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

— A műveleteknek van *egységelemük*, azaz létezik egy-egy olyan 0-val, illetve 1-gyel jelölt elem, melyekre:

$$(5)\ a \oplus 0 = 0 \oplus a = a \quad \text{és} \quad (6)\ a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$$

— Minden elemnek egyértelműen létezik egy $(-a)$-val jelölt *additív inverze*, melyre:

$$(7)\ a \oplus (-a) = 0$$

— Minden 0-tól különböző elemnek egyértelműen létezik egy a^{-1}-nel jelölt *multiplikatív inverze*, melyre:

$$(8)\ a \otimes a^{-1} = 1$$

— Az összeadás a szorzásra nézve *disztributív*disztributív, azaz:

$$(9)\ a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

Például a valós számok halmaza a szokásos összeadás és szorzás műveletére nézve testet alkot. De nem minden számhalmaz elégíti ki ezeket a feltételeket, a természetes számok esetén például a 0-n kívül egyetlen számnak sincs additív inverze. Azaz– a szokásos szóhasználattal – a szám ellentettje nem eleme a számkörnek. Az előbbi esetekben az alaphalmaz elemszáma mindkétszer végtelen volt, nézzük meg hogyan tudunk véges alaphalmazon testet definiálni.

3.1.2. Definíció: Egy H halmaz és rajta értelmezett két művelet *véges testet* alkot, ha H elemszáma véges és a műveletekre igazak az előbbi testaxiómák.

Vegyünk egy p prímszámot és minden egész számot feleltessünk meg a p-vel vett osztási maradékának. (A maradékról feltehetjük, hogy $0 \leq m \leq p-1$.) Így p darab különböző osztályt kapunk aszerint, hogy a maradék $0, 1, \ldots$ vagy $p-1$. Legyen tehát $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Ekkor minden egész számot egyértelműen besorolhatunk egy osztályba. A $\oplus$ és $\otimes$ művelet pedig legyen a valós számoknál is értelmezett összeadás, illetve szorzás, azzal a megkötéssel, hogy amennyiben az eredmény nem halmazbeli elem, akkor nézzük a p-vel vett osztási maradékát és máris halmazbeli elemet kapunk. Ez a struktúra véges test. Ehhez ellenőrizni kell, hogy igazak a testaxiómák, valamint, hogy jól vannak definiálva a műveletek, azaz az eredmény csak az osztályoktól függ és nem az abból kiválasztott elemektől.

Ezek alapján belátható, hogy bármely p prímszám esetén létezik p elemű véges test. Ennél azonban több is igaz: F halmazon akkor és csak akkor értelmezhető két művelet úgy, hogy véges testet alkosson, ha F elemszáma prímhatvány. Viszont ha F elemszáma valódi prímhatvány, akkor nem ilyen könnyű definiálni a műveleteket. Például ha $\mathbb{Z}_4$-en hasonlóképp értelmezzük a műveleteket, akkor $2 \otimes 2 = 0$ lenne ($2 \cdot 2 = 4$, aminek a 4-gyel vett osztási maradéka 0). Ez viszont ellentmond az axiómáknak, amelyekből levezethető, hogy egy test *nullosztómentes*, azaz ha $a \otimes b = 0$ akkor vagy $a = 0$ vagy $b = 0$. Ennek, és az algebrai háttérnek a [1]-es hivatkozásban lehet utánanézni.

3.2 Véges affin síkok

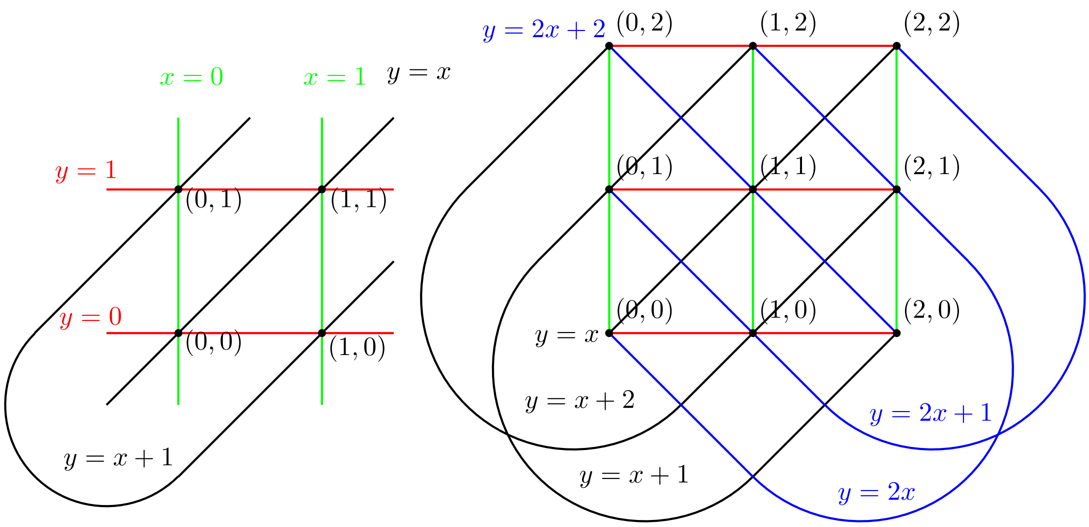
Az euklideszi síkon koordinátarendszerben helyeztük el az alakzatokat, így a valós számok műveleti tulajdonságaival oldottunk meg geometriai feladatokat. Mint korábban láttuk a valós számok testet alkotnak, ezt kihasználva épül fel a koordinátageometria. Próbáljunk meg egy véges test fölötti koordinátageometriát létrehozni!

Legyen F_q egy q elemű véges test. A *q-adrendű affin sík* megadásához definiálni kell a pontot, az egyenest és az illeszkedés relációját. Nevezzük *pontnak*, az összes (a, b) rendezett párt, ahol $a, b \in F_q$. Az egyeneseknek két típusát különböztetjük meg: vagy $[m, k]$ típusú rendezett pár, vagy $[c]$ típusú, ahol $m, k, c \in F_q$. Az (a, b) pont akkor és csak akkor illeszkedik egy $[m, k]$ egyenesre, ha teljesül, hogy $b = ma + k$, egy $[c]$ típusú egyenesre pedig, ha $a = c$.

Észrevehetjük, hogy ez a definíció teljesen analóg a klasszikus koordinátageometriáéval. Ott ponton olyan rendezett párt értünk, amelynek elemei valós számok, azaz a testből valók. Egyenesből kétféle van: a nem függőleges, amely megadható a meredekségével és az y tengelymetszetével ($y = mx + k$), illetve a függőleges, amelyet az x tengellyel vett metszete határoz meg ($x = c$). Ez a két egyenes egyenlet a véges affin síkon is ugyanúgy érvényes.

Jelölés: A q elemű véges testtel koordinátázott affin síkot AG(2,q)-val jelöljük.(Arra utalva, hogy q elemű test fölötti 2-dimenziós affin geometria.)

Ezek ismeretében már megpróbálhatjuk ténylegesen derékszögű koordinátarendszerbe helyezniAG(2,q)-t. Vegyük az euklideszi síknál megszokott koordinátarendszert és szűkítsük le úgy, hogy AG(2,q) pontjain csak azokat a pontokat értjük, melynek mindkét koordinátája egész, és eleme a $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ halmaznak. Ekkor persze az egyenesek nem lesznek valódi, euklideszi értelemben vett egyenesek, de ábrázolhatóak egy folytonos vonallal. Kis q esetén még könnyen lerajzolható a sík és az egyenesei, ez látható a 3.2.1. ábrán.



3.2.1. ábra: AG(2,2) és AG(2,3) egyeneseinek párhuzamossági osztályai

A sík pontjai csak a megjelölt pontok, ezért az egyenesre is csak ezek illeszkedhetnek. Ha két egyenes a ,,síkon kívül" metszi egymást, az csupán az ábrázolásmód miatt látszik metszéspontnak. Például az $y = x + 1$ és az $y = x + 2$ egyeneseknek az ábrán van egy közös pontjuk, de ez nem AG(2,3)-beli pont, ezért a két egyenesnek nincs közös pontja. Az euklideszi síkon megszokott elnevezéssel mondhatjuk, hogy ez a két egyenes *párhuzamos*. A 3.2.1. ábrán az azonos színű egyenesek egy-egy párhuzamossági osztályt alkotnak.

Megjegyzés: A további ábrákon is csak a megjelölt pontok elemei az adott síknak.

3.3 Projektív geometria

3.3.1. Definíció: Legyen p és E két diszjunkt halmaz, $I \subset P \times E$ pedig egy illeszkedési reláció. Ez a hármas *projektív sík*, ha teljesül rá a következő négy axióma:

P1: p bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van E-nek, amely mindkettővel relációban áll.

P2: E bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van p-nek, amely mindkettővel relációban áll.

P3: E minden eleme legalább három különböző p-beli elemmel áll relációban.

P4: p minden eleme legalább három különböző E-beli elemmel áll relációban.

A szokásos elnevezésekkel a p a pontok halmaza, E pedig az egyeneseké. Így az axiómák a következőket követelik meg:

— Bármely két különböző ponton át egy egyenes halad.

— Bármely két különböző egyenesnek egy közös pontja van.

— Minden egyenesen legalább három különböző pont van.

— Minden ponton át legalább három különböző egyenes halad.

Az euklideszi sík nem projektív sík, mert nem teljesül rá a második axióma, nem igaz, hogy bármely két különböző egyenesnek egy közös pontja van, hiszen a párhuzamos egyeneseknek nincs közös pontjuk. Viszont ki lehet bővíteni *ideális* térelemekkel, amelyek segítségével teljesül **P2**, sőt könnyebben tudunk bizonyos állításokat megfogalmazni vagy bizonyítani. Ezek az ideális térelemek nem térbeli pontok vagy alakzatok, hanem absztrakt, képzeletbeli fogalmak, amelyek rendelkeznek bizonyos tulajdonságokkal.

A kibővített sík első ilyen téreleme az *ideális pont*. Minden egyeneshez hozzácsatolunk egy ideális pontot úgy, hogy két egyeneshez akkor és csak akkor csatoljuk ugyanazt az ideális pontot, ha azok párhuzamosak. Ezzel végtelen sok ideális pontot vezettünk be, mivel végtelen sok páronként nem párhuzamos egyenes van a síkon. Ezek az ideális pontok egy *ideális egyenessé*ideális egyenes állnak össze úgy, hogy az ideális egyenes tartalmazza az összes ideális pontot, de nem tartalmaz egyetlen közönséges pontot sem. Tehát az euklideszi síkot kibővítettük végtelen sok ideális ponttal és egy ideális egyenessel és így már igaz rá a négy axióma.

3.3.2. Állítás: A kibővített sík projektív sík.

Bizonyítás: Ehhez azt kell megmutatni, hogy teljesül rá a négy axióma.

P1: Bármely két különböző pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese. Ha két közönséges pontot veszünk, akkor azoknak egyértelműen létezik összekötő közönséges egyenesük, és az ideális egyenesre nem illeszkednek, tehát valóban egyértelműen létezik összekötő egyenesük. Egy közönséges és egy ideális pont esetén szintén nem lesz jó az ideális egyenes, mivel az nem tartalmaz közönséges pontot. De az ideális pont által meghatározott párhuzamossági osztályból pontosan egy egyenes halad át a közönséges ponton. Utolsó eset, ha mindkét pont ideális. Ekkor közönséges egyenes nem lehet az összekötő, mivel azokon csak egy ideális pont van. Az ideális egyenes viszont jó lesz, mert az tartalmazza az összes ideális pontot.

P2: Ha két közönséges egyenes metsző, akkor egy közös közönséges pontjuk van, az ideális pontjaik pedig különbözők. Ha párhuzamos, akkor nincs közös közönséges pontjuk, de az ideális pontjuk ugyanaz, tehát azt tekintjük metszéspontnak. Ha pedig az ideális és egy közönséges egyenest nézünk, akkor azoknak csak ideális pontjuk lehet közös, mivel az ideális egyenes nem tartalmaz közönséges pontokat. És van is közös ideális pontjuk, mert a közönséges egyenesnek van ideális pontja, az ideális egyenes pedig tartalmazza a sík összes ideális pontját. Tehát a kibővített síkon bármely két különböző egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

P3-P4: Triviális, hiszen minden egyenes végtelen sok pontot tartalmaz, és minden ponton át végtelen sok egyenes halad. ■

A kibővített síkot is szeretnénk koordinátarendszerben elhelyezni, ezt a homogén koordinátázáshomogén koordinátázás segítségével tehetjük meg. A klasszikus tér Descartes-féle koordinátarendszerében vesszük az origót és az $x_3 = 1$ egyenletű (1 magasan lévő vízszintes) síkot. Ennek a síknak egy tetszőleges (közönséges vagy ideális) p pontjának a *meghatározó vektora*, az O és p által meghatározott egyenes egy irányvektora. Így ha p közönséges pont és Descartes-koordinátái $(x_0, y_0, 1)$, akkor meghatározó vektora lesz minden $[\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda]$ vektor bármely $\lambda \neq 0$ valós számra. Ha p ideális pont, akkor pedig az OP egyenes párhuzamos a síkkal és irányvektora $(x_0, y_0, 0)$ alakú, így meghatározó vektora lesz bármely $[\lambda x_0, \lambda y_0, 0]$ vektor, ahol $\lambda \neq 0$ tetszőleges valós szám.

A sík egy (közönséges vagy ideális) egyenesét pedig az egyenes és az origó által meghatározott sík egy normálvektorával adhatjuk meg. Ez a sík egyértelmű, hiszen egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont egyértelműen meghatároz egy síkot. Kiszámolhatjuk például az ideális egyenes (e_∞) meghatározó vektorát. Ehhez szükség van az e_∞ és az O által meghatározott síkra. Hasonlóan az euklideszi sík kibővítéséhez az euklideszi tér is kibővíthető. Ekkor a tér minden síkját kibővítjük, azaz minden síkhoz hozzácsatolunk egy-egy ideális egyenest, úgy hogy két sík ideális egyenese pontosan akkor egyezik meg, ha párhuzamosak. Emiatt az e_∞ és az O által kifeszített síknak párhuzamosnak kell lennie az $x_3 = 1$ síkkal, mivel a két sík ugyanazt az ideális egyenest tartalmazza (és minden sík pontosan egy ideális egyenest tartalmaz). Tehát ez az $x_3 = 0$ egyenletű sík lesz, melynek normálvektora a $[0, 0, \lambda]$, minden$\lambda \neq$ 0-ra.

Az előzőekből láthatjuk, hogy egy pont akkor és csak akkor ideális, ha a meghatározó vektorának harmadik koordinátája 0, illetve egy egyenes pontosan akkor az ideális egyenes, ha a meghatározó vektorának első két koordinátája 0. Észre kell venni, hogy a meghatározó vektoroknak csak az iránya számít, ezért lehet megszorozni tetszőleges $\lambda \neq 0$ valós számmal (akár negatívval is). 0-val viszont nem lehet, hiszen akkor a nullvektort kapnánk, amely nem lehet sem irányvektor, sem normálvektor, így nem határoz meg egyetlen pontot és egyenest sem. Minden más vektor viszont meghatároz egy pontot és egy egyenest is, de egy ponthoz, illetve egyeneshez több meghatározó vektor is tartozik (ezek persze egymás skalárszorosai).

Az ilyen felírásnál ügyelni kell arra, hogy csak olyan egyenlettel adhatunk meg görbéket, melyek teljesülése csak a ponttól függ és nem a választott meghatározó vektortól. Tehát ha az egyenletnek megoldása az $[x_1, x_2, x_3]$ számhármas, akkor megoldása kell legyen a $[\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3]$ is. Ezt a feltételt a homogén egyenletek elégítik ki, azaz az olyan egyenletek, amelyekben minden tag azonos fokú.

Ahhoz, hogy ezt kezelni tudjuk, szükségünk lesz az egyenletek homogenizálásárahomogenizálás. Adott egy tetszőleges (nem feltétlen homogén) egyenlet a Descartes koordinátarendszerben. Ha az egyenletet kielégíti egy (x_0, y_0) számpár, akkor kielégíti annak a homogén koordinátás megfelelője, az $[x_0, y_0, 1]$ is. És egy tetszőleges $[x_1, x_2, x_3]$ meghatározó vektor akkor határozza meg ugyanazt a pontot, ha a $[x_0, y_0, 1]$ számszorosa, azaz $\lambda [x_0, y_0, 1] = [x_1, x_2, x_3]$. Ekkor viszont $\lambda = x_3$, amivel leosztva mindkét vektort azt kapjuk, hogy: $[x_0, y_0, 1] = \left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right]$. Tehát egy homogén koordinátákkal megadott közönséges pont akkor és csak akkor megoldása az egyenletnek, ha az $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$ pont megoldása. Ezt felhasználva tudjuk homogenizálni az egyenleteket. Vegyük például az $y = mx + b$ egyenes egyenletet. Ez az egyenlet nem homogén, hiszen x és y elsőfokú tagok, de szerepel benne konstans tag is, ami nulladfokú. Az $[x_1, x_2, x_3]$ pont éppen akkor elégíti ki az egyenletet, amikor az $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$ is, vagyis ha $\frac{x_2}{x_3} = m\frac{x_1}{x_3} + b$, azaz $x_2 = mx_1 + bx_3$. Ha $x_3 \neq 0$, akkor ugyanazok a pontok elégítik ki, amelyek a Descartes koordinátarendszerben is kielégítették. Ha viszont $x_3 = 0$, akkor az $x_2 = mx_1$ egyenletet kapjuk. Ennek megoldása a $[\lambda, \lambda m, 0]$, ahol a homogenitás miatt a λ-t választhatjuk 1-nek. Azaz az $[1, m, 0]$ pont is megoldása az egyenletnek, mely az m meredekségű egyenes ideális pontja, ami a kibővített síkon valóban az egyenes pontja.

Most már tudunk pontot és egyenest megadni a homogén koordinátáival, már csak az illeszkedést kell megvizsgálni.

3.3.3. Tétel: Egy p pont pontosan akkor illeszkedik egy e egyenesre, ha a meghatározó vektoraik skaláris szorzata nulla.

Bizonyítás: P pont akkor és csak akkor illeszkedik e-re, ha az O és p által meghatározott egyenes benne fekszik az O és e által meghatározott síkban, azaz, ha p meghatározó vektora merőleges e meghatározó vektorára, ami pontosan akkor teljesül, ha a két vektor skaláris szorzata nulla. ■

Könnyen felírhatjuk két pont összekötő egyenesének egyenletét is. Legyen A és B a két különböző pont, e pedig az összekötő egyenesük. A és B is illeszkedik e-re, azaz OA és OB is benne fekszik az O és e által meghatározott síkban, tehát A és B meghatározó vektora is merőleges e meghatározó vektorára. Azaz olyan vektort keresünk, amely merőleges A-ra is és B-re is. A két vektor vektoriális szorzata éppen ilyet ad eredményül.

3.3.4. Tétel: Ha $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ akkor az összekötő egyenesük meghatározó vektora:

$$A \times B = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = x_1(a_2b_3 - a_3b_2) - x_2(a_1b_3 - a_3b_1) + x_3(a_1b_2 - a_2b_1) =$$

$$= [a_2b_3 - a_3b_2, \, -a_1b_3 + a_3b_1, \, a_1b_2 - a_2b_1] \, .$$

Ugyanígy meghatározhatjuk két egyenes metszéspontját is. Azt a pontot keressük, ami mindkét egyenesen rajta van. Tehát homogén koordinátarendszerbe helyezve azt az egyenest, ami mindkét síkban benne fekszik, ez pedig az egyértelműen létező metszésvonal. Ennek az irányvektora merőleges mindkét sík normálvektorára, azaz az egyenesek meghatározó vektorainak vektoriális szorzata a metszéspont egy meghatározó vektorát adja eredményül.

Azt is könnyen el tudjuk dönteni, hogy három különböző pont egy egyenesre illeszkedik-e. Felírjuk két pont összekötő egyenesét, azaz a vektoriális szorzatukat, majd megnézzük, hogy a harmadik illeszkedik-e rá, vagyis, hogy az eredményül kapott vektor és a harmadik pont meghatározó vektorának skaláris szorzata nulla-e. Tömörebben: a három meghatározó vektor vegyesszorzata pontosan akkor nulla, ha a három pont kollineáris. Három vektor vegyesszorzatának értékét pedig a belőlük képzett mátrix determinánsa adja meg.

3.3.5. Tétel: Az $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$ pontok akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

Ez a gondolatmenet ugyanígy működik az egyenesekkel is. Ha valamelyik kettő metszéspontján átmegy a harmadik, akkor a vegyesszorzatuk nulla. És fordítva is igaz: ha három vektor vegyesszorzata nulla, akkor az általuk meghatározott egyenesek egy ponton mennek át.

Észrevehetjük tehát, hogy teljesen mindegy, hogy pontokról vagy egyenesekről szól az állítás, utána csupán a meghatározó vektorokat felhasználva látjuk be. Ily módon, ha van egy igaz állítás melyben *pontok*, *egyenesek* és ezek *illeszkedései* szerepelnek, akkor felcserélve a ,,*pont*" és ,,*egyenes*" szavakat szintén igaz állítást kapunk. Ezt nevezzük a dualitásdualitás elvének. Például az előző tételek és duálisaik:

3.3.3. Tétel: *Egy pont akkor és csak akkor illeszkedik egy egyenesre,ha a meghatározó vektoraik skaláris szorzata nulla.*

Ennek az állításnak a duálisa:

Egy egyenes akkor és csak akkor illeszkedik egy pontra,ha a meghatározó vektoraik skaláris szorzata nulla.

Ebben az esetben a duális állítás megegyezik az eredeti állítással, de ez nem mindig van így. Nézzük meg a következő állításokat és duálisaikat:

3.3.4. Tétel: *Két pont meghatározó vektorának vektoriális szorzataa rájuk illeszkedő egyenes egy meghatározó vektorát adja meg.*

És a duálisa:

Két egyenes meghatározó vektorának vektoriális szorzataa rájuk illeszkedő pont egy meghatározó vektorát adja meg.

3.3.5. Tétel: *Három pont pontosan akkor illeszkedik egy egyenesre,ha meghatározó vektorainak vegyesszorzata nulla.*

Duális állítás:

Három egyenes pontosan akkor illeszkedik egy pontra,ha meghatározó vektorainak vegyesszorzata nulla.

Az előbb beláttuk az állításokat, majd rövid meggondolással igazoltuk a duálispárjaikat is. Elegendő lett volna bebizonyítani az egyik állítást, ugyanis a másik a dualitás elvéből azonnal következik.

Megjegyzés: A felállított axiómarendszer duális párokból áll (P1 és P2, valamint P3 és P4 egymás duálisai), ezért érvényes a dualitás elve.

3.4 Véges projektív geometria

Véges projektív síkot kaphatunk például úgy, hogy – az euklideszi sík kibővítéséhez hasonlóan – kibővítjük AG$(2, q)$-t, azaz ugyanúgy hozzácsatolunk az egyenesekhez egy-egy ideális pontot, a síkhoz pedig egy ideális egyenest.

Jelölés: A q elemű véges testtel koordinátázott projektív síkot PG$(2, q)$-valPG$(2,q)$ jelöljük. (Arra utalva, hogy q elemű test fölötti 2-dimenziós projektív geometria.)

3.4.1. Állítás: PG$(2, q)$ valóban projektív sík.

Bizonyítás: Helyezzük homogén koordinátarendszerbe PG$(2, q)$-t. Így a testaxiómák felhasználásával, számolással igazolhatjuk a projektív sík négy axiómáját.

P1: Bármely két különböző pontnak fel tudjuk írni egy-egy meghatározó vektorát. Ezek skalárszorzó erejéig egyértelműek és nem esnek egy egyenesbe, ezért a vektoriális szorzatuk szintén skalárszorzó erejéig egyértelmű. Azaz – a homogenitást figyelembe véve – egyértelműen meghatározza az összekötő egyenesüket.

P2: Bármely két különböző egyenesnek fel tudjuk írni egy-egy meghatározó vektorát. Ezek skalárszorzó erejéig egyértelműek és nem esnek egy egyenesbe, ezért a vektoriális szorzatuk szintén skalárszorzó erejéig egyértelmű. Azaz – a homogenitást figyelembe véve – egyértelműen meghatározza a metszéspontjukat.

P3-P4: Később megmutatjuk, hogy minden egyenesre $q + 1$ pont, illetve minden pontra $q + 1$ egyenes illeszkedik. Mivel q prímhatvány, ezért $q \geq 2$, azaz $q + 1 \geq 3$, tehát valóban igaz ez a két axióma is minden PG$(2, q)$-n. ■

3.4.2. Tétel: PG$(2, q)$-n $q^2 + q + 1$ pont és ugyanennyi egyenes van.

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg a pontok és egyenesek számát a kibővítés segítségével. A q-adrendű affin síkon pontként definiáltuk az (a, b) rendezett párokat, ahol a, b testbeli elemek, azaz mindegyik q darab különböző értéket vehet fel. Tehát összesen q^2 közönséges pont van a síkon. Ehhez hozzácsatoljuk minden párhuzamossági osztály ideális pontját: minden m meredekséghez tartozik egy, azokat, illetve a $[c]$ típusú egyenesekét. Így összesen $q + 1$ ideális pontot, tehát a síkon összesen $q^2 + q + 1$ pont van. Ugyanígy megvizsgálhatjuk az egyenesek számát is. Egyenesből kétféle van: $[m, k]$ és $[c]$ típusú, ahol m, k és c is q-féle lehet. Tehát $[m, k]$ típusú egyenesből q^2, $[c]$ típusúból q darab van. Így összesen $q^2 + q$ közönséges egyenes van, melyhez hozzácsatoljuk a sík ideális egyenesét, így PG$(2, q)$-n összesen q^2+q+1 egyenes van. A pontok számának ismeretében ez persze a dualitás elvéből is azonnal következik. ■

3.4.3. Tétel: Minden egyenesre $q + 1$ pont illeszkedik és minden ponton át $q + 1$ egyenes halad.

Bizonyítás: Hasonlóan azt is megnézhetjük, hogy egy egyenesre hány pont illeszkedik. Egy közönséges pont akkor illeszkedik egy $[m, k]$ típusú egyenesre, ha $b = ma + k$, azaz tetszőleges a választása egyértelműen meghatározza b értékét. Tehát q közönséges és egy ideális pont illeszkedik az ilyen típusú egyenesre. Egy $[c]$ típusú egyenesre akkor illeszkedik egy (a,b) pont, ha $a = c$. Azaz b értékét tetszőlegesen, q-féleképp lehet megválasztani, amihez még hozzájön az ideális pont. Az előbb pedig már megvizsgáltuk, hogy az ideális egyenesen is $q + 1$ van, tehát minden egyenesre $q + 1$ pont illeszkedik.

Egy tetszőleges p ponton átmenő egyenesek számát jelöljük t-vel. Minden ilyen egyenesen $q + 1$ pont van, azaz q olyan, ami p-től különböző. Ezek a pontok egymástól különböznek, hiszen bármely két pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese. Tehát a síkon összesen $1 + t \cdot q$ pont van. Másrészt viszont tudjuk, hogy a síkon $q^2 + q + 1$ pont van, tehát:

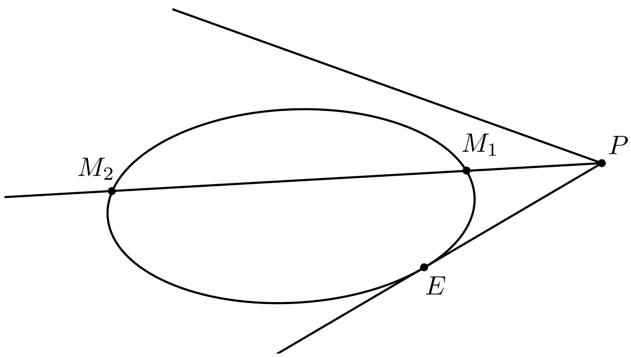
$$\begin{aligned} 1 + t \cdot q &= q^2 + q + 1 \\ t &= q + 1 \end{aligned}$$

■

Megjegyzés: Nem csak testtel koordinátázható projektív síkok léteznek, ám azoknál is lehet rendet definiálni és a fenti összefüggések ott is igazak. A továbbiakban aq-adrendű projektív síkon tetszőleges síkot értek, az általánosan kimondott tételek ott is igazak. Testtel nem koordinátázható síkokról a [4]-es könyvben olvashatunk bővebben.

3.5 Ívek és oválisok a véges projektív síkon

3.5.1. Definíció: Egy projektív sík K ponthalmazát *k-ívnek*, ha k darab pontot tartalmaz és ezek közül semelyik három nincs egy egyenesen. Egy k-ív *teljes* ív, ha nem része $(k+1)$-ívnek. A megszokott elnevezésekkel beszélhetünk egy ív és egy egyenes kölcsönös helyzetéről, a metszéspontok száma szerint (3.5.1. ábra). Két metszéspont esetén az egyenest *szelőnek*, egy esetén *érintőnek*, nulla esetén *elkerülőnek* nevezzük.

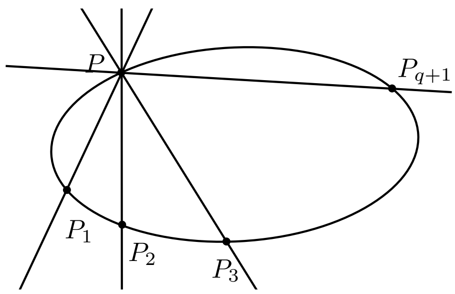


3.5.1. ábra: Ív és egyenes kölcsönös helyzete

3.5.2. Tétel (Bose): Ha K k-ív egy q-adrendű projektív síkon, akkor

$$k \leq \begin{cases} q+2, & \text{ha } q \text{ páros} \\ q+1, & \text{ha } q \text{ páratlan} \end{cases}$$

Bizonyítás: Legyen p az ív egy tetszőleges pontja.p-n át pontosan $q + 1$ egyenes megy és mindegyikről maximum még egy pont lehet az íven. Tehát az íven van a p és további maximum $q + 1$ pont, azaz legfeljebb $q + 2$ pont lehet rajta. Ha viszont valóban fennáll a $k = q + 2$ egyenlőség az azt jelenti, hogy a p-n átmenő minden egyenes metszi az ívet. Ez az ív minden pontjára igaz, tehát az ívnek nincs érintője. Vegyünk egy R pontot, amely nincs az íven és nézzük a rajta átmenő egyeneseket. Ezeknek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehetne az ívvel, de 1 nem lehet, mert érintő nem húzható. Vagyis az ív pontjait lefedik és párba állítják az R-en át húzott szelők. Tehát ebben az esetben páros sok pontja van az ívnek. Viszont ha q páratlan, akkor $q + 2$ is az, így nem lehet $(q + 2)$-ív, úgyhogy maximum $q + 1$ pontja lehet az ívnek.



■

3.5.3. Definíció: q-adrendű projektív sík $(q + 1)$-ívét *oválisnak* nevezzük.

3.5.4. Tétel: PG$(2,q)$-n létezik ovális.

Bizonyítás: A klasszikus projektív síkon a legegyszerűbb alakzat, melynek semelyik három pontja nem esik egy egyenesbe az egy másodrendű görbe. Nézzük például az $y = x^2$ parabolát. Ezt az egyenletet homogenizálva kapjuk, hogy: $\frac{x_2}{x_3} = \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2$, azaz $x_2 \cdot x_3 = x_1^2$. Ha $x_3 \neq 0$, akkor az egyenletet kielégíti minden $\left[t, t^2, 1\right]$ számhármas, ahol t testbeli elem. Ezek a megoldások adják a parabola közönséges pontjait. De ha $x_3 = 0$, akkor x_1-nek is nullának kell lennie, x_2 pedig tetszőleges. Viszont bármely t-re a $[0,t,0]$ ugyanazt a pontot határozza meg, mint a $[0,1,0]$, ezért t-t választhatjuk 1-nek. Ez a pont pedig a parabola egyetlen ideális pontja. Így megadtunk $q+1$ pontot, már csak ellenőrizni kell, hogy semelyik három nincs egy egyenesen. Ehhez tetszőleges három pont meghatározó vektorának a vegyesszorzatát kell kiszámolni.

1. eset: az ideális pont és két közönséges pont:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ t_1 & t_1^2 & 1 \\ t_2 & t_2^2 & 1 \end{vmatrix} = t_1 - t_2$$

Ez pedig sohasem lehet nulla, ha a két közönséges pont különböző.

2. eset: három közönséges pont:

Ez a determináns az algebrából ismert Vandermonde-determinánsVandermonde-determináns, melynek értéke csak akkor nulla, ha van két sora, amelyek megegyeznek, tehát ez a szorzat sem lehet nulla, ha a három pont különböző.

Ezzel beláttuk, hogy PG$(2,q)$-n létezik $(q+1)$-ív, azaz ovális.

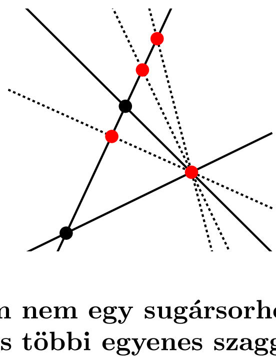
3.5.5. Tétel: Egy ovális minden pontjában egyértelműen állítható érintő.

Bizonyítás: Az ovális egy tetszőleges pontját a többi pontjával összekötve q darab szelőt kapunk. De minden ponton át $q+1$ egyenes halad, ezért egyértelműen létezik az adott pontba állított érintő.

3.5.6. Következmény: Minden oválisnak $q+1$ érintője van összesen.

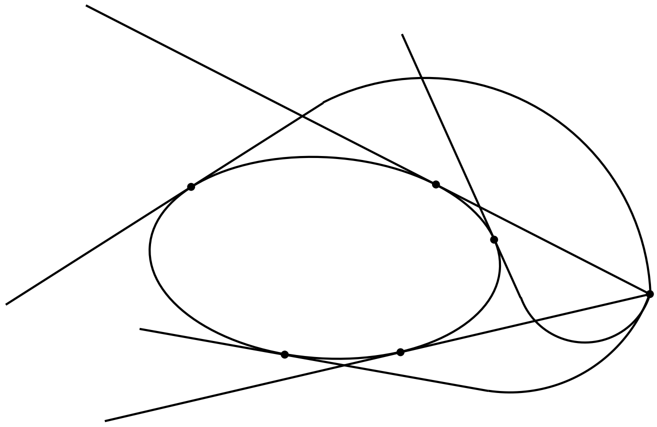
3.5.7. Tétel: Páros q esetén a q-adrendű projektív sík bármely oválisának érintői egy ponton mennek át.

Bizonyítás: Legyen p egy tetszőleges pont, amely nem illeszkedik az oválisra. A p-n átmenő egyenesek vagy szelők vagy érintők vagy elkerülők. Ezek darabszámát jelöljük rendre s-sel, t-vel és e-vel. Mivel a szelők két, az érintők egy és az elkerülők nulla pontja illeszkedik az oválisra, továbbá az ovális összes pontján pontosan egy ilyen egyenes megy, ezért: $q+1 = 2 \cdot s + 1 \cdot t + 0 \cdot e$, azaz $q+1 = 2 \cdot s + 1 \cdot t$. Ha q páros, akkor $q+1$ páratlan, így t is páratlan kell, hogy legyen. Tehát a sík minden olyan pontján, ami nincs az oválison, páratlan sok érintő megy át. Korábban pedig beláttuk, hogy az ovális pontjain egy érintő halad át. Tehát a sík minden pontján át megy legalább egy érintő. Az oválisnak összesen $q+1$ érintője van (minden pontjában egy), és a sík minden pontján áthalad közülük legalább egy. Ez csak úgy lehetséges, hogy az egyenesek egy sugársorhoz tartoznak. Ugyanis indirekt bizonyítással tegyük fel, hogy van három olyan egyenes, amelyek nem egy ponton mennek át (3.5.2. ábra).



3.5.2. ábra: Három nem egy sugársorhoz tartozó egyenes, és a lehetséges többi egyenes szaggatott vonallal

Ekkor a három egyenes által lefedett pontok száma $(q+1)+q+(q-1) = 3q$. A $q-2$ darab többi érintő egyenként maximum $q-1$ új pontot tartalmazhat, hiszen összesen $q+1$ pontot tartalmaz és legalább két metszéspontja van az eddigi három egyenessel. Tehát ha van három egyenes, ami nem egy ponton megy át, akkor a maximálisan lefedett pontok száma $3q + (q-2)\cdot(q-1) = q^2+2$, de a síkon több, q^2+q+1 pont van. Azaz lehetetlen, hogy a sík összes pontját lefedje $q+1$ egyenes, ha van közöttük három olyan, amely nem egy ponton megy át. Tehát az összes egyenes egy sugársorhoz tartozik. Ezt szemlélteti a 3.5.3. ábra.

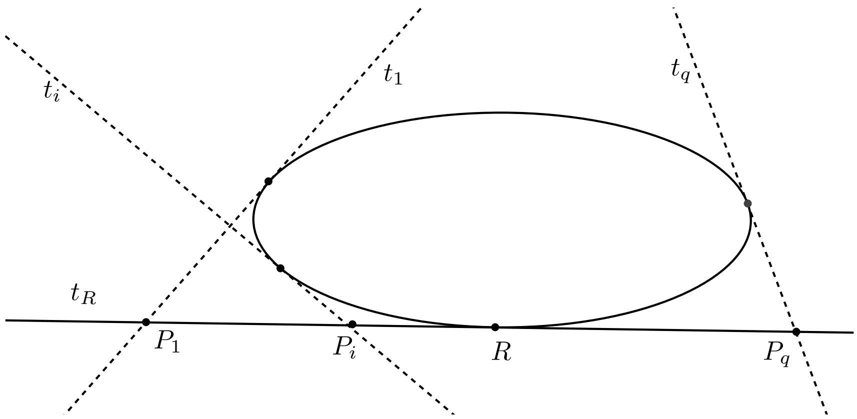


3.5.3. ábra: Ovális érintői páros q esetén

Beláttuk tehát, hogy az ovális érintői egy ponton mennek át. Ennek következménye, hogy páros q esetén az ovális nem teljes ív, hiszen ezt a pontot (melyen minden érintő áthalad) hozzávéve $(q+2)$-ívet kapunk. Ugyanis a ponton $q+1$ érintő megy át, tehát minden rajta áthaladó egyenes érintő, azaz nem húzható rajta keresztül szelő. Tehát nincs három pont, amely egy egyenesbe esne. Sőt az előző tételek (3.5.4. és 3.5.7.) azt is megmutatták, hogy a Bose-tétel becslései élesek, azaz előfordulhat az egyenlőség és létezik olyan q-adrendű projektív sík, amelyen van $(q+1)$-ív és ha q páros, akkor olyan is, amelyen van $(q+2)$-ív.

3.5.8. Tétel: Páratlan q esetén, a q-adrendű projektív síkon az oválison nem lévő pontokból 0 vagy 2 érintő húzható az oválishoz.

Bizonyítás: A korábbi módszerrel veszünk egy p pontot, amely nem illeszkedik az oválisra. Az ezen átmenő egyenesek mindegyike szelő (s), érintő (t) vagy elkerülő (e). Ezeknek 2, 1 vagy 0 közös pontja van az oválissal és lefedik az ovális mind a $q+1$ pontját, tehát felírható az $q+1 = 2\cdot s+1\cdot t+0\cdot e$ egyenlet. Ha q páratlan, akkor $q+1$ páros, vagyis t is páros kell, hogy legyen, azaz p-n át páros sok érintő halad. Ezért elegendő megmutatni, hogy ha $t > 0$, akkor $t = 2$. Vegyünk egy t_R érintőt, és nevezzük ennek az ívre nem illeszkedő pontjait P_1, P_2, ... , P_q-nak. Ilyen pont valóban q darab van, hiszen az egyenesnek összesen $q+1$ pontja van és egy illeszkedik az ívre.



3.5.4. ábra: Ovális érintőinek száma

Mivel minden ponton át páros sok érintő megy, ezért minden P_i illeszkedik t_R-en kívül legalább egy másik érintőre, azaz minden P_i-hez létezik $t_i(\neq t_R)$ érintő (3.5.4. ábra). Ezek az érintők páronként különbözőek, mert két pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese, tehát ha $j \neq k$, akkor $t_j \neq t_k$. Az oválisnak összesen $q+1$ érintője van, azaz t_R-en kívül q. Ugyanakkor a q darab P_i pont mindegyikén áthalad t_R-en kívül legalább egy érintő, tehát mindegyiken pontosan egy érintő halad át.

Így az euklideszi síkon megszokott elnevezésekhez hasonlóan véges projektív síkon is lehet definiálni egy ovális belső és külső pontjait.

3.5.9. Definíció: p pont az ovális *külső pontja*, ha p-n át pontosan két érintő húzható, *belső pont*,belső pont ha egy sem.

Kiszámolhatjuk a q-adrendű projektív sík külső pontjainak a számát. Az ovális mind a $q+1$ pontjában egyértelműen állítható érintő, amely külön-külön q külső pontot tartalmaz. Viszont minden külső ponton két érintő halad, azaz mindegyiket kétszer számoltuk. Így adódik, hogy a külső pontok száma $\frac{q(q+1)}{2}$. Ebből kiszámolhatjuk belső pontok számát is, ha a sík összes pontjának számából kivonjuk az ovális pontjainak és a külső pontoknak a számát.

$$(q^2+q+1)-(q+1)-\frac{q(q+1)}{2}=q^2-\frac{q^2+q}{2}=\frac{q^2-q}{2}=\frac{q(q-1)}{2}$$

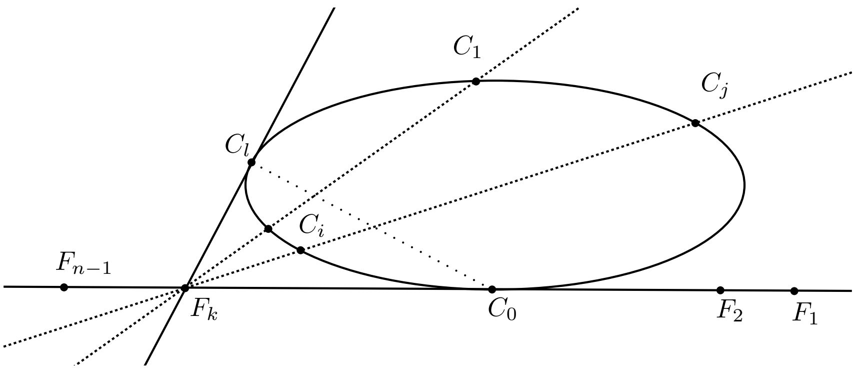
Azaz az oválison nem lévő pontoknak körülbelül fele belső és fele külső.

3.5.10. Tétel (Segre): Ha q páratlan, akkor $\mathrm{PG}(2,q)$ minden oválisa másodrendű görbe. (A tétel bizonyítása megtalálható a [4]-es könyvben.)

3.6 Körmérkőzéses bajnokság szervezése

Most már mindent tudunk, hogy megszervezhessünk egy n csapatos körmérkőzéses bajnokságot. Két módszert nézünk meg, melyek alkalmazhatósága n-től függ.

Ha $n = 2^r + 2$, akkor a $q = 2^r$ elemszámú véges test fölötti projektív sík segítségével generálhatjuk a fordulókat. A valóságban a legtipikusabb n, amelyre ez teljesül a 18, ami $2^4 + 2$. Többek között tizennyolccsapatos a német és holland labdarúgó-bajnokság is. Ekkor, mivel q páros, létezik $(q+2)$-ív. Feleltessük meg a csapatokat a $(q+2)$-ív pontjainak (C_1, C_2, C_3, ... ,C_n), a fordulókat pedig egy ívet elkerülő rögzített F egyenes pontjainak (F_1, F_2, F_3, ... ,F_{n-1}), melynek $q+1 = n-1$ pontja van. A k. fordulóban pontosan akkor játszik az i. csapat a j-edikkel, ha C_i, C_j, $F_k$kollineáris (3.6.1. ábra).



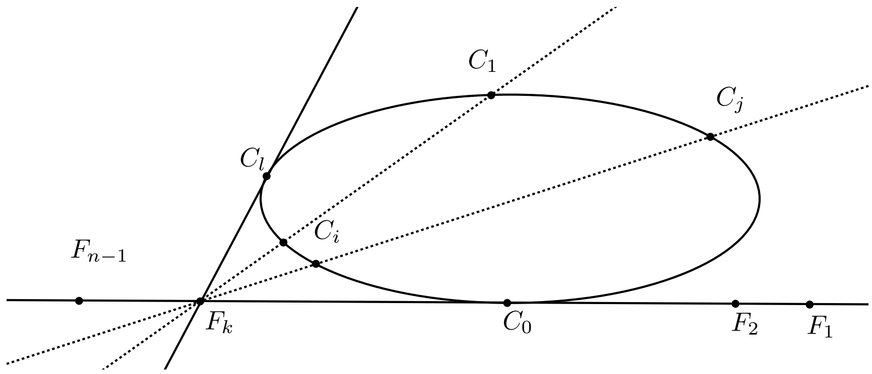
3.6.1. ábra: A *k*. forduló párosítása

Ez valóban a bajnokság egy lehetséges megszervezése, hiszen:

1. Bármely C_i-nek és C_j-nek egyértelműen létezik összekötő egyenese, amely pontosan egy pontban metszi F-et és az a pont egyértelműen van hozzárendelve egy fordulóhoz. Tehát minden csapat minden másikkal pontosan egyszer találkozik.

2. C_i és F_k pedig egyértelműen meghatározza C_j-t, ugyanis a C_iF_k egyenes további egy pontban metszi az ívet, hiszen a $(q+2)$-ívnek nincs érintője. Azaz minden csapat, minden fordulóban pontosan egyszer játszik.

Másik eset, amikor a véges geometria eszközeivel el tudjuk készíteni a menetrendet, ha $n = p^r + 1$, ahol p páratlan prímszám. Ilyen típusú bajnokság több is előfordul a valóságban, például a 18 és 20 is $p + 1$ alakú. Az előbb említett tizennyolcsapatos bajnokságok mellett négy európai élbajnokság húszcsapatos: az angol, spanyol, olasz és francia. Ebben az esetben a p elemszámú véges test fölötti projektív síkot vizsgáljuk. Ezen a síkon létezik $(p + 1)$-ív. Most is legyenek a csapatok az ív pontjai $(C_0, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$, a fordulók pedig az ívet érintő rögzített F egyenes íven nem lévő pontjai $(F_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1})$. Az egyenesen összesen $p + 1 = n$ pont van, tehát $n - 1$ külső pont. Ha $i, j \neq 0$, akkor – hasonlóan az előzőhöz – pontosan akkor rendeznek $C_i - C_j$ mérkőzést a k. fordulóban, ha C_i, C_j, F_k kollineáris. C_0 ellenfele pedig az a C_l $(l \neq 0)$ csapat lesz, melyre az F_k-t és C_l-et összekötő egyenes az ív érintője (3.6.2. á.).



3.6.2. ábra: A *k*. forduló párosítása

1. Ha $i, j \neq 0$, akkor a C_iC_j egyenes nem a C_0 pontban metszi F-et, hiszen az ív három pontja nem lehet egy egyenesen. Akkor viszont egy F_k pontban metszi, azaz tetszőleges ilyen C_i-hez és C_j-hez egyértelműen létezik egy forduló. Ha viszont $j = 0$, akkor C_i-ben érintőt állítunk az ívhez. Ez egyértelmű és ez is egy F_k pontban metszi F-et. Tehát minden csapat minden másikkal pontosan egyszer találkozik.

2. Bármely C_i-hez és F_k-hoz egyértelműen létezik C_j, mert ha C_iF_k egyenes szelő, akkor a másik metszéspont, ha érintő, akkor pedig az F_k-ból húzott másik érintő érintési pontja lesz C_j. Ez utóbbi is egyértelmű, mivel F_k külső pont, tehát pontosan két érintő húzható belőle. Azaz minden csapat, minden fordulóban pontosan egyszer játszik.

4. Gráfelméleti megközelítés

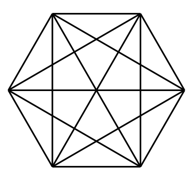
A körmérkőzéses bajnokság szervezését gráfelméleti szemszögből is meg lehet közelíteni. Ekkor a gráf csúcsai a csapatoknak felelnek meg, az élek pedig a mérkőzéseknek, oly módon, hogy egy él a két végpontja által meghatározott csapatok közötti mérkőzést reprezentálja. Így egy $2n$ csapatos körmérkőzéses bajnoksága $2n$ csúcsú teljes gráfnak felel meg. Mivel bármely két csúcs között pontosan egy él van, ezért bármely két csapat pontosan egyszer játszik egymással.

Jelölések:

$V(G)$: A G gráf csúcsainak a halmaza.

$E(G)$: A G gráf éleinek a halmaza.

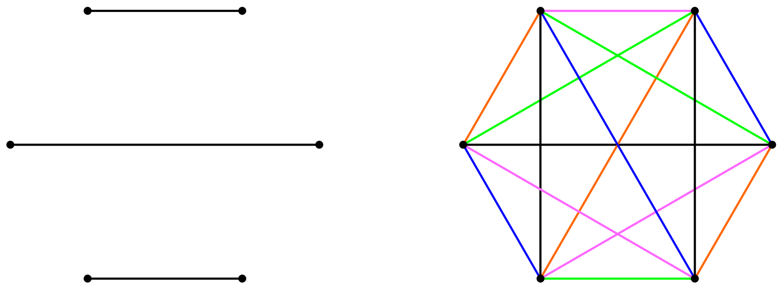
K_n: Az n csúcsú teljes gráf.



4.0.1. ábra: K_6

4.0.1. Definíció: A G gráf *1-faktorának* nevezzük az $F \subset E(G)$ élhalmazt, ha minden $x \in V(G)$ csúcs pontosan egy F-beli élen van rajta.

A G gráf 1-faktorainak $F = \{F_1, F_2, \dots F_k\}$ halmazát G *1-faktorizációjának* nevezzük, ha minden $e \in E(G)$ él pontosan egy F-beli 1-faktorban szerepel.

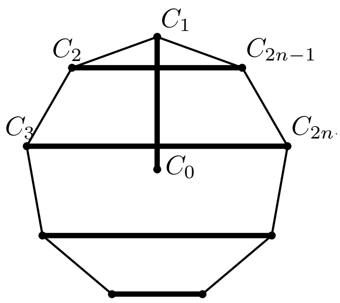


4.0.2. ábra: $K6$ egy 1-faktora és egy 1-faktorizációja

Azaz a körmérkőzéses bajnokság szerevezése átfogalmazva gráfelméleti feladattá így hangzik: adjuk meg K_{2n} egy 1-faktorizációját. Ugyanis az 1-faktorok megfelelnek a fordulóknak, hiszen minden csúcs pontosan egy élen van rajta, azaz minden csapat pontosan egy mérkőzést játszik. Az 1-faktorizáció pedig a teljes menetrendnek, hiszen minden él pontosan egy 1-faktorban szerepel, azaz minden mérkőzés pontosan egy fordulóban kerül megrendezésre. És persze mindenki játszik mindenkivel, mivel K_{2n} 1-faktorizációját készítettük el.

4.1 $\mathbf{K_{2n}}$ 1-faktorizációja

Ábrázoljuk K_{2n}-t egy $(2n-1)$ csúcsú szabályos sokszög csúcsaival és középpontjával. Ekkor a középpontnak megfeleltetett csapat szerepe lesz kitüntetett, ezért nevezzük C_0-nak, a többi pontot pedig C_1, C_2, …, C_{2n-1}-nek. Bármely szabályos sokszög tengelyesen szimmetrikus a középpontját valamely csúcsával összekötő egyenesre.



Ha a sokszögnek páratlan sok csúcsa van, akkor az is igaz, hogy ezen a tengelyen csak az a csúcs van rajta, amelyet összekötöttünk a középponttal. Ekkor viszont az összes többi – páros sok – csúcsot párba állíthatjuk úgy, hogy két csúcs akkor alkot egy párt, ha egymás tükörképei. Tehát ha C_0-t összekötjük valamely C_k-val ($k \neq 0$), akkor a többi csúcs párba állítható, ezeket a párokat is kössük össze éllel, így K_{2n} egy 1-faktorát, azaz egy fordulót kapunk. Ez $k = 1, 2, ..., 2n-1$-re mindig működik. Így a k. forduló párosítását a következőképp definiálhatjuk: $C_0 - C_k$ és $C_i - C_j$ pontosan akkor, haC_i és C_j egymás tükörképei a C_0C_k egyenesre nézve. Már csak azt kell megvizsgálni, hogy ezek az 1-faktorok 1-faktorizációt alkotnak, vagyis, hogy ez valóban jó lebonyolítás.

1. $2n-1$ forduló van, mert $k = 1, 2, \ldots 2n-1$.
2. Minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzést játszik, mert1-faktorokra bontottuk K_{2n}-t.
3. Bármely két csapat pontosan egyszer játszik egymással. Ez C_0 esetén nyilvánvaló, egyébként pedig tetszőleges C_i és C_j akkor játszik egymással, ha egymás tükörképei. A C_iC_j szakasz felezőmerőlegese viszont átmegy C_0-n és a sokszög pontosan egy C_k csúcsán. Azaz bárhogy választjuk ki a sokszög két csúcsát, ahhoz egyértelműen létezik a C_0C_k egyenes, amely szintén egyértelműen meghatározza a k. fordulót, amelyben megrendezik a mérkőzést.

5. Bajnokságszervezés a valóságban

Az előző fejezetekben megismert módszerek egy bajnokság egy-egy lehetséges fordulókra bontását és az egyes fordulók párosításait adják meg. A nemzeti bajnokságoknál azonban nem csak az számít, hogy egy mérkőzésen melyik két csapat játszik, hanem az is, hogy hol rendezik a találkozót. A legtöbb nemzeti bajnokság– köztük a magyar és a már említett élbajnokságok is – oda-visszavágós körmérkőzéses bajnokságok. Azaz mindenki mindenkivel kétszer játszik, egyszer hazai pályán, egyszer pedig idegenben. Erre azért van szükség, mert a hazai pályán szereplő csapatkisebb-nagyobb előnyöket élvez. Több szurkoló támogatja, sokkal jobban ismeri a pálya sajátosságait, illetve gazdaságilag is fontos, ugyanis a hazai csapaté a bevétel. Egy szervezésnél ezt is figyelembe kell venni, és általában arra törekszenek, hogy ne legyenek hosszabb hazai vagy idegenbeli sorozatok. (Ez alól kivételt jelenthet, ha nagyok a távolságok és gazdaságosabb a távoli mérkőzéseket egymás után lejátszani.)

5.0.1. Definíció: Azt mondjuk, hogy egy szervezés *ideális*ideális szervezés egy csapat számára, ha bármely egymást követő két mérkőzéséből egyik hazai, másik idegenbeli. Másképpen fogalmazva felváltva játszik otthon és vendégként.

5.0.2. Tétel: Bármely szervezés maximum két csapat számára lehet ideális.

Bizonyítás: Rendeljünk hozzá minden csapathoz egy vektort, melynek az$i$. koordinátája 1, ha otthon és 0, ha idegenben játszik az i. fordulóban. Így minden csapathoz más vektor tartozik, ugyanis amikor a két csapat egymás ellen játszik, akkor az egyiknél 1, a másiknál 0 az adott fordulónak megfelelő koordináta. Továbbá egy vektor akkor felel meg a csapat számára ideális szervezésnek, ha a koordinátái felváltva 0 és 1. Ilyenből kettő van: amelyik 0-val és amelyik 1-gyel kezdődik. Tehát a szervezés maximum két csapat számára lehet ideális.

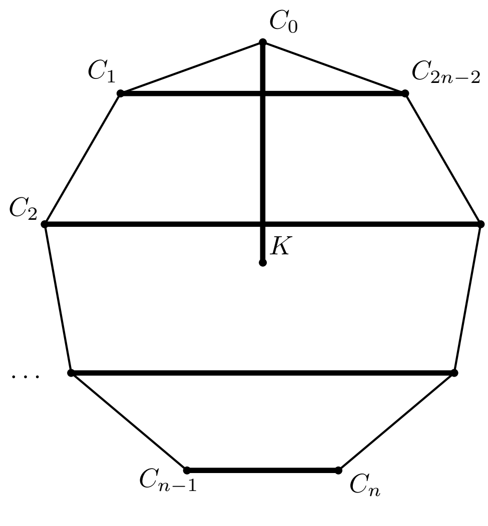
Másképpen fogalmazva láthatjuk, hogy egy szervezés nem lehet mindenki számára ideális, ezért adódik a kérdés, hogy akkor milyen szervezés a lehető legjobb. A nem ideális sorsolások közül a legjobb az, amikor egyszer törik meg a váltakozás.

5.0.3. Definíció: Egy szervezés *optimális*optimális szervezés egy csapat számára, ha pontosan egyszer fordul elő, hogy két egymást követő fordulóban mindkétszer otthon vagy mindkétszer idegenben szerepel.

Mivel az 5.0.2. tétel szerint legfeljebb két csapat számára lehet ideális a szervezés, ezért a lehető legjobb lehetőségnek az tűnik, hogy két csapat számára ideális, a többieknek pedig optimális. Ekkor a szervezés egészére mondjuk, hogy *optimális*. A következő tétel megmutatja, hogy ilyen szervezés mindig létezik is.

5.0.4. Tétel: Minden $2n$ csapatos bajnokság megszervezhető úgy, hogy 2 csapat számára ideális, $2n-2$ számára pedig optimális legyen.

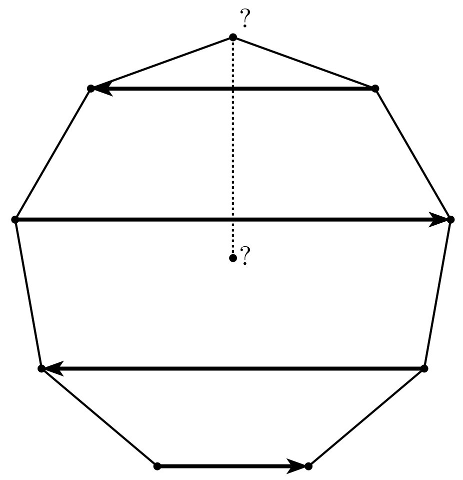
Bizonyítás: Ennek belátásához a gráfelméleti megközelítést használjuk, de a könnyebb számolás érdekében máshogy betűzve a csúcsokat.



5.0.1. ábra: A gráfelméleti megközelítés, más betűzéssel

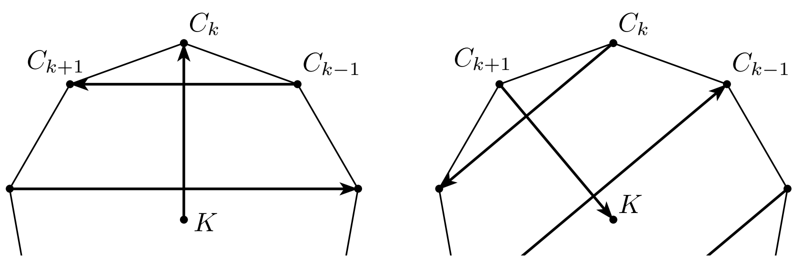
Az 5.0.1. ábra betűzésével azt mondhatjuk, hogy a k. fordulóban rendezik a KC_k és $C_{k+i}C_{k-i}$ mérkőzéseket, ahol $0 \leq k \leq 2n-2$, $1 \leq i \leq n-1$ és a $k \pm i$ számokon az $(2n-1)$-gyel vett osztási maradékot értjük. (Ezért célszerűbb így betűzni a szabályos sokszög csúcsait, hiszen így könnyen megfeleltethetőek Z_{2n-1} elemeinek.) Rendezzék a KC_k mérkőzést K pályáján, ha k páros és C_k pályáján, ha k páratlan. A másik típusú mérkőzések közül pedig C_{k-i} legyen a vendéglátó, ha i páros és C_{k+i}, ha i páratlan.

Ez a pályabeosztás megfelel annak, hogy a korábban megismert 1-faktorizációt irányítjuk az 5.0.2. ábrán látható módon.



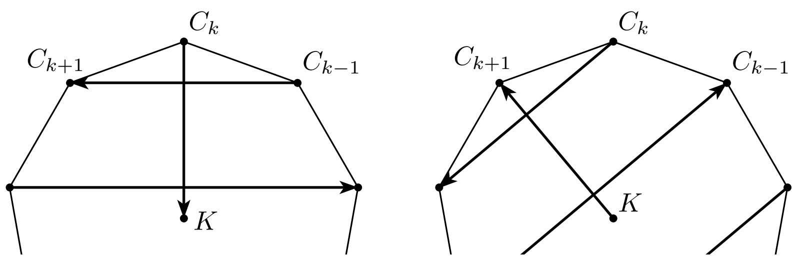
5.0.2. ábra: Az élek a hazai csapat felé vannak irányítva

Világos, hogy K számára ez a szervezés ideális. Nézzük meg, hogy egy tetszőleges C_x csapat hol játszik két egymást követő fordulóban. Ha ez a két forduló olyan, hogy C_x egyikben sem találkozik K-val, akkor egyik mérkőzés hazai, másik pedig idegenbeli, hiszen két egymást követő nyíl fordított irányítású. Most nézzük meg K ellenfeleit két egymást követő fordulóban. A k. fordulóban biztos, hogy C_{k+1} otthon játszik. Ha k páratlan, akkor C_k is hazai pályán játszik. Így a következő fordulóban C_k és C_{k+1} vendég lesz, hiszen $k+1$ páros. Azaz C_k és C_{k+1} egymást követő két mérkőzésén felváltva játszik otthon és idegenben (5.0.3. ábra).



5.0.3. ábra: A k. és a (k+1). forduló, páratlan k esetén

Ha viszont k páros, akkor C_k vendég. De C_k a következő fordulóban is vendég lesz, C_{k+1} pedig sorozatban másodszor otthon játszik, mert ekkor $k+1$ páratlan (5.0.4. ábra).



5.0.4. ábra: A k. és a (k+1). forduló, páros k esetén

Általánosan: az F_{2k} és F_{2k+1} fordulókban törik meg a váltakozás és pontosan két csapat (C_{2k} és C_{2k+1}) számára. Ilyen fordulópár $n-1$ darab van, tehát összesen $2n-2$-szer törik meg a váltakozás és mindig más csapatnál. Tehát ez a szervezés optimális.

Ezzel a módszerrel már a pályaválasztói jogot is figyelembe véve tudunk bajnokságot szervezni, ami a legtöbbször elegendő egy nemzeti bajnokság megszervezéséhez. De előfordulhat az is, hogy két csapat hazai mérkőzéseinek ugyanaz a stadion ad otthont. Ekkor a sorsolásnak azt is biztosítania kell, hogy nem szerepelhet ugyanabban a fordulóban hazai pályán ez a két csapat. (Kivéve azt a fordulót, amikor egymás ellen játszanak, de hivatalosan akkor is az egyik csapat vendég.) Például az olasz bajnokság 2008/2009-es kiírásában négy olyan stadion is van, amelyet két csapat használ. A Milan és az Internazionale a San Siróban, a Roma és a Lazio a Stadio Olimpicóban, a Juventus és a Torino a Stadio delle Alpiban, míg a Sampdoria és a Genoa a Stadio Luigi Ferrarisban játssza hazai mérkőzéseit. Az előző bizonyításban megadott módszer erre a problémára is megoldást nyújt, ugyanis párba állítja a csapatokat az alapján, hogy melyek sorsolása ellentétes.

5.0.5. Definíció: Két csapat sorsolását *ellentétesnek* sorsolás nevezünk, ha valahányszor az egyik csapat otthon játszik, akkor a másik idegenben.

Az előbbi konstrukcióban szerepel két csapat, melyek számára ideális a sorsolás és az egyik otthon, a másik vendégként kezd, tehát az ő sorsolásuk ellentétes. A többi $2n-2$ csapat pedig automatikusan párba áll, ugyanis ha megtörik egy csapat váltakozó szereplése, akkor pontosan két együttesé törik meg. És ezeknek a pároknak ellentétes a sorsolása, mivel ekkor az egyik kétszer otthon, a másik kétszer idegenben szerepelt, egyébként pedig egymás mellett helyezkednek el a sokszögön, tehát definíció szerint ellentétesen játszanak.

Ezzel a módszerrel minden igényt kielégítően meg lehet szervezni egy n csapatos körmérkőzéses bajnokságot. Ezt a szervezést generálja a mellékelt program is, amely tetszőleges n csapat esetén megadja a körmérkőzéses bajnokság egy lehetséges optimális szervezését, valamint az ellentétes párokat.

5.1 A magyar bajnokság szervezése

Ez a fejezet a leggyakorlatiasabb, ugyanis azt mutatja be, hogy a Magyar Labdarúgó Szövetség (MLSZ) hogyan szervezi az összes hozzá tartozó bajnokságot, többek között az elsőosztály küzdelmeit. Létezik egy sablon, amelyben szerepel 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 és 20 csapatos bajnokság egy lehetséges sorsolása. Ez természetesen figyelembe veszi a pályaválasztói jogot is és ügyel arra, hogy lehetőleg felváltva játsszanak otthon és idegenben a csapatok. Mint azt korábban láttuk, a lehető legjobb szervezés az, amikor két csapat felváltva játszik hazai pályán és idegenben, a többinél pedig egyszer előfordul, hogy kétszer egymás után otthon, vagy kétszer egymás után idegenben szerepel. Ezek a sorsolási sablonok is kielégítik ezt a feltételt, tehát optimális a magyar bajnokságok lebonyolítása, hiszen az elmúlt évtizedekben minden MLSZ által szervezett bajnokságot ezek segítségével bonyolítottak le. Sőt fel vannak tüntetve benne az ellentétes sorsolási számok, azaz azok a számpárok, amelyeket az olyan csapatok kaphatnak, melyeknek közös stadionjuk van. Tehát ha az egyik csapat számát kisorolták, az egyértelműen, sorsolás nélkül meghatározza a ,,lakótárs" sorszámát is. Ezzel jelenleg nem kell törődni a magyar bajnokságban, hiszen minden csapatnak van saját stadionja.

Az viszont elképzelhető, hogy egy csapat a város stadionjában szerepel, amely más eseményeknek is helyszínéül szolgálhat. Ezért a csapatok minden sorsolás előtt elküldhetik, hogy a következő szezonban mely fordulók időpontjában foglalt a stadionjuk, egyúttal kérhetik, hogy abban a fordulóban idegenben játszhassanak. Ekkor a sorsolási sablonban megnézik, hányas sorszámú csapatok szerepelnek az adott fordulóban idegenben és csak azok közül a számok közül sorsolnak a csapatnak. Egy adott fordulóban értelemszerűen a csapatok fele játszik otthon és a másik fele idegenben. Tehát egy ilyen kérés felezi a kapható lehetséges sorszámokat. További kérések esetén tovább csökkennek a lehetőségek. Az MLSZ tájékoztatása szerint olyan is előfordul, hogy egy csapatnak csupán két számból sorsolnak. Sőt megtörténhetne az is, hogy annyi kérés érkezik a csapatok részéről, hogy azokat nem lehet egyidejűleg teljesíteni, de gyakorlatban ilyen nem szokott előfordulni. Ha mégis ez történne, akkor néhány kérést figyelmen kívül kell hagyni, és más módon megoldani a stadionkérdést, például pályaválasztói jog felcserélésével, semleges pályán való megrendezéssel, vagy a mérkőzés elhalasztásával.

Irodalomjegyzék

1. Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1998.
2. Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.
3. Kiss György: *Hogyan szervezzünk körmérkőzéses focibajnokságot?*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2006/9, 514-525.
4. Kiss György - Szőnyi Tamás: *Véges geometriák*, Polygon Kiadó, Szeged, 2001.
5. Wallis, W. D.: *One-factorizations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

Nagy Péter: Rezolúció

Kijelentéslogika – bevezetés

A kijelentés (ítélet vagy állítás) olyan jól meghatározott dologra vonatkozó kijelentő mondat, amely vagy igaz, vagy hamis, de nem lehet egy időben igaz is és hamis is. Jelölés: $p, q, r, \ldots, x, y, z, \ldots$ ezeket kijelentésváltozóknak nevezzük. Például:

p: ,,Az öt páratlan szám." – igaz kijelentés

q: ,,A macska növény." – hamis kijelentés

r: ,,Minden kettőnél nagyobb páros szám felbontható két prímszám összegére."– kijelentés, de erről nem tudjuk jelenlegi ismereteink segítségével eldönteni, hogy igaz vagy hamis. (Goldbach-sejtés)

A ,,Szépek a fogaid, Laci." mondat nem kijelentés, mert még ha van is a jelenlevők között László, akkor sem lehet egyértelműen meghatározni fogai szépségét, hiszen mindenkinek mást jelent a ,,szép fog".

Nem kijelentések a kérdő és felkiáltó mondatok és nem tekintjük kijelentésnek a definíciókat sem. Például, az ,,Egy kettővel osztható számot párosnak nevezünk." mondat nem kijelentés, de a ,,Minden páros szám osztható 2-vel." már igen. A ,,Most nem mondok igazat." mondat nem kijelentés, mert ellentmondásos.

Az ,,igaz" illetve ,,hamis" a kijelentés logikai értéke vagy igazságértéke, ezeket a továbbiakban 1 (vagy i), 0 (vagy h) jelöli. Ha p egy adott kijelentés, akkor ennek logikai értékét $|p|$ jelöli, így a fenti kijelentésekre $|p| = 1$ és $|q| = 0$.

Műveletek kijelentésekkel

Kijelentés-logikai műveletek: Kijelentések közötti műveletekről csak abban az esetben beszélünk, ha a kapott összetett mondat is kijelentés, és annak logikai értékét a komponensek logikai értéke egyértelműen meghatározza.

Két kijelentés összekapcsolása esetén 16 különböző eredmény fordulhat elő, amelyet az alábbi táblázatban láthatunk:

		M(A;B)															
A	B	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}
i	i	i	i	i	i	h	i	i	h	i	h	h	i	h	h	h	h
i	h	i	i	i	h	i	i	h	i	h	i	h	h	i	h	h	h
h	i	i	i	h	i	i	h	i	i	h	h	i	h	h	i	h	h
h	h	i	h	i	i	i	h	h	h	i	i	i	h	h	h	i	h

Negáció (tagadás)

Egy tetszőleges p kijelentés negációján a ,,nem p" (nem igaz, hogy p) kijelentést, vagy ennek átfogalmazott alakját értjük.

Jele: $\neg p$

A negáció logikai értéke:

p	$\neg p$
i	h
h	i

A negáció tulajdonságai:

Kettős tagadás: $\neg\neg p = p$

Konjunkció (összekapcsolás)

Tetszőleges p, q kijelentések konjunkcióján a ,,p és q" kijelentést, vagy ennek átfogalmazott alakját értjük.

Jele: $p \wedge q$

A konjunkció logikai értéke:

p	q	$p \wedge q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A konjunkció tulajdonságai:

Kommutatív: $p \wedge q = q \wedge p$

Asszociatív: $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r = p \wedge q \wedge r$

Idempotens: $p \wedge p = p$

Diszjunkció (szétválasztás)

Tetszőleges p, q kijelentések diszjunkcióján a ,,p vagy q" kijelentést, vagy ennek átfogalmazott alakját értjük.

Jele: $p \vee q$

A diszjunkció logikai értéke:

p	q	$p \vee q$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

A diszjunkció tulajdonságai:

Kommutatív: $p \vee q = q \vee p$

Asszociatív: $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r = p \vee q \vee r$

Idempotens: $p \vee p = p$

A műveleteket összekapcsoló tulajdonságok

Abszorpció: A konjunkció (diszjunkció) abszorptív a diszjunkcióra (konjunkcióra) nézve.

$p \wedge (p \vee q) = p$

$p \vee (p \wedge q) = p$

De Morgan azonosságok: Két kijelentés konjunkciójának (diszjunkciójának) negációja logikailag ekvivalens a két kijelentés negációjának diszjunkciójával (konjunkciójával).

$\neg(p \vee q) = \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) = \neg p \vee \neg q$

Disztributivitás: A konjunkció (diszjunkció) disztributív a diszjunkcióra (konjunkcióra) nézve.

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Megjegyzés: A logikában érvényes a dualitás elve: A konjunkció és diszjunkció jeleit, illetve az i és h logikai konstansokat kicserélve igaz állításból igaz állítást kapunk.

Implikáció (összefonódás)

Tetszőleges p, q kijelentések implikációján a ,,ha p akkor q" kijelentést, vagy ennek átfogalmazott alakját értjük.

Jele: $p \to q$

Az implikáció logikai értéke:

p	q	$p \to q$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Az implikáció tulajdonságai: Nem kommutatív, nem asszociatív és nem idempotens.

A $p \to q$ implikáció megfordításán a $q \to p$ implikációt értjük.

A $p \to q$ implikáció kontrapozícióján a $\neg q \to p$ implikációt értjük. Az implikáció logikai értéke megegyezik a kontrapozíciója logikai értékével.

Ekvivalencia (egyenértékűség)

Tetszőleges p, q kijelentések ekvivalenciáján a ,,ha p, akkor és csak akkor q" kijelentést, vagy ennek átfogalmazott alakját értjük.

Jele: $p \Leftrightarrow q$

Az ekvivalencia logikai értéke:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Az ekvivalencia tulajdonságai:

Kommutatív: $p \Leftrightarrow q = q \Leftrightarrow p$

Asszociatív: $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) = (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r = p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$

Nem idempotens: $p \Leftrightarrow p = i$

„Sem-sem művelet”

A köznapi életben ritkán, de szerepel az a logikai művelet, amelyet a „sem… , sem… ” logikai kapcsolószavakkal fejezünk ki. Ennek a matematikai modellje a sem-sem művelet.

Jele: $p \downarrow q$

A „sem-sem művelet” logikai értéke:

p	q	$p{\downarrow}q$
i	i	h
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Sheffer-féle művelet

A mindennapi életben van a „vagy” kapcsolószónak olyan értelme is, amikor azt fejezzük ki, hogy a két állítás nem lehet egyszerre igaz, minden más eset előfordulhat. Ezt modellezi az ún. Sheffer-féle művelet.

Jele: $p|q$

Az Sheffer-féle művelet logikai értéke:

p	q	$p\|q$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	i

Antivalencia

A hétköznapi nyelvben szintén a „vagy” szóval lehet kifejezni, de itt a „vagy”-ot választó értelemben értjük. Ez a művelet gyakorlatilag megegyezik a modulo 2 összeadással.

Jele: $p \oplus q$

Az antivalencia logikai értéke:

p	q	$p \oplus q$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Ezek után a táblázatunk így fog kinézni:

		M(A;B)															
A	B	i	$A \vee B$	M_3	$A \to B$	$A\|B$	A	B	$A \oplus B$	$A \Leftrightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$A \wedge B$	M_{13}	M_{14}	$A \downarrow B$	h
i	i	i	i	i	i	h	i	i	h	i	h	h	i	h	h	h	h
i	h	i	i	i	h	i	i	h	i	h	i	h	h	i	h	h	h
h	i	i	i	h	i	i	h	i	i	h	h	i	h	h	i	h	h
h	h	i	h	i	i	i	h	h	h	i	i	i	h	h	h	i	h

Észrevétel: a táblázatban az első nyolc és a második nyolc oszlop szinte tükörképe egymásnak, mindössze az i-ket és a h-kat kell kicserélni. Innen triviálisan adódnak a következő összefüggések:

$A \vee B = \neg(A \downarrow B)$

$A|B = \neg(A \vee B)$

$A \oplus B = \neg(A \Leftrightarrow B)$

$M_3 = \neg M_{14}$; $M_{13} = \neg(A \to B)$

Tételbizonyítás az ítéletkalkulusban

Feladat:

Lássuk be, hogy az A_1, A_2 és A_3 állításokból logikailag következik az A_4 állítás!

A_1: Ha süt a nap, akkor Péter strandra megy.

A_2: Ha Péter strandra megy, akkor úszik.

A_3: Péternek nincs lehetősége otthon úszni

A_4: Ha süt a nap, akkor Péter nem marad otthon.

Feladat (folyt.):

Bizonyítandó: „Ha A_1 és A_2 és A_3, akkor A_4."

(erre egy programot, eljárást kellene készíteni)

Szintaxis

1. *elválasztó jelek*: `; ( ) [ ]` { }
2. *logikai műveletek*: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\Leftrightarrow(\equiv)$
3. *ítéletváltozók*: p, q, r
4. *ítéletkonstansok*: igaz (i), hamis (h)

Formulák: (iteratívan hat. meg)

atomi formulák: (atom)

- ítéletváltozók
- ítéletkonstansok

formulák: (jólformált formula)

- atomi formula
- ha A és B formulák, akkor a

$$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \Leftrightarrow B)$$

  kifejezések is formulák

zárójelek elhagyása *precedencia sorrend* alapján: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\Leftrightarrow(\equiv)$

Például:

$$\begin{aligned} ((\neg p) \wedge q) &\equiv r \\ \neg p \wedge q &\equiv r \end{aligned}$$

Feladat (folyt.):

p: süt a nap
q: Péter strandra megy
r: Péter úszik
s: Péter otthon marad

Ekkor az $A_1 - A_4$ állításoknak rendre az alábbi $F_1 - F_4$ formulákat feleltetjük meg:

F_1: $p \to q$

F_2: $p \to r$

F_3: $\neg(s \wedge r)$

F_4: $p \to \neg s$

Szemantika

(a formulákhoz a szemantika szabályai szerint adhatunk jelentést)

1. lépés: formula *interpretálása*

2. lépés: formula *kiértékelése*

interpretálás: a formula minden egyes ítéletváltozójához ítéletkonstansokat rendelünk minden lehetséges módon (a formula egy interpretációja egy lehetséges hozzárendelést jelent).

Például:

$I_1 : (p, q, r, s) \leftarrow (T, T, F, F)$

$I_2 : (p, q, r, s) \leftarrow (F, T, T, F)$

kiértékelés: az interpretált formula kiértékelését a műveleti jelek szemantikája (*igazságtábla*) alapján végezzük. (a kiértékelés interpretáció függő – a műveleti jelek szemantikája alapján)

A kielégíthetőségi tulajdonság

Kielégíthető egy formula, ha valamely interpretációban igaz.

Érvényes egy formula, ha minden interpretációban igaz (*tautológia*).

Kielégíthetetlen egy formula, ha minden interpretációban hamis a logikai értéke.

Tétel: Egy formula akkor és csak akkor érvényes, ha a negáltja kielégíthetetlen.

Tétel: Minden érvényes formula kielégíthető.

Formulák ekvivalenciája

Két formula ekvivalens, ha minden interpretációban ugyanaz a logikai értékük.

1. $A \equiv B = (A \to B) \wedge (B \to A)$

2. $A \to B = \neg A \vee B$

3.a. $A \vee B = B \vee A$ (kommutativitás)

3.b. $A \wedge B = B \wedge A$

4.a. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ (asszociativitás -

4.b. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ a művelet kiterjesztése szempontjából fontos)

5.a. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (disztributivitás)

5.b. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

6.a. $A \vee h = A$

6.b. $A \wedge i = A$

7.a. $A \vee i = i$

7.b. $A \wedge h = h$

8.a. $A \vee \neg A = i$

8.b. $A \wedge \neg A = F$

9. $\neg(\neg A) = A$

10.a. $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ (De-Morgan)

10.b. $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

(nem asszociatív a számtani közép, ha több argumentum van)

(a szorzás nem kommutatív a patikusoknál ☺ $2 \times 5 \neq 5 \times 2$)

Tétel: Az A és a B formulák akkor és csak akkor ekvivalensek, ha az $A \equiv B$ formula érvényes.

A logikai következmény

W formula *logikailag következik* az $A_1, \ldots, A_n$ formulákból (másként: ezeknek logikai következménye), ha minden olyan interpretációban, amelyben $A_1, \ldots, A_n$ mindegyike igaz, igaz a W formula is.

Tétel: A W formula akkor és csak akkor következik logikailag az $A_1, \ldots, A_n$ formulákból, ha az $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow W$ formula érvényes.

Bizonyítás: (könyv alapján)

Ha W logikailag következik $A_1, \ldots, A_n$-ből, akkor definíció szerint minden olyan interpretációban, amelyben $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ igaz, W is igaz.

Ekkor az $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow W$ implikáció minden interpretációban igaz, hiszen éppen azt az egyetlen hamis igazságértékű esetet kizártuk, amikor az előtag igaz és az utótag hamis.

Megfordítva, ha $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow W$ minden interpretációban igaz, akkor az implikáció igazságtáblája szerint nem valósulhat meg az az eset, hogy $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ igaz és W hamis, azaz ha $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ igaz, akkor W is igaz értékű – és ez éppen a logikai következmény definíciójával egyezik meg.

Tétel: A W formula akkor és csak akkor logikai következménye az $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ formulának, ha az $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg W$ formula kielégíthetetlen.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \neg[(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow W] &= \neg[\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \vee W] \\ &= (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \wedge \neg W \\ &= A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg W \end{aligned}$$

A bizonyítandó $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow W$ formulát *tételnek* nevezzük.

Az $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ kifejezések a tétel *axiomái* vagy *feltételei*, *premisszái*.

A W formula pedig a *következmény* vagy *konklúzió*.

A tételbizonyítás néhány módszere

A tételbizonyítás egy $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow W$ típusú formula *érvényességének* belátását kívánja.

$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$-t *feltételeknek*, *premisszáknak*, vagy *axiomáknak* nevezzük.

W-t *következménynek*, *konklúziónak*, *célállításnak* hívjuk.

A bizonyítandó $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow W$ formulát *tételnek* nevezzük.

1. **Tételbizonyítás igazságtáblával**
2. **Quine algoritmusa**

3. **Wang algoritmusa**
4. **Formális levezetés**

   Ezeket a módszereket nem tárgyaljuk most részletesen.
5. **Rezolúció**

Rezolúció

A rezolúció módszere egy olyan könnyen algoritmizálható egyszerű cáfoló eljárás, amelynek segítségével egy konjunktív normálforma, illetve egy klózhalmaz kielégíthetetlenségét bizonyítjuk. Ezt a klózhalmazt a bizonyítandó tételt kifejező formula negáltjából állítjuk elő, így ha a klózhalmaz kielégíthetetlen, akkor a tétel érvényes. A rezolúció jelentősége egyszerűsége mellett abban áll, hogy az eljárás kiterjeszthető az elsőrendű predikátumkalkulusra.

A konjunktív normálforma (KNF)

A rezolúció alkalmazásához a formulát először KNF alakra kell hozni.

A *konjunktív normálforma* klózok (speciális részformulák) konjunkciója.

Egy *klóz* literálok diszjunkciója, illetve egy literál is klózt alkot.

Literálnak egy ítéletváltozót, vagy annak negáltját nevezzük.

Példa: $(p \vee q) \wedge (r \vee \neg p) \wedge s$: három klózt tartalmaz ez a KNF, és négy literált (p, q, r, s)

Tétel: Minden ítéletkalkulusbeli formula KNF alakra hozható.

Transzformációs szabályok:

1. Ekvivalencia kiküszöbölése.
2. Implikáció kiküszöbölése.
3. Negáció hatáskörének csökkentése – De Morgan szabályok segítségével
4. Disztributivitás $\rightarrow$ klózok konjunkciójának létrehozása

   $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

   (ez utóbbi épp két klóz konjunkciója)

Példa:

$$\neg\{[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg(s \wedge r)] \rightarrow (p \rightarrow \neg s)\}$$

$$\neg\{\neg[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg(s \wedge r)] \vee (p \rightarrow \neg s)\}(2)$$

$$\neg\{\neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg s \vee \neg r)] \vee (\neg p \vee \neg s)\}(2,4)$$

$$\{[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg s \vee \neg r)] \wedge (p \wedge s)\}(3,4)$$

(a felesleges zárójelek elhagyása után)

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg s \vee \neg r) \wedge p \wedge s$$

A rezolúciót a formula *klóz alakjára* alkalmazzuk. Ezt úgy kapjuk meg, hogy a konjunktív normálformából elhagyjuk a $\wedge$ műveleti jeleket, és a formulát *klózok halmazának* tekintjük.

Azt kell belátnunk, hogy ez a klóz halmaz kielégíthetetlen!

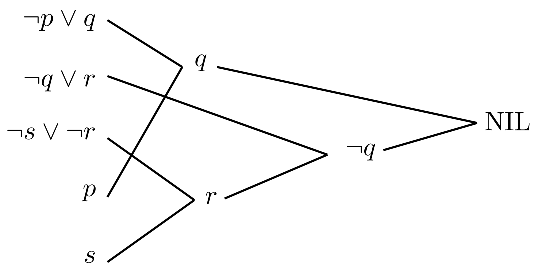
C_1: $\neg p \vee q$

C_2: $\neg q \vee r$

C_3: $\neg s \vee \neg r$

C_4: p

C_5: s



Olyan klózpárokat keresünk, hogy azokban komplemens literálpár szerepeljen, egészen addig, **amíg ellentmondásra nem jutunk** (NIL – üres klóz). Ekkor a formula kielégíthetetlen, tehát az eredeti állítás érvényes.

rezolúció egy lépése:

Legyenek $p \vee A$, $\neg p \vee B$ klózok.

Ezek a klózok *rezolválhatók*, mert *egyetlen komplemens literálpárt* tartalmaznak (p és $\neg p$)

$\rightarrow$ $A \vee B$ a rezolvense, ami szintén klóz.

Tétel: A $(p \vee A) \wedge (\neg p \vee B)$ és a $(p \vee A) \wedge (\neg p \vee B) \wedge (A \vee B)$ formulák ekvivalensek.

Biz.:

1) Lemma: Ha $C \rightarrow D$ érvényes, akkor $C \equiv C \wedge D$ is érvényes.

Biz.: ($C \equiv C \wedge D$ formula mindhárom esetben igaz, tehát érvényes.)

C	D	$C \rightarrow D$	$C \wedge D$	$C \equiv C \wedge D$
i	i	i	i	i
h	i	i	h	i
h	h	i	h	i

2) Lemma: $(p \vee A) \wedge (\neg p \vee B) \rightarrow (A \vee B)$ érvényes.

Biz.: (indirekt)Tegyük fel, hogy hamis $\rightarrow$ ez csak akkor lehet, ha az előtag igaz, az utótag pedig hamis. Az előtag pedig csak akkor lehet igaz, ha A és B legalább egyike igaz, ekkor azonban $A \vee B$ is igaz. Ez ellent mond a feltételünknek.

(fő tétel bizonyítása)

Alkalmazzuk az 1. Lemmát a 2. Lemmából adódó $C = (p \vee A) \wedge (\neg p \vee B)$ és $D = A \vee B$ helyettesítéssel. Ekkor a

$$(p \vee A) \wedge (\neg p \vee B) \equiv (p \vee A) \wedge (\neg p \vee B) \wedge (A \vee B)$$

formula érvényes.

Megjegyzések a rezolúcióhoz:

1. KNF
2. listába a klózokat
3. könnyen programozható
4. klózból klózt csinálunk, amíg az üres klózhoz el nem jutunk
5. de az eljárás nemdeterminisztikus – túl hosszú
6. *teljes*, mert mindig bebizonyítható
7. minden számítógépes eljárás ezt használja

Feladat:

Formalizáljuk és oldjuk meg rezolúcióval a következő feladatot:

Egy dolgozó elhatározta, hogy ha nem emelik a fizetését, akkor vagy elmegy a munkahelyéről máshová dolgozni, vagy kevesebb időt tölt bent és külön munkát vállal. Kiderült, hogy sem a fizetését nem emelik, sem a munkaidejét nem tudja csökkenteni. Lássuk be, hogy a dolgozó nem marad a munkahelyén.

Megoldás:

A_1: Ha nem emelik a fizetését, akkor vagy elmegy a munkahelyéről máshová dolgozni, vagy kevesebb időt tölt bent és külön munkát vállal.

A_2: Nem emelik a fizetését, sem a munkaidejét nem tudja csökkenteni. (= kevesebb időt tölt bent)

A_3: A dolgozó nem marad a munkahelyén. (= Elmegy máshová dolgozni)

p: nem emelik a fizetését

q: elmegy a munkahelyéről

r: kevesebb időt tölt bent és külön munkát vállal

Ekkor az $A_1 - A_3$ állításoknak rendre az alábbi $F_1 - F_3$ formulákat feleltetjük meg:

F_1: $p \to (q \oplus r)$

F_2: $p \land \neg r$

F_3: q

Bizonyítandó: $F_1 \land F_2 \to F_3$, tehát be kell látni azt, hogy

az $F_1 \land F_2 \land \neg F_3$ formula **kielégíthetetlen**.

$$
\begin{array}{rcl}
F_1 \land F_2 \land \neg F_3 & : & [p \to (q \oplus r)] \land [p \land \neg r] \land [\neg q] = \\
 & & (\neg p \lor (q \oplus r)) \land p \land \neg r \land \neg q = \\
 & & (\neg p \lor ((q \lor r) \land (\neg q \lor \neg r))) \land p \land \neg r \land \neg q = \\
 & & (\neg p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \land p \land \neg r \land \neg q
\end{array}
$$

a klózhalmaz:

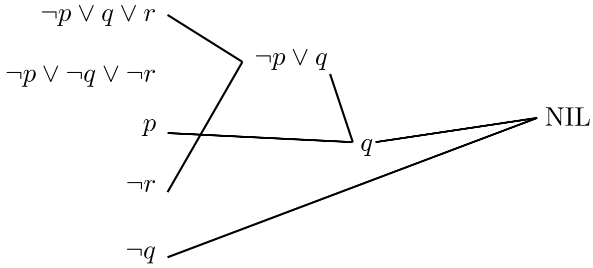
C_1: $\neg p \lor q \lor r$

C_2: $\neg p \lor \neg q \lor \neg r$

C_3: p

C_4: $\neg r$

C_5: $\neg q$



Ellentmondásra jutottunk, tehát az eredeti állítás igaz.

Irodalomjegyzék:

Urbán János: Matematikai logika

Fekete – Gregorics – Nagy : Bevezetés a mesterséges intelligenciába

Nemecskó István: Kombinatorikus geometria

1. Hány egyenest határozhat meg a síkon 2, 3, 4 illetve 5 pont?

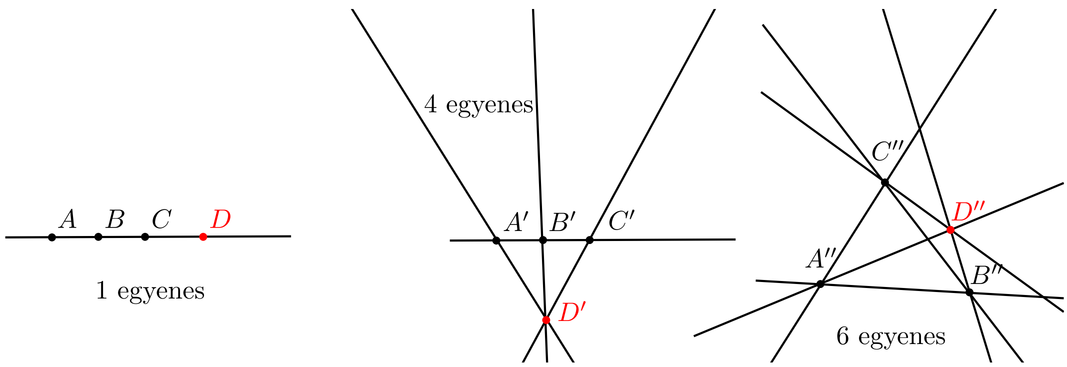
   Igyekeztünk valamilyen rendszer szerint összeszedni a lehetséges megoldásokat. Az ábrára újabb pontok felvételénél megbeszéltük, hogy milyen helyzeteket tekintünk különbözőnek, mikor hány új egyenes jön létre.

   Mo.:

   2 pont nyilvánvalóan 1 egyenest határozhat meg.

   3 pont vagy egy egyenesbe esik, vagy egy háromszög három csúcsát adják, tehát 3 egyenest határoznak meg.

   4 pont



   5 pont esetében 1, 5, 6, 8 illetve 10 egyenest.

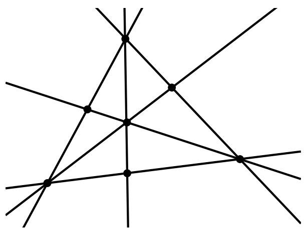
2. Legfeljebb hány egyenest határozhat meg n pont a síkon?

   Mo.:

   A foglalkozáson először konkrét n-ekre (n=5,6,10) oldottuk meg a feladatot. A gyerekek előképzettségüktől függően több megoldási menetet is javasoltak.

   Összefoglalva: $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

3. Hogyan helyezkedik el a síkon 7 pont, ha 9 egyenest határoznak meg?



4. Hány pontot, síkrészt, félegyenest illetve szakaszt határoz meg n darab általános helyzetű egyenes (bármely két egyenesnek van metszéspontja és nincs olyan pont melyen 3 egyenes megy át)?

Mo.:

Először konkrét egyenes számra oldottuk meg a feladtot, az eredményeket táblázatba foglaltuk:

	2	3	4	5
pont	1	3	6	10
félegyenes	4	6	8	10
síkrész	4	7	11	16
szakasz	0	3	8	15

Pontok: több megoldás menettel is dolgoztak a gyerekek. Az egyik amikor észrevették, hogy mindig ugyanannyival nő a pontok száma, ahány egyenes eredetileg volt az ábrán. Ennek oka, hogy az új egyenes minden addigit metsz. Ebből a gondolatmenetből a pontok száma: $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n-1)}{2}$

Másik ötlet, hogy minden egyenesen $n-1$ pont van összesen, tehát $\frac{n(n-1)}{2}$, vagy bármely ponthoz pontosan 2 egyenes kell tehát $\binom{n}{2}$.

Félegyenesek: minden egyes új egyenes behúzásával kettővel nő az egyenesek száma, tehát $4+2+2+\cdots+2 = 2n$. Többen észrevették, hogy minden egyeneshez két félegyenes "vég" tartozik.

Síkrész: a diákok megint a növekmény megállapításával próbálkoztak. Minden új egyenes behúzásával n-nel nő a tartományok száma. Ennek oka, hogy amikor az új egyenes metsz egy régit, akkor a metszéspont előtti tartományt kettéosztja, az utolsó metszésnél, pedig az utánalevő tartományt is. Így a növekmény $n-1+1 = n$. Az összes tartomány száma: $2+2+3+4+\cdots+n = 1+1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}+1$.

Szakaszok: itt is a növekedést követtük végig. A régi egyeneseken minden egyes metszéspontnál keletkezik egy új szakasz, valamint az új egyenesen az $n-1$ db metszéspont $n-2$ szakaszt hoz létre. Összesen $(n-1)+(n-2) = 2n-3$-al nő a szakaszok száma. Összesen tehát: $3+5+7+\cdots+(2n-3) = \frac{2n(n-2)}{2} = n^2-2n = n(n-2)$

Másik megoldás: minden egyenesen $(n-1)$ darab pont van ezek $(n-2)$ darab szakaszt hoznak létre egy egyenesen, összesen: $n\cdot(n-2)$-t.

Összefoglalva:

	2	3	4	5	...	n
pont	1	3	6	10	...	$\frac{n(n-1)}{2}$
félegyenes	4	6	8	10	...	2n
síkrész	4	7	11	16	...	$\frac{n(n+1)}{2}+1$
szakasz	0	3	8	15	...	$n(n-2)$

5. Legfeljebb hány metszéspontja lehet n darab különböző sugarú körnek?

Mo.:

Bármely két kör két pontban metszi egymást. Egy kör $n-1$ másikat metsz, így a metszéspontok száma legfeljebb: $\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2 = n(n-1)$.

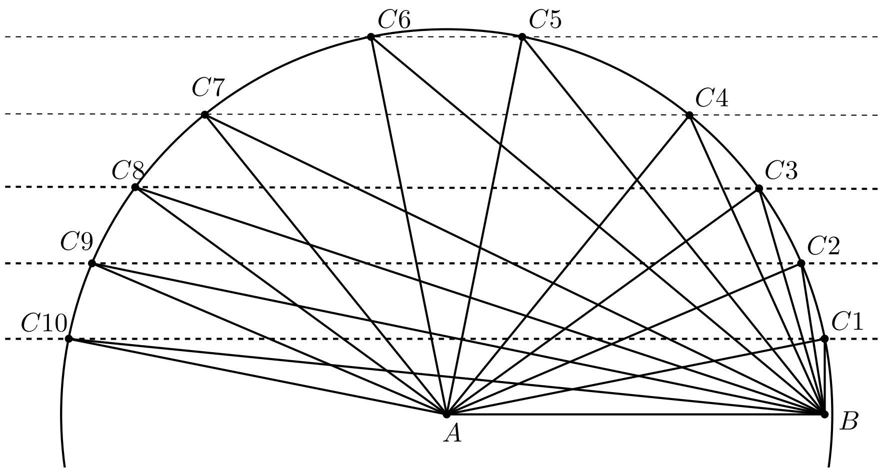
Nemecskó István: Terület átalakítások

A hetedikesek miatt ismétléssel kezdtük a foglalkozást.

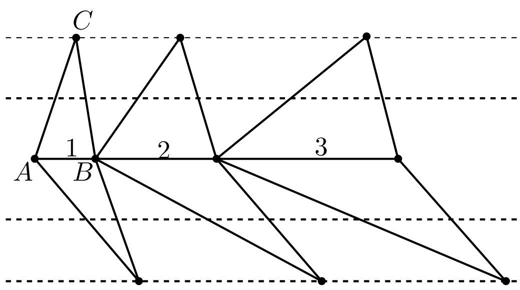
A háromszög $T = \dfrac{a \cdot m_a}{2}$ terület képletet felhasználva rögzítettük, hogy az egyenlő hosszúságú alappal rendelkező háromszögek területének aránya megegyezik az alaphoz tartozó magasságok arányával, illetve, ha a háromszögek magassága álandó, akkor az alapok arányával.

Bevezető feladatok

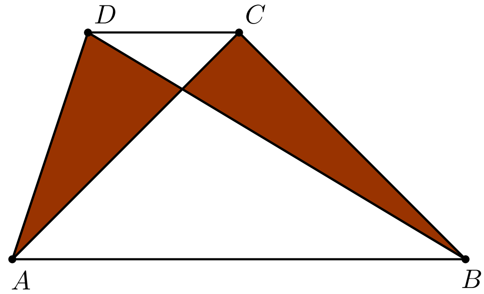
1. Határozzuk meg a következő ábrán látható háromszögek területét, ha $T_{ABC_1} = 1$!



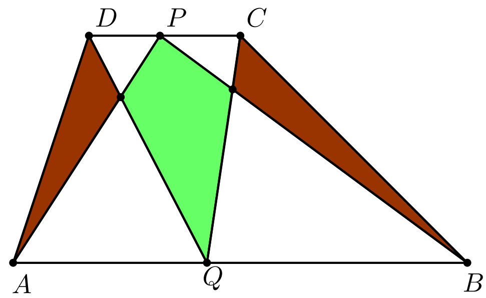
2. Határozzuk meg a következő ábrán látható háromszögek területét!



3. Bizonyítsd be, hogy a satírozott részek területe egyenlő!



4. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalain kijelöljük két tetszőleges pontot (P, Q). Bizonyítsd be, hogy a jelölt négyszög területe megegyezik a satírozott háromszögek területének összegével!

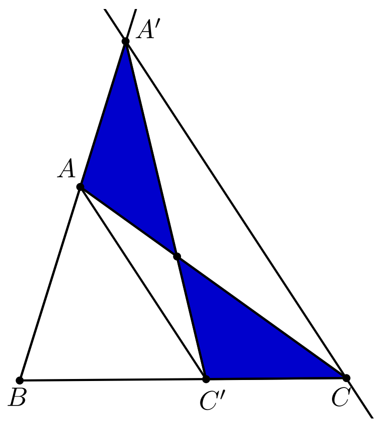


Feladatok

1. Adott a T területű ABC háromszög. Szerkesszünk adott oldalú, T területű háromszöget!

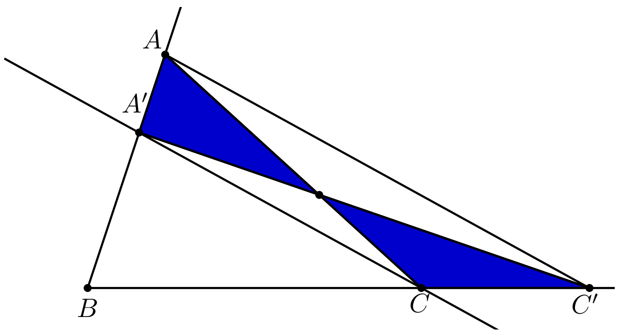
   Mo.:

   Használjuk ki a bevezető feladatok közül a 3. állítását. Mérjük fel a megadott oldalt a háromszög BC oldalára legyen BC'. Kössük össze az A csúcsot a C' ponttal, majd húzzunk ezzel az egyenessel párhuzamost a C csúcson keresztül. A párhuzamos a BA oldalegyenest az A' pontban metszi.



   A satírozott területek egyenlőek, így a kapott $BC'A'$ háromszög területe megegyezik az eredeti háromszög területével és van egy előre megadott oldala.

   Változik-e a szerkesztés, ha az új háromszög adott oldala hosszabb, mint az eredeti háromszög oldalai? nem! Nézzük ekkor az előző szerkesztés menetét!

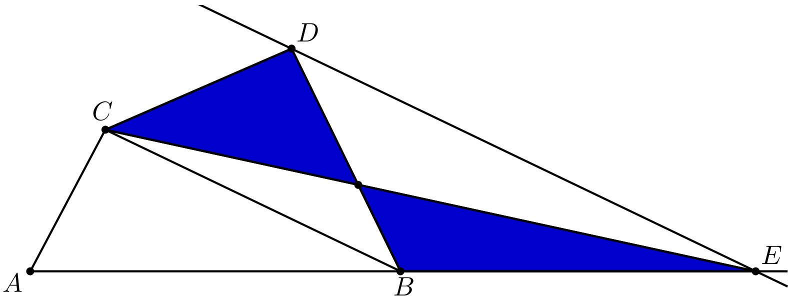


2. Adott a T területű $ABCD$ négyszög. Szerkesszünk adott oldalú, T területű háromszöget!

   Az elző feladat miatt elég ha tudunk egy vele azonos területű háromszöget szerkeszteni.

   Mo.:

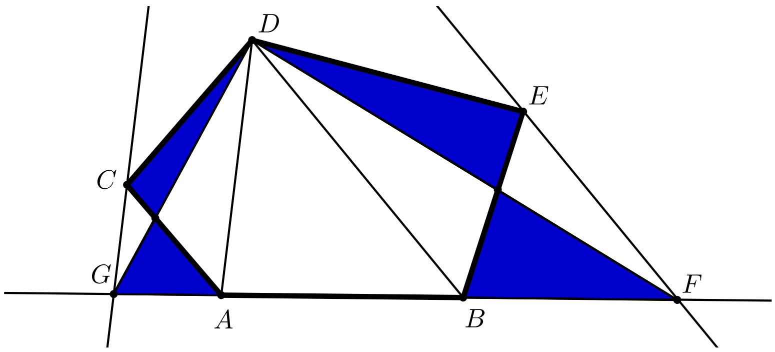
   Húzzuk meg a négyszög egyik átlóját (BD), majd húzzunk párhuzamost a C csúcson keresztül. Ez a párhuzamos metsze az AB oldalegyenesét az E pontba. Mivel a $BECD$ négyszög trapéz, ezért a satírozott területek egyenlőek. Így az $ABCD$ négyszög területével megegyező területű az AEC háromszög.



   Megjegyzés: a foglalkozáson először négyzetre, majd téglalapra is megoldottuk.

3. Adott a T területű $ABCDE$ ötszög. Szerkesszünk egy T területű háromszöget!

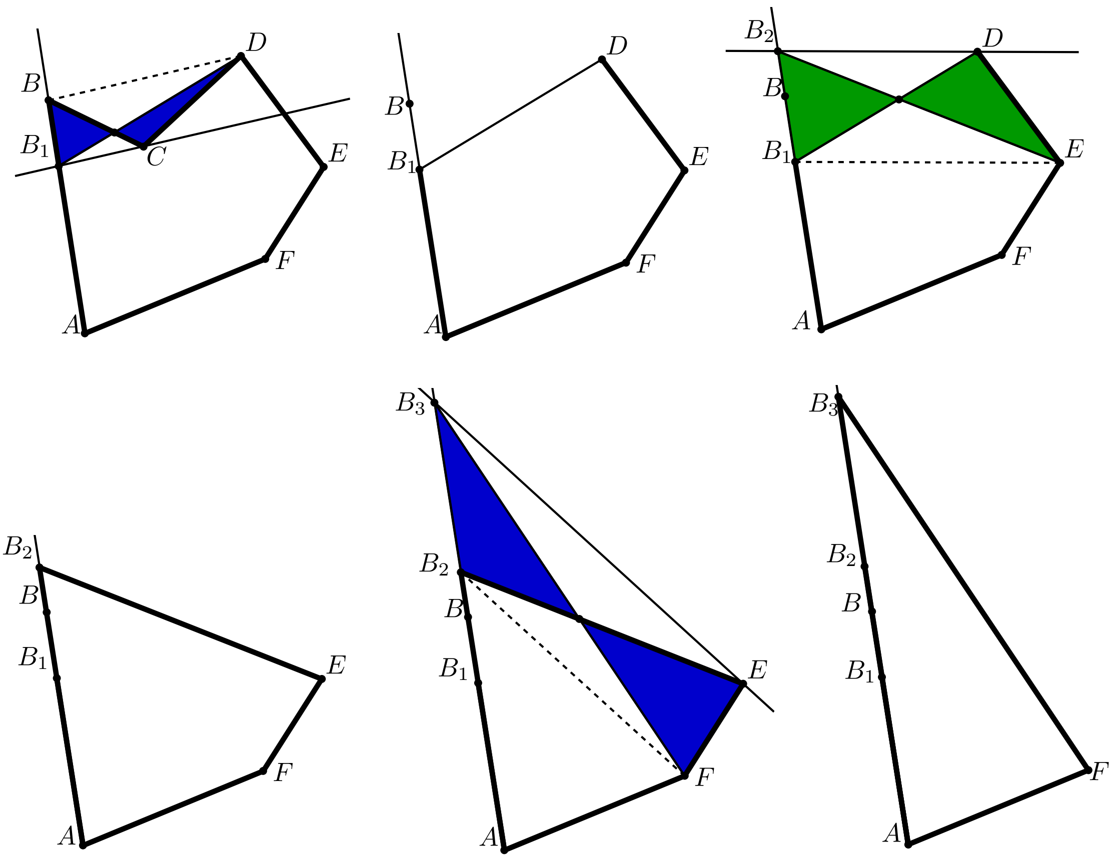
   Mo.:



   Megértve az eljárást, megbeszéltük, hogy a megadott módszerrel tetszőleges sokszöggel tudunk azonos területű háromszöget szerkeszteni.

   Felmerült, hogy működik-e az eljárás, ha a sokszögünk konkáv.

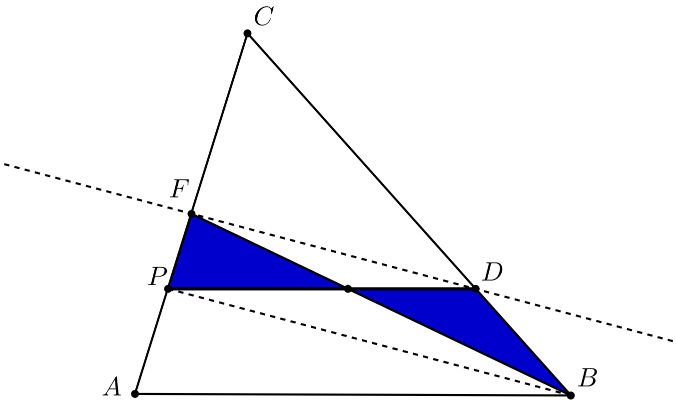
   Mo.:



4. Az ABC háromszög egyik oldalán adott egy P pont. Szerkesszünk a P-n átmenő olyan egyenest, mely felezi a háromszög területét.

   Mo.:

   Tudjuk, hogy a súlyvonal felezi a háromszög területét. Húzzuk be a súlyvonalat és kössük össze a P pontot a szemközti csúccsal. Húzzunk párhuzamost F-en keresztül PB-vel.

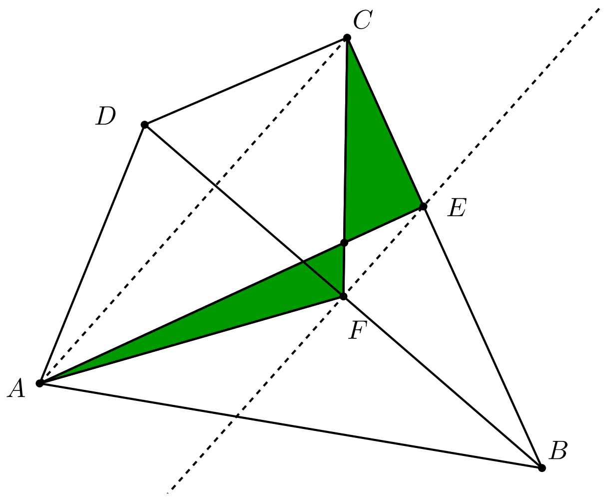


   Így megkapjuk a $PBDF$ trapézt, melynek, ha meghúzzuk a másik PD átlóját, akkor megkapjuk a P-n átmenő területfelező szakaszt.

5. Adott egy tetszőleges konvex $ABCD$ négyszög. Vágjuk ketté A-n átmenő egyenessel két egyenlő területű részre.

   Mo.:

   Húzzuk meg a négyszög BD átlóját. Így két háromszögre bontotuk a négyszöget, melyek területét a súlyvonalai feleznek. Húzzuk meg az AF illetve FC súlyvonalakat. Így az AFC töröttvonal felezi a négyszög területét. Húzzuk be a másik átlót is AC és húzzunk F-en keresztül párhuzamost vele.



Így kialakul az $AFEC$ trapéz, melyben a satírozott területek most is egyenlőek. Tehát az AE szakasz felezi a négyszög területét.

Sztranyák Attila: TIC-TAC-TOE és társai

Sokan ismerik a főleg alsósok körében népszerű mini-amőba, vagy (Amerikában megszokott nevén) TIC-TAC-TOE játékot, így csak röviden a szabályairól: egy 3×3-as négyzet egy-egy mezőjébe felváltva tesz két játékos (a továbbiakban A (első játékos, ő lesz kereszttel) és B (második játékos, ő lesz karikával)) egy-egy keresztet, illetve karikát. Az a játékos nyer, akinek először jön ki egy sorban, egy oszlopban, vagy az egyik főátlóban három egyforma jele. Ha ez egyiknek sem sikerül, akkor döntetlen a játék eredménye.

<u>**Első feladat:**</u> Van-e valakinek nyerő stratégiája a TIC-TAC-TOE játékban?

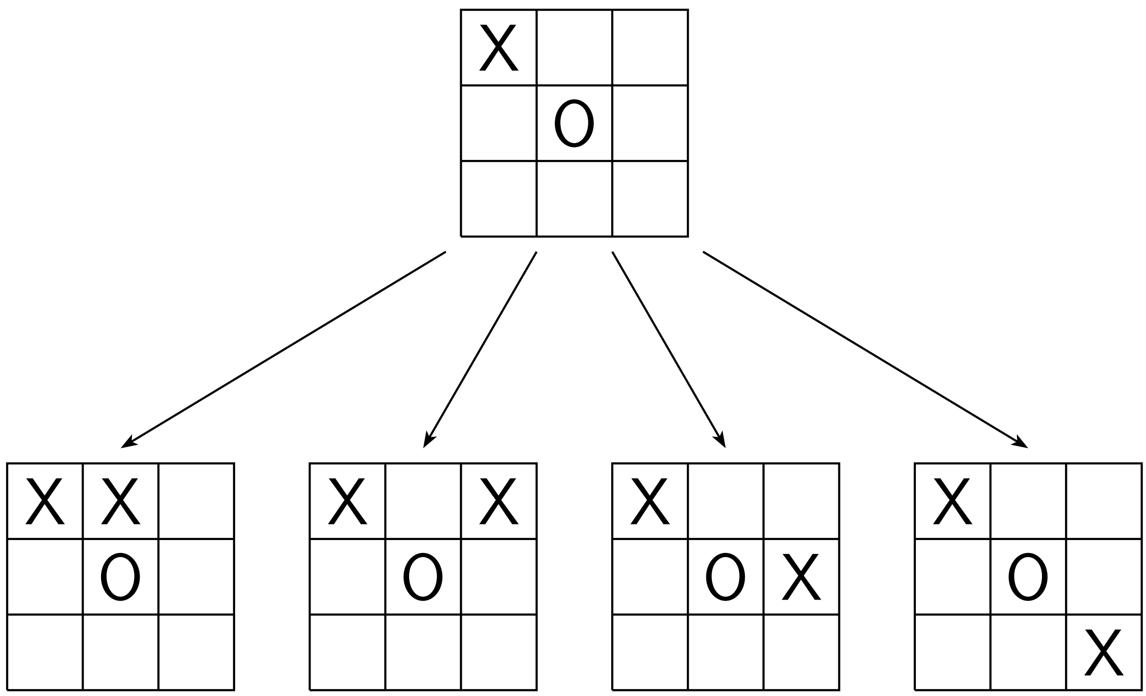
Megoldás: Nyilvánvalónak látszik, hogy ha jól játszik az első nem veszíthet, vagyis a másodiknak nincs nyerő stratégiája. Azt fogjuk belátni, hogy az elsőnek sincs nyerő stratégiája, vagyis mindkét félnek van döntetlen stratégiája.

A feladat kérdését (sajnos) az esetek szétválasztásával tudjuk vizsgálni.

I.) Ha a kezdő sarokba kezd.

(A táblázat szimmetriája miatt mindegy, hogy a kezdő játékos melyik sarokba tesz. Ezt a tényt a továbbiakban is kihasználjuk majd! Legyen az első lépés mondjuk a bal felső sarokba!)

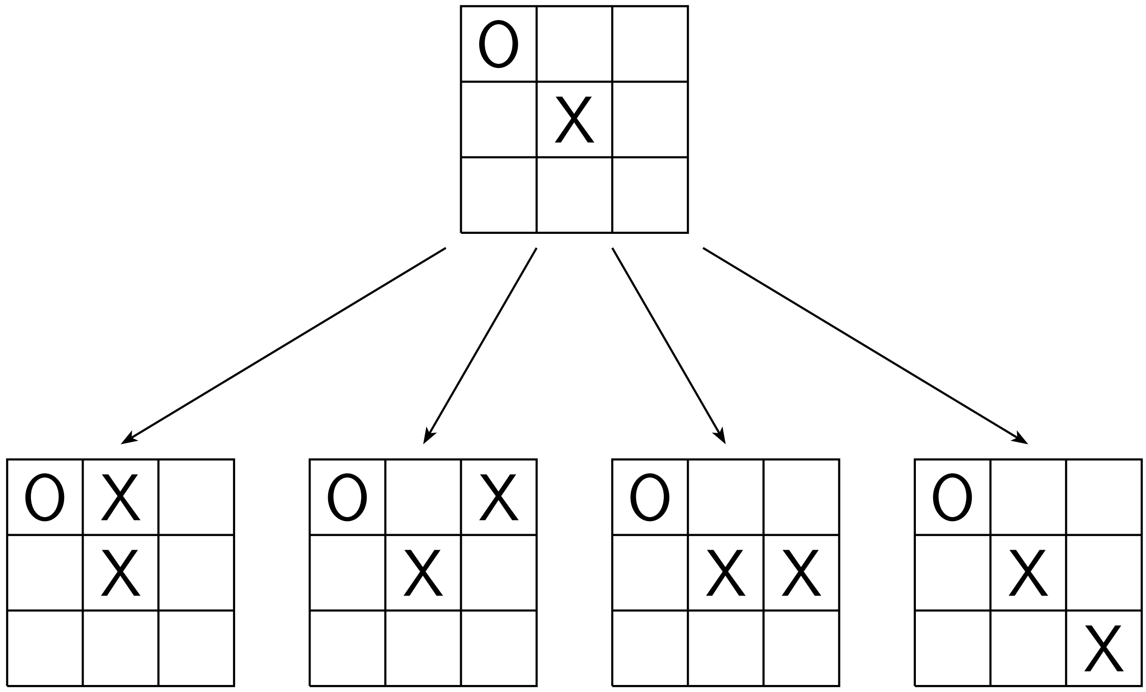
Erre B válaszoljon arra, hogy középre tesz. Erre A-nak (a szimmetria miatt) 4-féle lényegében különböző válasza lehet a következő négy ábra szerint!



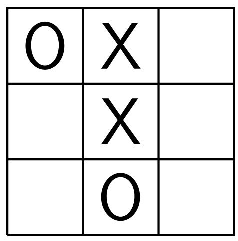
Ezekből az első két eset fonalasan (a továbbiakban azt jelenti, hogy az éppen soron következő fél, hogy elkerülje az azonnali vesztést csak egy helyre tehet!) adja, hogy a végeredmény döntetlen; míg a harmadiknál, ha B a jobb felső sarokba tesz, onnantól fonalasan jön a döntetlen. A negyedik eset érdekesebb (és könnyebben elrontható)! Itt úgy érhető csak el a döntetlen B részére, ha második lépésével nem sarokmezőt foglal el. Ha így játszik, innentől kezdve megint fonalasan kijön a döntetlen. **Vagyis ha a kezdő sarokba kezd, akkor B tud döntetlent tartani.**

II.) Ha a kezdő a középső mezőt foglalja el.

Erre B válaszoljon valamely sarokmező (pl. a bal fölső) elfoglalásával! Erre A-nak megint 4-féle lényegében különböző válasza lehet a következő négy ábra szerint!

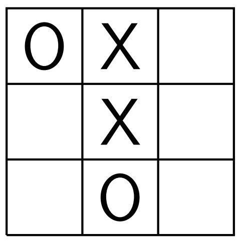


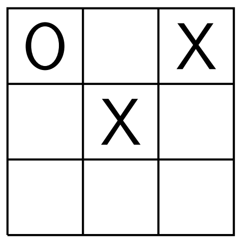
Most a második és a harmadik eset fonalasan adja a döntetlent. A negyedik esetben, ha B valamelyik sarokba tesz, onnantól fonalasan kijön a döntetlen. Az első eset tűnik a ,,legbonyolultabbnak", ott ugyanis B második lépése után (lásd oldalsó ábra!) A-nak sok lépése (5 különböző) van. Ezek közül négy olyan, hogy ,,kényszerítő jellegű" (,ha nem a tábla jobb alsó sarkot foglalja el A), B csak egy helyre teheti jelét, ha nem akar kikapni, de a négy kényszerítő lépés közül innen három fonalasan döntetlenre vezet, egyet pedig B nyer (,ha A a jobb felső mezőt foglalja el)! Ha A nem kényszerítő módon a jobb alsó mezőt foglalja el, akkor B tegyen mondjuk a bal alsó sarokba és innen újra fonalasan döntetlen a vége. **Vagyis ha a kezdő középre kezd, akkor B tud döntetlent tartani.**



III.) Ha a kezdő nem a középső mezőt, és nem is sarokmezőt foglal el.

Ekkor, ha B középre tesz, akkor A lehetséges négy lényegében különböző lépése közül kettőt már tárgyaltunk korábban (lépéscserével I. eset 1-es, vagy 3-as alesetei!), nézzük a maradék kettő esetet, vagyis azokat, amikor A második lépésére (igen passzívan) sem tesz sarokmezőbe (lásd ábra!). Ezek közül az első esetben B fonalasan nyer, ha valamelyik sarokmezőbe rak, míg a második esetben a jobb felső mezőt elfoglalva B fonalasan döntetlent tud tartani. **Vagyis ha a kezdő nem a középső mezőt, és nem is sarokmezőt foglal el első lépésére, akkor is tud B döntetlent tartani.**





Összegezve: Mindkét félnek van a TIC-TAC-TOE játéknál döntetlen stratégiája.

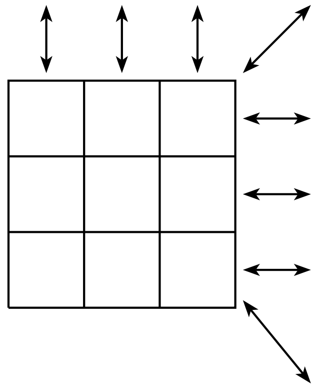
2.feladat: Hányféleképpen írható fel a 15 három különböző 1 és 9 közötti pozitív egész összegeként?

Megoldás: Nyolcféle ilyen összeg létezik:

$$1+5+9,\ 1+6+8,\ 2+4+9,\ 2+5+8,\ 2+6+7,\ 3+4+8,\ 3+5+7,\ 4+5+6$$

3.feladat: Csinálj 3×3-as bűvös négyzetet, úgy, hogy a felhasznált kilenc különböző szám 1 és 9 között legyen! Hányféle különböző bűvös négyzet csinálható ezekkel a számokkal?

Megoldás: Tekintsük a következő ábrát! (Itt jobb oldalon.)



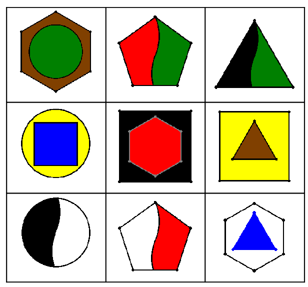
Amint látszik a bűvös négyzetben összesen 8 irány (3 vízszintes, 3 függőleges, és 2 átlós) esetén kell a megfelelő 3-3 szám összegének azonosnak lennie. Mivel a bűvös négyzetbe írt kilenc szám összege 45, emiatt minden sorban 45/3=15 a számok összege, és így az átlóknál és az oszlopoknál is! Éppen ennyiféleképpen bontottuk az imént fel a 15-t három szám összegére! Ha a fenti 8 felbontást egy kicsit jobban megvizsgáljuk látható, hogy az 5-ös 4 összegben szerepel, a többi páratlan szám 2-2 összegben, míg a párosok 3-3 összegben. Emiatt az 5-ös szám csak középre kerülhet, a páros számok a sarkokba, a többi páratlan pedig a maradék helyre, mivel a a középső mezőn 4 irány, a sarokmezőkön 3-3 irány „halad át”, a többi mezőn pedig 2-2. Ezzel igazából készen is vagyunk. Az 5-ös középre kerül, a 8-as az egyik sarokba; a 2-es a vele átellenes sarokba, a 6-os pedig egy még szabad sarokba. Ha ezt a négy számot leraktuk a többi mezőbe egyértelmű már, hogy mi kerül, amiatt, hogy minden hármas összege 15. (Megj. A fentiek alapján szépen kijön (egy kis kombinatorikával), hogy 8-féle módon tölthető ki a fenti 3×3-as bűvös négyzet. Érdemes erre rákérdezni, mert jó eséllyel rátalálnak/ráéreznek a gyerekek a négyzet szimmetriacsoportjára!)

4.feladat: **„15-ös játék”** Minden számot 1-9-ig felírunk a táblára. A és B felváltva választ egy-egy számot. Az nyer, akinek először lesz három olyan különböző száma, hogy azok összege 15.

Kérdés: Ki nyer? Hogyan játszunk?

Megoldás: Vegyünk egyet a fent megkapott 8 bűvös négyzet közül. A 15-ös játék ekvivalens az ezen a bűvös négyzeten játszott TIC-TAC-TOE-val, vagyis, ha jól játszik B, döntetlent tud elérni. A 15-ös játékban is van mindkét félnek döntetlen stratégiája.

5.feladat: **„Sokszögek, körök és színek”** Az ábrán látható kilenc alakzattal játszunk. A és B felváltva választ egy-egy kártyát. Az nyer, akinek először lesz három olyan kártyája, amin ugyanaz a szín, vagy ugyanaz a síkidom szerepel.



Kérdés: Ki nyer? Hogyan játszunk?

Megoldás: Ha a kilenc kártyát a fenti módon elrendezzük egy 3×3-as táblázatba, akkor azt vehetjük észre, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban is három-három olyan kártya található, amelyeknek egy közös jellemzőjük (szín, vagy síkidom) van, és ezeken a kártyákon kívül nincs más kártya, amelyik az adott színt, vagy formát tartalmazza. (Pl.: Az első oszlopban azok a kártyák vannak, amelyekben van kör, az egyik átló mentén a fekete színű, a másik mentén a hatszöget tartalmazó kártyák vannak!)

Van néhány olyan jellemző, amelyekhez csak 2-2 kártya található. Ilyenek: a barna, sárga és kék szín, illetve az ötszög!

Ezek szerint a kilenc kártyával játszott játék ekvivalens a TIC-TAC-TOE játékkal, vagyis ha B az ott alkalmazott stratégiát követi, ebben a játékban sem fog veszíteni.

Vagyis ebben játékban is mindkét félnek döntetlen stratégiája van.

(Megj.: A gyerekek a kártyákat szétvágva kapták meg. Így rájönni arra, hogy itt megint ugyanarról a játékról van szó jóval nehezebb és jóval érdekesebb; főleg a több lényegtelen jellemző miatt!)

9. évfolyam előadása: Háromszögekre darabolás

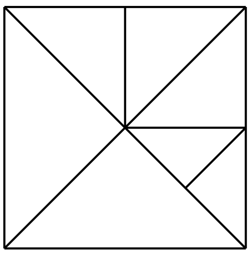
Ebben a cikkben különféle problémákat fogunk megvitatni olyan sokszögekről, amelyeket háromszögekre darabolunk. Például egy négyzetet sokféle módon lehet háromszögekre vágni (lásd 1-4. ábra).

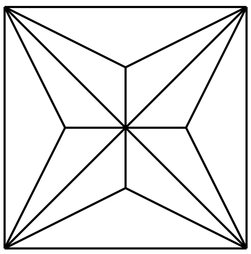
Vizsgáljuk meg figyelmesen ezeket az ábrákat! Az első és negyedik ábrán a háromszögek derékszögűek, a második ábrán pedig mindegyik tompaszögű. A kérdés lehet a következő: fel tudunk-e szeletelni egy négyzetet olyan háromszögekre, amelyek mindegyike hegyesszögű?

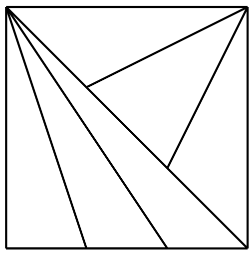
Továbbá, mindegyik ábrán van legalább két háromszög egy közös oldallal (a 4. ábrán minden háromszögnek van olyan szomszédja, amelyikkel nincs közös oldaluk). Mindig ez az eset áll fenn?

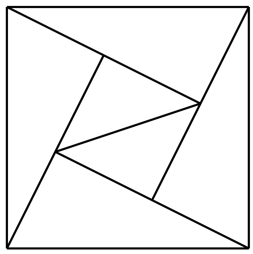
A 2. és 3. ábrán mindegyik háromszög ugyanakkora területű és páros számú van belőlük. Kérdés fel lehet-e vágni egy négyzetet páratlan számú, egyenlő területű háromszögre?

Általánosabban vizsgálva, érdekes lesz kitalálni, hogy egy sokszöget bizonyos feltételek mellett fel tudunk-e darabolni háromszögekre. Ezek a feltételek előírhatják a háromszögek szögeit, számukat, elrendezésüket, stb.


1. ábra


2. ábra

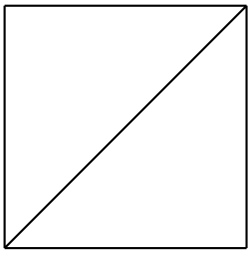

3. ábra

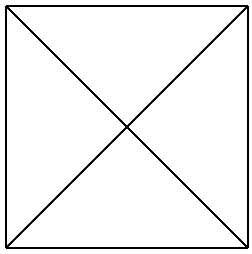

4. ábra

Hegyesszögű háromszögek

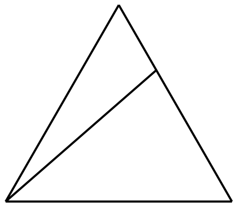
1. Probléma: Lehetséges-e egy négyzetet kizárólag hegyesszögű háromszögekre darabolni?

Természetes azzal kezdeni ennek a problémának a megoldását, hogy megpróbálunk az elvárt módon feldarabolni egy négyzetet. A kezdés lehet az, hogy felvágjuk a négyzetet egy (5. ábra) vagy két (6. ábra) átlója mentén.

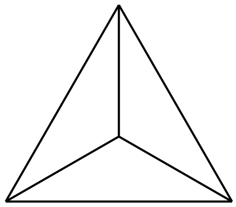

5. ábra


6. ábra

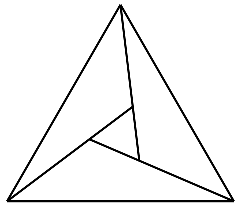
Mindkét esetben leegyszerűsítjük a problémát arra, hogy hogyan vágjunk fel egy derékszögű háromszöget hegyesszögűekre. Hogyan tudunk szétvágni egy háromszöget több másik háromszögre? Három egyszerű lehetőség van erre (7-9. ábra).



7. ábra



8. ábra



9. ábra

Mindhárom ábrán legalább egy, vagy több eredményül kapott háromszög tompaszögű! Ha most megkérjük az olvasót, hogy próbáljon feldarabolni néhány háromszöget – valószínűleg azzal a feltételezéssel fogja abbahagyni, hogy a válasz a kérdésünkre nem. Ez a helyzet ismerős! Vagy folytatjuk a próbálgatást, hogy megtaláljuk a várt eredményt, vagy kereshetünk egy bizonyítást arra, hogy ilyen felosztás nem létezik. El lehet gondolkodni a problémán; a válasz egy kicsit később meg is lesz, előtte azonban egy másik problémát nézünk meg.

Tiszta határú háromszögek

Az összes fenti ábrán van olyan háromszög, melynek oldalai nem tartalmaznak semelyik más háromszögből csúcspontot. Az ilyen háromszöget nevezzük ,,tiszta határú háromszögnek”!

2. probléma: Lehetséges-e egy konvex n-szöget úgy háromszögekre bontani, hogy semelyik háromszögnek ne legyen tiszta határa?

Azt fogjuk bizonyítani, hogy ilyen felbontás nem létezik. Indirekt tegyük fel, hogy létezik ilyen felbontás. Legyen T a felbontás során keletkezett háromszögek száma, és V_{int} a ,,belső” csúcspontok, vagyis a háromszögek élein fekvő csúcspontok száma. Világos, hogy $V_{int} \geq T$, mert a feltevésünk alapján minden háromszögnek legalább egy belső csúcspontot kiosztunk, és egy csúcspont nem lehet egyszerre két háromszögnél belső csúcspont.

Azt is tudjuk, hogy az összes háromszög szögeinek az összege: $T \cdot 180°$. A belső csúcspontokra illeszkedő szögek összege: $V_{int} \cdot 180°$, a poligon csúcspontjainál lévő szögek összege (amik egyúttal a háromszögekre való felbontásnál is szerepelnek) pedig: $(n-2) \cdot 180°$.

Tehát $T \cdot 180° \geq (n-2) \cdot 180° + V_{int} \cdot 180° > V_{int} \cdot 180°$ (mivel az $n > 3$ esetet vizsgáljuk).

Innen (180-cal osztva) $T > V_{int}$ adódik, ellentétben a $V_{int} \geq T$ feltétellel.

Ezzel igazoltuk az első tételünket:

1.Tétel: Ha egy konvex n-szöget fel van darabolva háromszögekre, akkor mindig van a felbontás során legalább egy olyan háromszög, amelynek tiszta a határa.

1. feladat: Igaz-e ez a tétel nem konvex polygonokra?

Közös oldalak nélkül

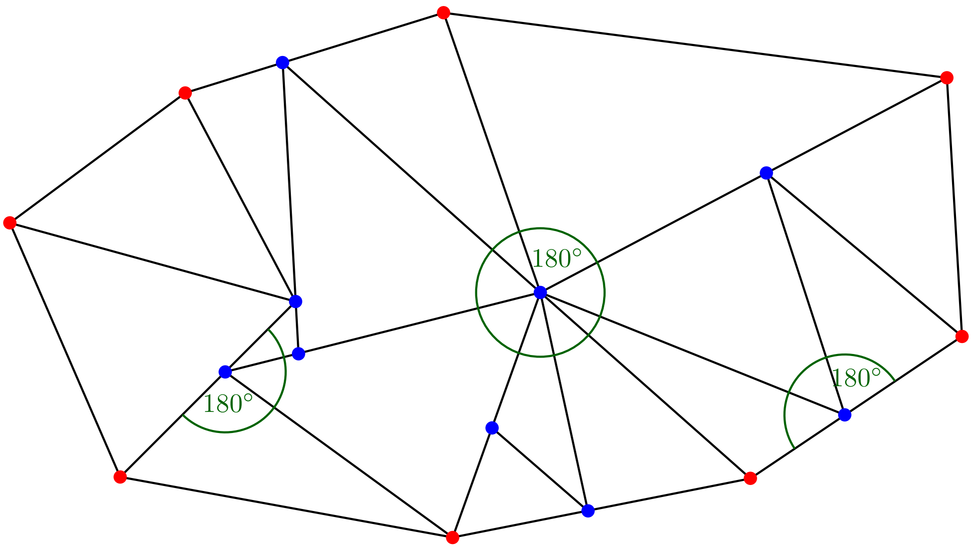
3. probléma: Lehetséges-e úgy háromszögekre feldarabolni egy n-szöget, hogy semelyik két háromszögnek ne legyen közös oldala?

Kezdjük a legegyszerűbb esettel, azzal ahol $n = 3$. A 9. ábrán látszik hogy van ilyen felbontás. Most próbáljunk hasonló módon feldarabolni egy négyzetet! Az elsőtől a negyedik ábráig minden négyzet tartalmaz két olyan háromszöget amelynek van közös oldala. Megint el kell döntenünk, hogy megpróbáljuk bebizonyítani hogy nem létezik ilyen felbontás, vagy megpróbálunk keresni megfelelő eredményt.

Ki fog derülni, hogy nincs ilyen felbontás – tehát akárhogy is darabolunk fel egy konvex n-szöget háromszögekre, $(n \geq 4)$, mindig van közöttük legalább két olyan háromszög amelyeknek van közös oldala. A bizonyítás nem egyszerű, ezért előtte nézzünk egy fontos segédtételt!

A $V \leq T + 2$ egyenlőtlenség:

2. Tétel: Ha egy konvex n-szöget T darab háromszögre bontottunk, és V az összes háromszög csúcspontjainak a száma, akkor $V \leq T + 2$.



10. ábra

Bizonyítás: Az összes háromszög szögeinek az összege: $T \cdot 180°$. Máshogy is kiszámolhatjuk ezt az összeget. Osszuk a csúcspontokat két csoportra. Az első csoportban az adott n-szög csúcspontjai lesznek. (Ezek pirosak a 10. ábrán.) Az összes többi csúcspont a második csoportba tartozik (ezeket kékre színeztük a 10. ábrán). Világos hogy a piros csúcspontú szögek összege egyenlő az n-szög szögeinek az összegével, tehát a piros szögek összege: $(n-2) \cdot 180°$.

Tekintsünk egy tetszőleges kék csúcspontot. Látszik hogy a rá illeszkedő szögek összege vagy 180 fok, vagy 360 fok (lásd a 10. ábrát); de semmiképpen sem kevesebb mint 180 fok. Mivel $V - n$ darab kék csúcspont van, a kék szögek összege $\geq (V-n) \cdot 180°$. Tehát $\underline{T \cdot 180°}$ = az összes háromszög szögeinek az összege = a piros szögek összege + a kék szögek összege $\geq (n-2) \cdot 180° + (V-n) \cdot 180° = \underline{(V-2) \cdot 180°}$.

Innen (180-cal osztva, majd mindkét oldalhoz 2-t adva) a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk: $V \leq T + 2$.

Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk!

Tételezzük fel hogy felvágtunk egy konvex n-szöget háromszögekre, úgy hogy nincs olyan két háromszög aminek lenne közös oldala.

Számoljuk meg azon szakaszokat, melyek háromszögoldalak. Ezeket a szakaszokat oldalaknak fogjuk hívni és számukat S-sel jelöljük. Az biztos hogy

$$S = 3T$$

mivel minden háromszögnek három oldala van és semelyik oldal nem esik egybe egy másik háromszög oldalával.

Két részre osztjuk a csúcspontok és az oldalak halmazát is:

I.: Határpontok és határvonalak – ezek azok amelyek rajta fekszenek az n-szög oldalain vagy maguk is az n-szög oldalai. A határon fekvő csúcspontok számát V_b-vel, a határon fekvő oldalak számát (az n-szög oldalait) S_b-vel fogjuk jelölni.

II.: Belső pontok és oldalak – azok amelyek nem fekszenek az n-szög oldalain. Számukat V_{in}-nel és S_{in}-nel fogjuk jelölni.

Egyértelmű hogy:

$$V = V_b + V_{in},$$

és

$$S = S_b + S_{in}.$$

Most kapcsolatot keresünk a határon fekvő pontok és az n-szög oldalai közt. Ezt egy ,,körbeutazással" csináljuk, körülmegyünk a n-szög oldalain. Az út közben e csúcsok és az oldalak váltakoznak ami azt jelenti, hogy mind a kettőből ugyanannyi van.

$$S_b = V_b$$

Van kapcsolat a belső oldalak illetve pontok száma között is, ez már egy kicsit bonyolultabb.

$$3 \cdot V_{in} \geq S_{in}$$

Hogy bebizonyítsuk ezt az egyenlőtlenséget kihasználjuk azokat a belső pontokat amelyek rajta vannak egy belső oldalon és nem csak csúcsok. Ezeket belső-oldalpontoknak fogjuk nevezni és számukat V_{int}-tel fogjuk jelölni.

Egyértelmű hogy:

$$V_{in} \geq V_{int}$$

Ennek következtében a $3 \cdot V_{in} \geq S_{in}$ egyenlőtlenség bebizonyításához elegendő az ha belátjuk azt, hogy $3 \cdot V_{int} \geq S_{in}$. Ez be lesz bizonyítva ha képesek leszünk minden belső ponthoz hozzá rendelni három belső oldalt, oly módon hogy minden pont megfelel legalább egy oldalnak.

Meg kell bizonyosodnunk arról, hogy minden belső oldal hozzárendelhető legalább egy belső csúcshoz. Ez nyilvánvalóan igaz a csúcsot tartalmazó oldalakra.

Amennyiben pedig egy belső oldal nem tartalmaz csúcsokat, biztosan része egy másik háromszög oldalának. Ezért legalább egy csúcsa oldalbontó csúcs, és ehhez a csúcshoz rendelhetjük hozzá a szóban forgó oldalt.

Ezért $3V_{int} \geq S_{in}$, és ebből következik, hogy $3V_{in} \geq S_{in}$. Ekkor $3T = S = S_{in} + S_b \leq 3V_{in} + V_b = 3(V_{in} + V_b) - 2V_b = 3V - 2V_b \leq 3V - 2n$.

Ebből megkapjuk a $V \geq T + \frac{2}{3}n$ egyenlőtlenséget.

Mivel $n \geq 4$, ide jutottunk: $V \geq T + 8/3 > T + 2$, amely ellentmond a korábban belátott segédtételnek.

Így a következőt bizonyítottuk:

3. tétel: Ha egy n-szöget ($n \geq 4$) háromszögekre osztunk fel, legalább két háromszögének van közös oldala.

Az alábbi feladatokra nem térünk ki előadásunkban, de álljanak itt az érdeklődőknek.

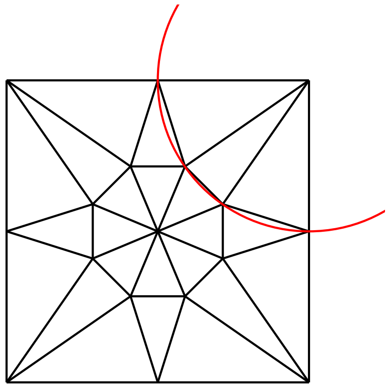
2.feladat: Osszunk fel egy háromszöget T darab háromszögre úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös oldala! Jelölje V a felbontásban szereplő összes háromszögcsúcs számát! Bizonyítsuk, hogy $V = T + 2$.

3.feladat: Bontsunk egy n-szöget ($n \geq 4$) háromszögekre! Bizonyítsuk, hogy legalább $n - 3$ olyan szakasz van, mely közös oldala két háromszögnek!

4.feladat: A kettes és a hármas tétel felteszi, hogy a sokszög konvex. Teljesülnek ezek a tételek konkáv sokszögekre is?

Vissza a hegyesszögű háromszögekhez

Két probléma maradt a cikk elejéről. Korábban úgy tűnt, hogy nem fogjuk tudni csupa hegyesszögű háromszögre darabolni a négyzetünket. Habár nem tudtuk megcsinálni az első próbálkozásra, de a felosztás megvalósítható, ahogy látható az a 12. ábrán is!



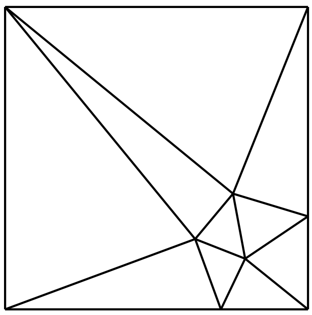
12. ábra

(A kört csak azért rajzoltuk fel, hogy megmutassuk, hogy úgy is választhatók a háromszögoldalak, hogy minden háromszög -amellett, hogy hegyesszögű- egyenlőszárú is legyen!)

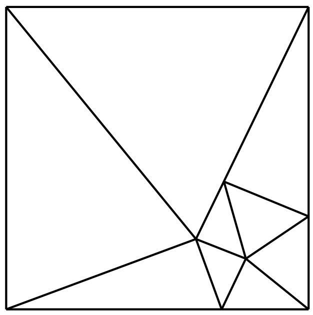
Feladatok

5.feladat: A 12. ábrán 24 háromszög látható. Meg lehet-e valósítani ugyanezt kevesebb háromszöggel?

A következő oldalon megmutatunk két felbontást. Az egyiket 10-ből (szimmetrikusan), a másikat 9-ből. Kérdés (erre nem tudtunk válaszolni), hogy 8-ból meg lehet-e csinálni a felbontást?!



13./a ábra



13./b ábra

6.feladat: Igazoljuk, hogy minden konvex sokszöget szét lehet vágni hegyesszögű háromszögekké.

Háromszögek egyenlő területtel

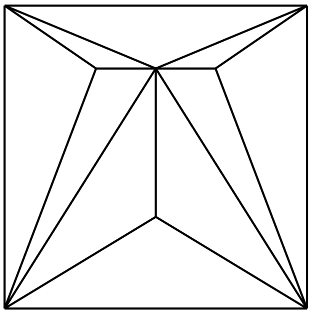
4.probléma: Lehetséges-e, hogy szét tudunk darabolni egy négyzetet páratlan számú egyenlő területű háromszögre?

E probléma hasonlít a fenti problémákhoz. Ugyanakkor sokkal nehezebb a választ megkapni rá. A válasz nem. A szerző nem tudta megmutatni ezt a tényt elemi módszerek segítségével. Egy bonyolult megoldás a 1999-es Július/Augusztusi Kvantum „2-adic Numbers” című cikkében megtalálható, előadásunk idő (és ismeret) hiányában erre nem tud kitérni.

Változatos problémák háromszögdarabolásokra

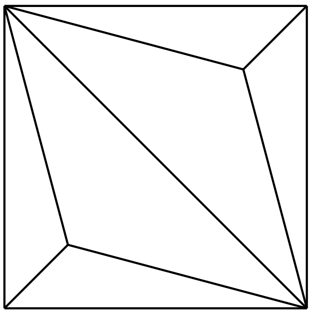
Érintettünk néhány problémát, ami a sokszögek háromszögekké való darabolásával foglalkozott. Számos egyéb érdekes problémát fel lehet vetni, és ezek mindegyike lehet a tárgya egy hasonló kis cikknek. Néhány érdekes probléma teljesség igénye nélkül:

5. probléma: A 2. ábrán a négyzet 12 db tompaszögű háromszögre van vágva, a 14. ábrán pedig 10 db-ra. Mennyi az a minimális számú tompaszögű háromszög amennyire szétbontható egy négyzet?

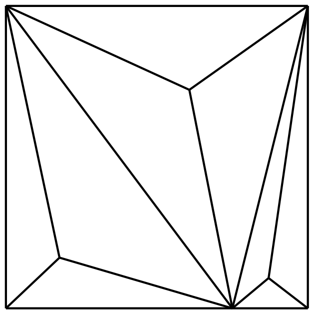


14.ábra

És akkor a mi próbálkozásunk, amivel megmutatjuk, hogy hatból meg lehet csinálni, egyúttal olyan felbontásra is példát adunk, ahol minden háromszögnek van egy adott nagyságú (itt 120 fokos) szöge:



15./a ábra



15./b ábra

Az ábráknál azt a tényt használtuk ki, hogy hegyesszögű és derékszögű háromszögek esetén az oldalak fölé emelt 120 fokos szöghöz tartozó látószögkörívek egy ponton mennek át, és ezen pontból bármely háromszögoldal 120 fokos szög alatt látszódik. (A második ábrát azért rajzoltuk meg, hogy megmutassuk, hogy négyzet felbontható úgy is 120 fokos háromszögekre, hogy a háromszögek nem egybevágók!)

6. probléma:. Egy négyzetet szét lehet-e vágni háromszögekké, úgy, hogy nincs a felbontás során két egybevágó (egyforma) háromszög, de mindegyik háromszög

I. derékszögű háromszög,

II. egyenlő szárú háromszög,

III. egyenlő szárú, derékszögű háromszög,

IV. hasonló háromszög,

V. egyenlő a kerületük,

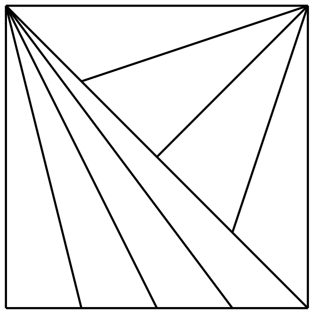
VI. azonos területű?

Megoldások:

6. probléma/ VI: Egyenlő területű , de nem egybevágó háromszögekre bontás.

Felhasznált tétel: A háromszöget egy súlyvonala két egyenlő területű háromszögre bontja.

Ha felveszünk egy négyzetet és behúzzuk az egyik átlóját, akkor 2 db egyenlő területű, de egybevágó háromszöget kapunk. Az egyik háromszög egyik oldalát (ne az átfogót) felezzük meg, és húzzuk be az ehhez tartozó súlyvonalat. Újabb 2 db egyenlő területű háromszöget kaptunk. Most ennek a 2 háromszögnek (a már felezett oldalon) felezzük meg Az oldalait és húzzuk be az ehhez tartozó súlyvonalakat. 4 db egyenlő területű, nem egybevágó háromszöget kaptunk. Most foglalkozzunk a másik derékszögű háromszöggel: felezzük meg az egyik oldalát (az eredeti négyzet egyik oldala legyen) és húzzuk be a hozzá tartozó súlyvonalat: 2 db egyenlő területű háromszöget kaptunk. Felezzük meg a közös oldalt és húzzuk be az ehhez tartozó 2 db súlyvonalat. Eredményül 8 db egyenlő területű, de nem egybevágó háromszöget kapunk. (16.ábra)



16. ábra

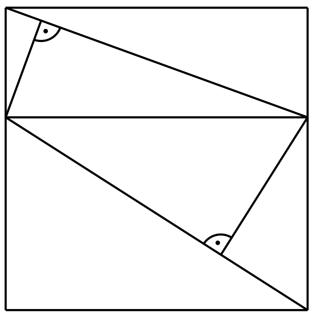
6. probléma/ I: Derékszögű, de nem egybevágó háromszögekre:

Vegyünk fel egy négyzetet és húzzunk be egy olyan szakaszt benne , ami párhuzamos valamelyik négyzetoldallal , de nem felezi a másik 2 oldalt. Húzzunk be mindkét téglalapban egy-egy átlót, de úgy, hogy ne legyen közös pontjuk (ne induljanak ki közös csúcsból).

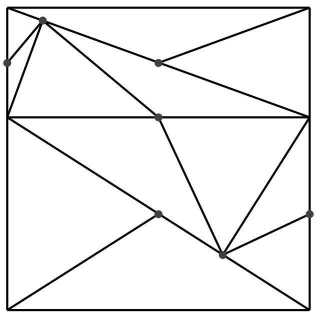
Ha ez kész, akkor húzzunk be 2 db külön-külön téglalapban található derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságát. Eredményként kapunk 6 db nem egybevágó, derékszögű háromszöget. (17. ábra)

6. probléma/ II: Egyenlőszárú, de nem egybevágó háromszögekre bontás.

Az előző ábránkból (17-es) kiindulva, azt kihasználva, hogy derékszögű háromszöget az átfogóhoz tartozó súlyvonala két egyenlőszárú háromszögre bontja, és ez a két egyenlőszárú háromszög nem egybevágó, hacsak nem egyenlőszárú derékszögű háromszöget vágtunk ketté: egyszerűen adódik ilyen felbontás! (18. ábra)



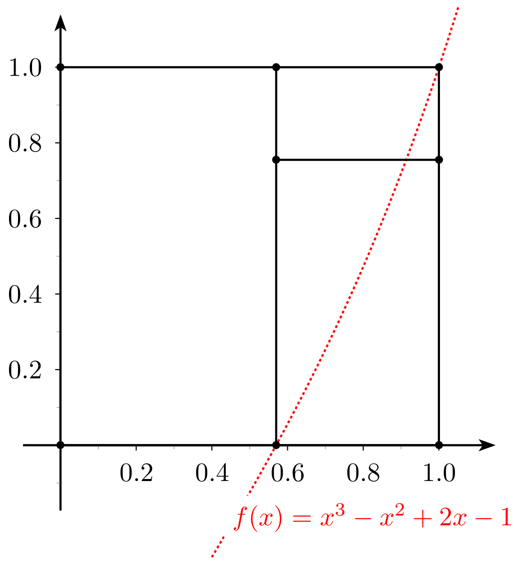
17.ábra



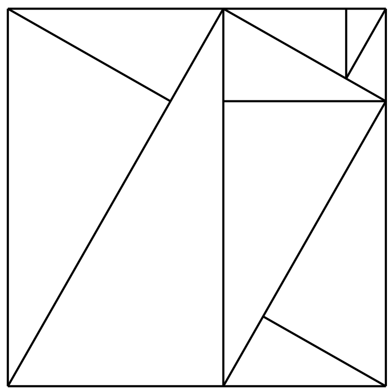
18.ábra

6. probléma/ IV: Hasonló, de nem egybevágó háromszögekre bontás.

Először megpróbáljuk felbontani a négyzetünket három darab hasonló, de nem egybevágó téglalapra. Ez meg is tehető a 18./a ábrán látható módon! Ahhoz, hogy ezt igazoljuk a ,,bal oldali" legnagyobb téglalap oldalait 1-gyel és x-szel jelölve, az aránypárokat végig számolva (minden téglalap oldalainak aránya: $x/1 = x$) az $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek valós megoldása 0 és 1 közé esik, (ha az $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ jelölést bevezetjük $f(0) = -1$ és $f(1) = 1$ miatt ez látható) körülbelül $0,56984$. Innentől a 18.b ábra alapján a megfelelő egymáshoz hasonló derékszögű háromszögeket még tovább bontva az átfogóhoz tartozó magasságokkal a megfelelő felbontást kapjuk.



18./a ábra



18./b ábra

7.probléma: Szét lehet-e vágni egy négyzetet

I. ,,nagyon tompaszögű” háromszögekké, azaz szét lehet-e vágni egy négyzetet úgy, hogy mindegyiknek az egyik szöge nagyobb, mint 120° ? (A pontosan 120-as esetet fent már láttuk!) Vagy akár nagyobb, mint 179° ?

II. ,,közel egyenlő” háromszögekké, például amiknek minden szöge kisebb, mint 65° ?

III. Olyan háromszögekké, amiknek minden szöge adott (pl. 30° , 60° , 90°)

IV. A négyzetet szét tudjuk-e bontani olyan háromszögekké, amelyeknek minden szöge adott ,,alfa” értéktől kisebb Találjuk meg az összes ilyen alfát.

Megoldások:

7. probléma/ II: Fel lehet-e bontani egy négyzetet ,,közel egyenlő” háromszögekre úgy hogy a háromszögek szögei ne legyenek nagyobbak mint 65 fok?

Válasz : Nem

Bizonyítás:Vegyünk egy háromszöget aminek minden szöge kisebb mint 65 fok. Ha van két 65 fokos szög akkor a harmadik, a legkisebb 50 fokos. Tehát a szögek mérete 65-50 fok között mozog. Ha vesszük a két legkisebb szöget és összeadjuk őket akkor az összeg nagyobb lesz mint 90. Emiatt nem lehet feldarabolni a négyzet egy 90 fokos szögét két kisebbre. (mert 50+50 az 100 és az több mint 90)

8. probléma: Szét lehet-e vágni egy négyzetet háromszögekké úgy, hogy minden háromszögnek pontosan

I.) két szomszédja,

II.) három szomszédja,

III:) n darab szomszédja legyen (,ahol n egy adott szám)?

Azt, hogy mit tekintünk szomszédos háromszögeknek két különböző módon is megfogalmazhatjuk:két háromszög szomszédos, ha

1.)van legalább egy közös pontjuk, vagy

2.)van egy közös oldaluk

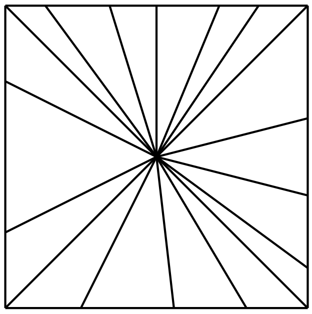
Mindkét esetben más-más válasz adható. (Az első eset jóval könnyebb!)

Megoldások:

8. probléma:

Szét lehet-e vágni egy négyzetet háromszögekké úgy, hogy minden háromszögnek pontosan -csúcsban

,,n” szomszédja legyen? Igen, lásd 19. (csillag) ábra



19.ábra

-Élben szomszédos háromszögekre?

2-nél igen

3-nál igen (lásd 5,6,4-es ábrák korábban)

4-től már nem mert akkor minden háromszöghöz hozzá kell hogy tartozzon minimum egy belső (V_{int}-be tartozó) oldalpont, ami csak ennél a háromszögnél belső oldalpont. Vagyis Azt is tudjuk hogy a négyzet csúcspontjai nem lehetnek belső oldalpontok, vagyis (legalább ez a négy pont nem belső oldalpont).

Emiatt $T+4 \leq V$ de ez nem lehetséges a korábban már bebizonyított $V \leq T+2$ segédtétel miatt(ekkor ugyanis $T+4 \leq T+2$ lenne, ami nyilván képtelenség)!

Vagyis egy négyzetet (és általában egy konvex sokszöget, ahol az oldalak száma legalább 4) nem lehet felbontani úgy háromszögekre, hogy minden egyes háromszögnek legalább 4 (élben) szomszédja legyen!

10. évfolyam előadása: Másodfokú egyenletek

Mit csinálsz, ha meg akarsz oldani egy fizikai problémát? Felhasználod az összes tudásodat és az összes adatot, tényt amit megadtak a feladatban, és végül általában kapsz egy egyenletet. És itt vége a fizikának, és pusztán matematikával kell megoldani az egyenletet. És ekkor néhány kiváló fizikus azt mondja, hogy a fizikai problémát visszavezettük matematikára. De alkalmilag a matematika vissavág. Egy nagyon egyszerű probléma belebonyolódik a másodfokú egyenletek körébe. Egyszer, ha megoldod az egyenletet, akkor elő kell adnod a megoldást. Nézzünk néhány feladatot a fizika különböző területeiről!

1. probléma

Két autó halad ugyanazon az úton. Az elsőautó állandó sebességgel halad, v-vel, míg a második állandó gyorsulással, a-val. Eleinte a két autó távlsága d.

Mennyi idő elteltével éri utol a második autó az elsőt?

Megoldás:

A feladat egy másodfokú egyenletre vezethető vissza:

$d = \frac{a}{2}t^2 - vt$

0-ra rendezve:

$\frac{a}{2}t^2 - vt - d = 0$

Behelyettesítve a másodfokú egyenlet megoldó képletébe:

$$t_1 = \frac{v - \sqrt{v^2 + 2ad}}{a}, t_2 = \frac{v + \sqrt{v^2 + 2ad}}{a}$$

Az idő nyilvánvalóan nem lehet negatív, és t_1-nél negatív érték jön ki a t-re ezért csak a t_2 lehet a helyes megoldás.

2. probléma

Hosszú egyenes úton halad egy autó, sebessége $v = 64,8\frac{km}{h}$-val. Átmegy egy hídon, ahonnan utána indítanak egy távirányítós kisautót. A kisautó gyorsulása $a = 3,75\frac{m}{s^2}$. Mennyi ideig tartson a gyorsulás, ha 10 sec alatt kell utolérnie a nagy autót?

Megoldás:

Legyen t_1 míg a kisautó gyorsul, $t = 10s$, míg utoléri a másik autót. $s_1 = \frac{a}{2}t_1^2$, $s_2 = v(t-t_1) = at_1(t-t_1)$

$s_1 + s_2 = s$

$a\frac{t_1^2}{2} + at(t - t_1) = vt$

Behelyettesítve, átrendezve a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$1,875t_1^2 - 37,5t_1 + 180 = 0$

Megoldásai:

$t_{1_a} = 8s$, $t_{1_b} = 12s$

Jól látszik, hogy a 12 másodperc, az több mint a 10, tehát ez nem jó megoldás, marad a 8.

3. probléma

Ezt a problémát úgy is nevezik, hogy a pirotechnikusok problémája, a pirotechnikusok rakétákat tesztelnek egy nagy, henger alakú gödörben. A rakétát a gödör közepén helyezik el, és valamilyen α szög alatt lövik ki v sebességgel. A gödör átmérője d, mélysége h. A gödör teljesen szabályos alakú, felső pereme sima. A tűzijáték kilövési sebessége akkora, hogy a közegellenállás a rakéták pályáját még nem befolyásolja. Milyen mély legyen a gödör, hogy a megfigyelőket ne találja el? A megfigyelők a gödör pereménél állnak. A keresett h mélység megállapításához bontsuk fel a mozgást vízszintes (x) és függőleges (y) irányú komponensekre!

$x = v(\cos\alpha)t = \frac{d}{2}$

$y = v(\sin\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 = h$

Az előbbiek segítségével írjuk fel a teljes mozgáshoz tarrtozó pályaegyenletet:

$\frac{d}{2}\tan\alpha - \frac{gd^2}{8v^2}(1+\tan\alpha^2) = h = \frac{d}{2}\tan\alpha - \frac{gd^2}{8v^2}\tan^2\alpha = h$

Határozzuk meg $\tan\alpha$ értékét, majd redukáljuk 0-ra! Ehhez írjuk fel a következő másodfokú egyenletet:

$\tan\alpha - \frac{4v^2}{gd}\tan\alpha + \left(\frac{8hv^2}{gd^2} + 1\right) = 0$

Próbáljuk meg megoldani a másodfokú egyenletet:

$\tan\alpha = \frac{\frac{4v^2}{gd} \pm \sqrt{\left(\frac{4v^2}{gd}\right)^2 - 4\left(\frac{8hv^2}{gd^2}+1\right)}}{2}$

A kérdés az a h magasság volt, ahova a rakéta már nem ér el. A rakéta pályáját függvényként értelmezve olyan y értéket keresünk, amihez nem tartozik x. Vagyis azt akarjuk, hogy az egyenletnek NE legyen megoldása! Ezt úgy tehetjük meg, hogy a diszkriminánst negatívvá tesszük.

$D = \left(\frac{4v^2}{gd}\right)^2 - 4\left(\frac{8hv^2}{gd^2} + 1\right) < 0$

Az egyenlőtlenséget h-ra rendezve a következő összefüggést kapjuk:

$$h > \frac{v^4 - g^2d^2}{8gv^2}$$

A számlálót megvizsgálva láthatjuk, hogy $v^2 > gd$, akkor minden h jó lesz, mert ez esetben a hányados pozitív lesz. Minden más esetben az előző egyenlőtlenség érvényes.

4. probléma

A súlylökő

Mekkorát dob a súlylökő a golyóval, ha a golyó a talajszint fölött 2 m-rel dobja el a talajjal 45°-os szöget bezárva? A golyó kezdősebessége $v = 13,484\frac{m}{s}$. Vegyünk fel egy koordináta rendszert: Jelölje a golyó indításának helyét 0 az y tengelyen. A golyó $-h$ magasságban ér földet. A hajítás távolsága legyen x. Írjuk fel a pálya egyenletét:

$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos\alpha} = -h = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$

Helyettesítsük be a kívánt adatokat:

$-2 = x\tan 45 - \frac{10\frac{m}{s^2}x^2}{2\left(13{,}484\frac{m}{s}\right)^2\cos^2 45} = x - \frac{10\frac{m}{s^2}x^2}{2\left(13{,}484\frac{m}{s}\right)^2 0{,}5}$

Redukáljuk 0-ra, majd oldjuk meg a másodfokú egyenletet:

$0 = -\frac{10}{181{,}82}x^2 + x + 2$

$$x_1 = 20$$

$$x_2 = -\frac{20}{11}$$

Matematikai szempontból a függvény zérushelyeit kerestük. Fizikai szempontból viszont csak egy jó megoldás van. Mivel a súlylökő előre dob és nem hátra.

5. probléma

Egy l hosszú kémcsövet megtöltünk P nyomású levegővel és lezárjuk egy mozgatható dugattyúval. A kémcsövet H mélységbe víz alá merítjük, majd a dugattyút kiengedjük. Határozzuk meg a kémcsőben lévő levegő h magasságát! A víz sűrűsége ρ és a légnyomás Pa. Használjuk az egyensúlyi feltételt a dugattyúra: $\rho g(H-h)+Pa = P'$, ahol P' a levegő új nyomása a kémcső belsejében. Mivel PV állandó, $Pl = P'h$. Kombinálva a két egyenletet a következőt kapjuk:

$h^2 - \left(H + \frac{Pa}{\rho g}\right)h + \frac{Pl}{\rho g} = 0$

Az egyenlet két megoldást ad:

$h_\pm = \frac{1}{2}\left(H + \frac{Pa}{\rho g}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(H + \frac{Pa}{\rho g}\right)^2 - \frac{Pl}{\rho g}}$

A diszkrimináns nem feltétlenül pozitív, hiszen ha P sokkal nagyobb mint Pa és H kicsit nagyobb, mint l, a dugattyú ki lesz lökve a kémcsőből. Ha viszont mind 2 gyök pozitív és mindkettő kisebb mint l, akkor két megoldás van? Meg kell néznünk az egyensúly stabilitását! Nézzük a $P' = \frac{Pl}{h}$ és $P' = Pa + \rho g(H-h)$ függvények metszéspontját. Az 1. ill. 2. metszéspont megfelel h_-, ill. h_+-nak.

Ha figyelembe vesszük az 1-es és 2-es egyensúlyi helyzethez viszonyított kis eltéréseknek megfelelő nyomásváltozásokat, az elemzés alapjám megállapítható, hogy az első pont egy stabil egyensúlyi helyzetnek felel meg és ez az egyetlen valódi lehetőség.

6. probléma

Egy mindkét végén zárt hengerben tetszőleges gáz található, melyet egy mozgó dugattyú 2 részre oszt. A dugattyú által elválasztott területen azonos mennyiségű gáz található. Tudva azt, hogy T hőmérsékleten a térfogatok aránya $\frac{V_1}{V_2} = n$ számítsuk ki a térfogatok arányát, $\frac{V_1'}{V_2'}$-t T' hőmérsékleten!

$p_1V_1 = p_2V_2$ - Boyle Mariott T hőmérsékleten

$p_1'V_1' = P_2'V_2'$ - Boyle Mariott T' hőmérsékleten

$V_1 + V_2 = V_1' + V_2'$

$p_2 - p_1 = p_2' - p_1'$

Jelöljük $\frac{V_1'}{V_2'} = x \implies \frac{p_2'}{p_1'} = x$

$\frac{V_1}{V_2} = n \implies \frac{p_2}{p_1} = n$

Az előbbiekből következik, hogy

$V_1\big(1+\frac{1}{n}\big) = V_1'\big(1+\frac{1}{x}\big)$

Tehát: $p_1(n-1) = p_1'(x-1)$

$p_1V_1\big(1+\frac{1}{n}\big)(n-1) = p_1'V_1'\big(1+\frac{1}{x}\big)(x-1),$

mivel: $\frac{p_1V_1}{T} = \frac{p_1'V_1'}{T'}$ az általános gáztörvény szerint

$\frac{T'}{T}(1+n^{-1})(n-1) = (1+x^{-1})(x-1)$, vagyis

$$x^2 + \frac{T}{nT'}(1-n^2)x - 1 = 0$$

Elfogadható megoldás itt is csak egy van, ami a következő:

$$x = \frac{n^2-1}{2nT'}T + \sqrt{1+\frac{T^2}{T'^2}\frac{(n^2-1)^2}{4n^2}}$$

7. probléma

Egy labdát egy 12 m magas szobában két méter magasból ferde hajítással dobunk el, hogy a függőleges sebessége $v_0 = 15\frac{m}{s}$. Mikor éri el a labda a plafont?

Megoldás:

Azt tudjuk, hogy

$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0t \implies 10 = \frac{-10}{2}t^2 + 15t$

$5t^2 - 15t + 10 = 0 \implies t = \frac{15\pm\sqrt{225-4\cdot5\cdot10}}{10}$

$t_1 = 1s$

$t_2 = \frac{1}{2}s$

De ebből csak a t_2 következik be, mert $\frac{1}{2}s$ után visszapattan a falról. A másik megoldást az adja, hogy a függvény 2 helyen metszi a plafont.

8. probléma

Egy gyűjtőlencse fókusztávolsága f. Találjuk meg a legkisebb lehetséges x távolságot egy tárgy és a képe között. (Tipp: nem szükséges a kalkulus ismerete.)

A lencsegyenlet:

$t^{-1}+k^{-1} = f^{-1}$, ahol t a tárgy-, k pedig a kép távolsága a lencsétől. Mivel itt $k = x-t$, t-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$t^2 - tx + fx = 0$

Ennek diszkriminánsa $D = x(x-4f)$. Mivel t csak akkor létezik, ha $D \geq 0$, $x_{min} = 4f$. A következő példában jobban elharapódzik majd az algebra, de a gyökök megtalálása helyett most is inkább a diszkriminánsra fogunk koncentrálni.

Most nézzük meg, mi a helyzet két lencsénél! a lencsék távolsága d mindkét lencse fókusztávolsága f. A feladat megtalálni a legkisebb lehetséges távolságot egy tárgy és képének a képe között. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a tárgy nem az első lencse előtt, hanem a két lencse között van.

Felírhatjuk a következő egyenletet:

$t^2 - t(t+t') + f(t+t') = 0$

Diszkrimináns: $D = (t+t')(t+t'-4f)$

$(t+t')_{min} = 4f$

$(d-t+t'')_{min} = 4f$

$$t' = t'' \implies t' + t'' = 2fd = 2f - d$$

Tanulság: Ha egy fizikai problémát visszavezetünk egy másodfokú egyenletre, akkor az egyenlet két gyöke közül gyakran csak az egyik jó.

Készítették: Nemecskó István Tanár Úr, Holocsi Szilvia, Katona Nóri, Miklós Kovács Janka, Bágyoni-Szabó Attila, Kovács Kristóf, Zsakó András, Dobosy Kristóf

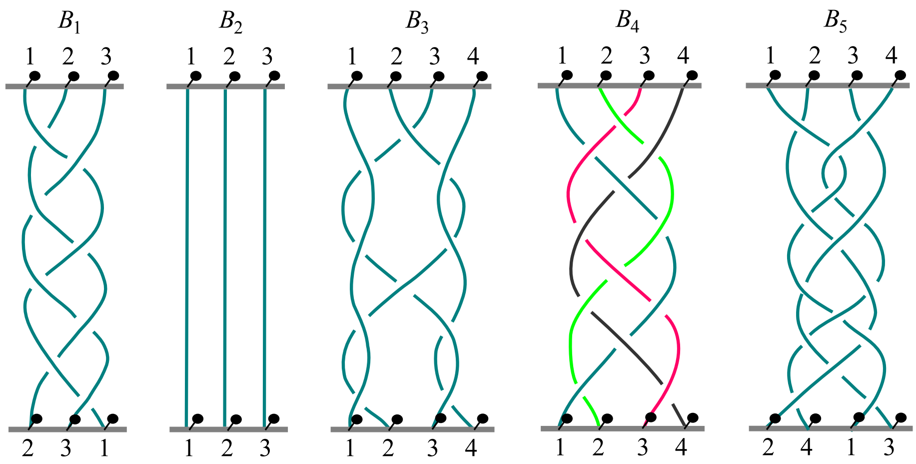
11. évfolyam előadása: Csomóelmélet

Fonás és csomózás – ez tényleg matematika?

Egy szorgalmas diák általában azzal a meggyőződéssel hagyja el az iskolát, hogy a matematika elvont elképzelésekkel foglalkozik, míg az olyan evilági dolgoknak, mint fonatok és csomók, semmi közük sincs a hozzá.

De ez hamis benyomás. Manapság a matematikusok nem csak magasröptű dolgokkal – számelmélet, az űrrepülés kiszámítása, vagy poetic meter – foglalkoznak, hanem mindennapos problémákkal is, mint közgazdaságtan vagy queuing theory.

És a fonatelmélet is. Ez valós és életben lévő elmélet, ami az 1920-as években keletkezett; még nem teljes és még nem merült ki az összes alkalmazása. Ami pedig a szépségét illeti, a fonatelmélet nem játszik másodhegedűst a klasszikus matematikának, ami valójában már a 16. és 17. század óta nem tanult új dallamokat, viszont a legtöbb iskolában a matematikának ez az egyetlen ága, amit tanítanak.



1. ábra *Példák fonatra, három és négy szállal: B_1 – lányok fonata; B_2 – triviális fonat; B_3 – ?; B_4 – tiszta fonat; B_5 – ciklikus fonat*

A történetemet néhány példával kezdem (1.ábra). Így képzelj el egy fonatot: egy-egy n szögből álló sor van beverve egy függőleges deszka alsó és felső szélére (ahol n lehet $1, 2, 3 \ldots$), és mindegyik felső szög hozzá van kötve egy alsóhoz egy madzaggal. A madzagok összefüggéstelenek, és mindig lefelé haladnak – azaz a madzag nem fordulhat vissza és indulhat el a deszka teteje felé. Amiket a 2. ábrán látsz, azok nem fonatok.

Két fonat ekvivalensnek (azaz azonosnak) tekinthető, ha az egyiket a másik pontos másává lehet változtatni a madzagjai – amit gyakran ,,szál”-ként emlegetnek – mozgatásával. Ezalatt a madzag megnyúlhat és összemehet, de nem szabad elszakítani, vagy összeragasztani. Egy ilyen transzformációt mutat a 3. ábra.

Az 1. ábrán a szálak felső vége el van látva számokkal a szokásos sorrendben – balról jobbra. Az alján megint a szálak számait látod, de itt a sorrend nem feltétlenül ugyanaz. Tehát minden fonat meghatározza a szálai számának egy bizonyos sorrendjét. Példának okáért a B_1, B_4, és B_5 fonatok egyenként a következő permutációkat mutatják:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A művészünk beszínezte az egyik fonatot az első ábrán. A tulajdonság, ami elkülöníti, hogy az egybevágósági permutációt definiálja

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

(B_4-re $n = 4$). Más szavakkal ez a fonat megőrzi a szálai számának sorrendjét. Azokat a fonatokat, amik rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal, tiszta fonatnak nevezzük. Ezeknek egy különleges esete a csupa függőleges szálból álló triviális fonat.

Ha már itt tartunk két triviális fonat is van az 1. ábrán, nem csak egy. Kettő? Igen, csakugyan kettő: B_3 triviális, mert könnyen átváltoztatható egy olyan fonattá, ami négy függőleges szálból áll (ld 3. ábra).

A fonatok egy másik különleges fajtája a tiszta fonatokon kívül pont az ellenkezője. Ezek a ciklikus fonatok. Meghatározás szerint átrendezik a szálak számát egy egyszerű körben, ahogy B_5 teszi: $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$.

A fonat az egyik legegyszerűbb geometriai alakzat. A fonatok könnyen összefüggésbe hozhatók az algebrával a fonatösszeadás (vagy szorzás) műveletén keresztül. Ez elég könnyű (ld 4. ábra): két fonatot egymáshoz raksz, összeragasztod a megfelelő szálakat, és elveszed az immár felesleges szögeket (a fölső fonat alsó, és az alsó fonat felső szögeit). Ez az átalakítás sok szempontból hasonlít az általános szorzásra. Igaz rá az asszociativitás:

$$B_1(B_2B_3) = (B_1B_2)B_3.$$

Van egy egységhez hasonló eset – a triviális fonat (B_2 az 1. ábrán egység $n = 3$-ra), amit 1-es számmal jelölünk, és amire

$$1 \cdot B = B \cdot 1 = B$$

bármilyen B fonatra. Csoporthoz hasonló esetet is találhatunk: minden B fonatnak van egy B^{-1} inverze, amire

$$B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = 1.$$

Ez nem nyilvánvaló, ezért én kihívom az olvasót, hogy találja meg az inverz fonat felépítését. Ha magadtól nem jöttél rá, nézd meg a választ az 5. ábrán.

Mindamellett a fonatösszetétel nem kommutatív: BC lehet, hogy nem egyezik meg CB-vel (példát ld lent).

Így kapható az algebrai alakzat – az n szálból álló fonatok csoportja. Nem olyan egyszerű, de teljesen fel van fedezve. Elkezdjük a saját nyomozásunkat a tulajdonságaival kapcsolatban. Ennek a végéig $S_1, S_2, ..., S_{n-1}$ elemi fonatokat fogjuk használni (6. ábra).

Kiderül, hogy bármilyen fonat létrehozható elemi fonatok és inverzeik összetételéből. Példának okáért világos, hogy

$$B_1 = S_1S_2^{-1}S_1S_2^{-1}S_1S_2^{-1}S_1S_2^{-1}.$$

Továbbá,

$$B_3 = S_2S_1S_3^{-1}S_1^{-1}S_3S_2^{-1}S_1S_3S_1^{-1}S_3^{-1}.$$

Ez nyilvánvalóvá válik, miután kicsit megbökjük B_3 szálait hogy a jobb oldali kereszteződések kicsit lejjebb kerüljenek (fig 7).

1. Feladat: Állítsd össze az 1. ábrán szereplő B_4 és B_5 fonatokat S_1, S_2, S_3 elemi fonatkból,és inverzeikből!

A fonatelméletben,úgy, mint az analitikus geometriában, az algebrai jelzésrendszer megengedi nekünk, hogy geometriai tényezőket teljesen mechanikai számolásokkal helyettesítsünk a következő azonosságokon alapulva.

1. *Triviális relációk* ($i = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén:)

$$S_iS_i^{-1} = S_i^{-1}S_i = 1$$

$$S_i \cdot 1 = 1 \cdot S_i = S_i$$

2. *Távoli kommutativitás* ($i, j = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén:)

$$S_iS_j = S_jS_i \text{ amennyiben } |i-j| \geq 2$$

3. *Fonat relációk* ($i = 1, 2, \ldots, n-2$ esetén:)

$$S_iS_{i+1}S_i = S_{i+1}S_iS_{i+1}$$

Ezek majdnem magától értetődőek (8. ábra). És használhatóak más vonatkozások származtatására – példának okáért a ,,Távoli kommutativitás" általánosabb formája.

2. Feladat: Bizonyítsd be, hogy $S_i^uS_j^v = S_j^vS_i^u$ minden $u, v \in \{1, -1\}$, $|i-j| \geq 2$ esetén.

Vizsgáljunk meg még egy példát: $B_3 = 1$ egy bizonyítását (3. ábrán geometriailag ki van mutatva) közvetlen számítással:

$$\begin{array}{rcl}
B_3 & = & S_2(S_1S_3^{-1})S_1^{-1}S_3S_2^{-1}S_1(S_3S_1^{-1})S_3^{-1} = \\
& = & S_2S_3^{-1}(S_1S_1^{-1})S_3S_2^{-1}(S_1S_1^{-1})(S_3S_3^{-1}) = \\
& = & S_2S_3^{-1} \cdot 1 \cdot S_3S_2^{-1} \cdot 1 \cdot 1 = \\
& = & S_2(S_3^{-1}S_3)S_2^{-1} = \\
& = & S_2S_2^{-1} = \\
& = & 1.
\end{array}$$

Itt először ,,Távoli kommutativitást" használtunk, aztán a triviális vonatkozásoknak köszönhetően minden kitisztult.

3. Feladat: Bizonyítsd be a következő azonosságokat!

$$S_1^{-1}S_2^{-1}S_1^{-1} = S_2^{-1}S_1^{-1}S_2^{-1}$$

$$S_1S_2S_1S_2^{-1}S_1^{-1} = S_3S_1S_3^{-1}S_1^{-1}S_2$$

4. Feladat: Bizonyítsd be, hogy $n \geq 3$-ra: $S_1S_2 \neq S_2S_1$.

Miért olyan hatékonyak az azonosságaink a 3. feladatnál (ahogy az azt megelőző számításoknál is)? Azért van, mert véletlenül a megfelelő problémákat választottam, vagy azért, mert van egy bizonyos szabályszerűség emögött a hatékonyság mögött? Más szóval vajon ez a három azonosság elegendő, hogy bebizonyítsuk az összes egyenletet a fonatelméleten belül? Kiderül, hogy igen. A fonatelmélet megalkotója, a német matematikus, Emil Artin 1936-ban bebizonyította, hogy bármely egyenlőség következik a három azonosságból. Emiatt a jelentős tétel miatt lehet megoldani a fonatelmélet feladatát – a besorolás-problémát. Azaz meg lehet adni egy végtelen, ismétlődés nélküli listáját a fonatoknak,és egy algoritmust, ami kijelöli bármely fonatnaka számát ezen a listán. Ezeknek a tényeknek a bizonyítása nem elemi, ezért nem fogok itt ezekbe belemenni. Csak szeretnék rámutatni, hogy arra szolgálnak, hogy átalakítsák a fonatkgeometriai elméletét egy számolási tudományba, ahol bármilyen konkrét kérdés megválaszolható, általában számítógéppel. Szinte hallom, ahogy a szkeptikus olvasó azt kérdi: ,,És akkor mi van? Miért kell nekünk megoldani ezeket a ,,konkrét problémákat"?"

Nos a fonatelméletnek rengeteg alkalmazásával találkozhatunk a matematika és más tudományok mezején. Itt csak egy alkalmazást fogok feltárni, amit én különösen értékelek: az alkalmazását a csomóelméletben.

Kezdjük példákkal (9. ábra). Egy csomó egy zárt görbe a térben; sima, vagy sokszögű, ami korlátlanul meg lehet csavarva, vagy össze lehet fonva.

Hasznos elképzelni, hogy a csomó egy vékony, hajlékony, nyúlékony fonálon van. Két csomó azonosnak (ekvivalensnek) tekinthető, az egyiket a másik pontos másává lehet változtatni mozgatással, hajlítással, nyújtással, és összenyomással anélkül, hogy a fonál szétszakadna. A csomók egy fontos fajtája (valójában egyáltalán nem eredeti csomó) egy triviális csomó, egy általános, csomózatlan kör (K0a 9. ábrán). Valójában két triviális csomó is található ezen az ábrán: K7 triviális, könnyen kibogozható, és áttranszformálható egy körré (tedd meg fejben, vagy használj ceruzát, és radírt). Nem csak ez, van egy másik ekvivalens pár csomó az ábrán.

5. Feladat: Találj két nem triviális, de egymással ekvivalens hurkot a 9. ábrán!

Matematikusoknak kényelmesebb, ha van egy egzakt meghatározásuk az ekvivalenciára, mint a fenti rajzos leírás. Megadok ilyen definíciót olyan csomóknak,amik inkább sokszögűek, mint szépen hajló görbék.(Így elkerülhetek néhány technikai részletet az általánosság elvesztése nélkül.) Definiálni fogunk egy elemi műveletet egy sokszög-csomó AB ,,szakaszának" helyettesítésére – például a 10. ábrán látható AB szakaszt – AC és CB szakaszokkal, vagy ennek a fordítottját ACB-t AB-vel; azzal a feltétellel, hogy a csomónak nem része ABC háromszög egyik belső pontja sem. Két csomó ekvivalerns, ha létezik az elemi műveleteknek egy véges sorozata, amivel az egyik átvihető a másikba (10. ábra). Megvizsgálva ezt az ábrát minden nehézség nélkül meg fogod érteni, hogy ez a definíció tényleg megfelelő, a fenti grafikus leírásra.

Csak úgy, mint a fonatoknál, a besorolás-probléma itt is felvethető: meg kell adni egy végtelen, ismétlések nélküli listáját a csomóknak, és egy algoritmust, amivel bármely csomó sorszáma meghatározható ezen a listán. Annak ellenére, hogy mostanra a probléma elméletben már meg van oldva, a megoldás olyan fáradtságos, hogy gyakorlatban nem lehet alkal mazni. Lehetséges vajon ezt a problémát a fonatok már megoldott besorolás-problémára visszavezetni? A következő ötlet önmagát sugallja. Fogj egy fonatot, hajlítsd meg, majd ragaszd össze a két végét (11. ábra). Egy csomót kapunk. De a fonatok összezáródása vajon mindig csomót eredményez?

6. Feladat: Rajzold meg a B1 és B4 fonatok (1. ábra) összezáródását! Hány kanyart kapunk mindkét esetben?

7. Feladat: Keress egy fonatot, minek az összezáródása (a) K1 (b) K3 (c) K4 (d) K2 (ld 9. ábra).

Tehát a fonatok egy bizonyos csoportjának (név szerint a ciklikus fonatoknak, ahogy azt azok az olvasók, akik a 6. feladatot megcsinálták, biztosan észre is vették) bezáródása csomót eredményez. De vajon lehetséges-e megkapni minden csomót ezen a módon? Kiderül, hogy igen!

A neves amerikai matematikus, James W. Alexander, a csomók egyik legelső kutatója 1925-ben bebizonyította, hogy bármelyik csomó egy bizonyos fonat összezáródása. Ahelyett, hogy részletesen bebizonyítanám, inkább megmutatom a két fontos lépést, amit felhasznált a bizonyításban.

1. Kibogozás. Rajzolj egy csomót, válassz ki egy irányt rajta, majd vegyél egy tetszőleges O pontot nem rajta. A csomó egy szakasza pozitív (O szempontjából), ha O-ból nézve az íránya balról jobbra tart. Például a 13/a ábrán AB és FG kivételével mindegyik szakasz pozitív. Egy csomót (O szempontjából) pozitívnak hívunk, ha minden szakasza pozitív. Egy pozitív csomóhoz nagyon könnyű megtalálni a keresett fonatot – egyszerűen vágd el bárhol, és hajlítsd ki, ahogy az a 12. ábrán látszik.

2. Alexander trükkje. Egy csomó negatív szakaszai (13/b,c ábra) helyettesítve vannak O pont körüli pozitív szakaszpárokkal. Az összes negatív szakasz felszámolása után az első lépést kell alkalmazni. És így lehet minden csomóról bebizonyítani, hogy egy bizonyos fonat összezáródásának eredménye. De a fonatokat be lehet sorolni. Használhatjuk ezt csomók osztályozásához? Sajnos nem. A baj az, hogy ha különböző fonatok végeit összetesszük, nem feltétlenül kapunk különböző csomókat. Például a 14. ábrán látható három szálas fonat különbözik a 11. ábrán látott két szálas fonattól, de mindkettőnek lóhere az összezáródása (próbáld ki). Így a kísérlet, hogy a csomók besorolási problémáját a fonatok besorolási problémájára visszavezetve oldjuk meg, megbukik. De Alexander tétele csupán az első eleme a bonyolult gondolatok sorozatánk, amik összekötik a három dimenziós tér leggyönyörűbb lakosait: a fonatokat, és a csomókat.

—

Befejezésül meg fogok próbálni választ adni a kérdésre: ,,Miért kell mindez nekünk?" azon olvasók kedvéért, akik nem gondolják, hogy a szépség önmagában elegendő ok egy tárgy tanulmányozásához. Egy bizonyos fokig a válasz megtalálható a fonat- és csomó elmélet megalkotásának történetében. A fonantelméletet az 1920-as években találta fel a fiatal német algebrista, E. Artin egy ruhaüzem kérésére. Ő, ahogy most mondaná, egy szaktanácsadó volt.

A csomóelmélet forrása időben tovább nyúlik, és megalkotásának érdekes történetei már majdnem elfeledettek. A csomóelmélet módszeres tanulmányozását a nagy britt matematikus, és fizikus William Thomson, 1.Kelvin báró kezdeményezte. Arra a következtetésre jutott, hogy az elektromágneses kölcsönhatást hullámok vezetik, és később egy még merészebb gondolat hasított belé: az egymásra ható részecskék szintén hullámok, de mivel a részecskék (atomok) nagyon kicsik, és a hullámok hosszúak, az atom-hullámoknak be kell keríteni magukat egy kis részen. Így kis csomókat alkotnak, amik megragadják az összes kódolt fizikai és kémiai információt az atomról ugyanúgy, ahogy egy csomó megkötődik. Thomson és diákpalántái a csomókat felfedezve, módszeres besorolásukat azzal kezdték, hogy speciális táblázatokba rendezték őket.

A csomók vizsgálatában a stafétabot (?) a 20. században matematikusok vették fel, és nem azért, mert bármiféle pénznyereményben reménykedtek – a tárgy puszta szépsége vonzotta őket. A finom invariánsok, amiket megalkottak (tervezzük, hogy szánunk majd nekik egy speciális cikket egy közelgő számban) lehetővé tettek egy jelentős előrehaladást a csomóelméletben. Mindamellett ez hosszú ideig a matematikának eldugott, leginkább topológusok által ismert békés hátsóvize maradt. Időközben a fonatelmélet elég komoly alkalmazásaira találtak rá – például komplex analízisben, mechanikában, és az elemi részecskékkel foglalkozó fizikában.

Nem olyan régen, az angol John Conway és V. Jones, az orosz V. Turayev és A. Reshetikhin, valamint az amerikai L. Kauffmann matematikusok közös munkájának gyümölcseként váratlan, mély összefüggések kerültek leleplezésre a fonat-és csomóelmélet, absztrakt algebra, és a fizika között. A békés hátsóvíz kavargott. Már megint a fizika! Nem csak klasszikus ágazatairól (statikus fizika, például, egy modell... hideg!) van szó, de a modell kvantumelméletről is. És a kémiai információk kódolása csomókba (és fonatokba!) megint előkerült a molekuláris biológiában, az amino acidok megfejtésének folyamatában, és a DNS tanulmányozásában. Tehát – ki tudja – esetleg van valami Kelvin úr régi ötletében...

A Conway polinomok

A tudományos irodalomban gyakran *Alexander-Conway polinomoknak* hívják ezeket a polinomokat. James W. Alexander, egy kiváló amerikai topológus, már Conway előtt, 1933-ban felfedezte őket. (Az Alexander polinomok csak a változók egy egyszerű cseréjében különböznek a Conway polinomoktól.) De Alexander konstrukciója-lenyűgözően szép!-nem nevezhető eleminek. És természetesen Conway munkája nem csupán a változók cseréjére korlátozódott-a polinomok egy teljesen elemi, axiomatikus rendszerét fedezte fel. És ez az a rendszer amiről most írni fogok, a polinomokat egyedül Conway - a 20. század egyik legragyogóbb és legsokoldalúbb matematikusa, az Életjáték, a szürreális számok, a sporadikus Szörnyeteg (a csoportok egy fontos példája), és még sok más ravasz dolog kitalálójának - neve alatt hagyva.

Conway feltette, hogy minden csomó és lánc L diagramja megfeleltethető egy egész együtthatós polinomnak, amit $P_L(x)$-el jelölt. A megfeleltetésnek eleget kell tennie a következő három axiómának:

1. *Az egymással ekvivalens L és L' diagramoknak megfelelő polinomok ekvivalensek egymással:*

$$P_L(x) = P_{L'}(x).$$

2. *A triviális csomó a nulladfokú polinomnak felel meg, aminek értéke 1-gyel egyenlő:*

$$P_0(x) = 1.$$

3. *(A gubanc-egyenlet) Az L^+, L^- és L^0 diagramú láncok, melyek mindenhol megegyeznek egymással, kivéve egy kis kört, amit a 6a ábra mutat, polinomjai eleget tesznek a következő egyenletnek:*

$$P_{L^+}(x) - P_{L^-}(x) = x \cdot P_{L^0}(x)$$

Ezen a ponton nem térek ki annak tárgyalására, hogy miért létezik minden L diagramhoz megfelelő $P_L(x)$ polinom, és a fentebbi axiomák miért határozzák meg ezt egyértelműen. A 7*a* ábra azt mutatja, hogy kaphatjuk meg két nem-összekapcsolt hurok Conway polinomját. Kezdjük az egy dupla-pontot tartalmazó (egyszer "megtekert") triviális csomó L^+ diagramjával. Az 1. és 2. axioma szerint $P_{L^+}(x) = 1$. Ha a dupla pontot az ellentettjére cseréljük majd "kivágjuk" (a 3. axiomával összhangban), a triviális csomó L^- és két nem-összekapcsolt hurok diagramját kapjuk. A harmadik axiomát használva $P_{L^+}(x) - P_{L^-}(x) = x \cdot P_{L^0}(x)$, azaz $1 - 1 = x \cdot P_{L^0}(x)$. Innen kapjuk, hogy $P_{L^0}(x) = 0$, tehát a két nem-összekapcsolt hurok Conway polinomja a 0.

Nézzük, mi a helyzet két összekapcsolt hurokkal. Először megjegyezzük, hogy mivel irányított csomókkal és hurkokkal dolgozunk, kétféle összekapcsolást különböztethetünk meg: jobb kapcsolást és bal kapcsolást. Ahhoz, hogy elmagyarázzam a köztük lévő különbséget, hurkokat meg kell tudnunk különböztetni, tehát a kettő közül az egyiket nevezzük "elsőnek" a másikat pedig "másodiknak".

Ha a második hurok az első síkját a "jobbkéz-szabály"(a jobbkéz nagyujjának iránya, amikor a jobbkéz többi ujja az első hurok irányában forog) szerint meghatározott irányban döfi át, az irányítás jobb, ellenkező esetben pedig bal.

Könnyű ellenőrizni, hogy a lánc irányítása nem változik meg, ha a két hurkot átszámozzuk, viszont az ellenkezőjére változik, ha a két hurok közül az egyik irányítását megválzoztatjuk. A 7*b* ábrán $L+$ bal irányítású összekapcsolt hurkok diagramja. Ha a jobboldali dupla-pontra felírjuk a gubanc-egyenlet, az L^- (ekvivalens két nem-összekapcsolt hurokkal) diagramot, és az egy duplapontos triviális L^0 diagramját kapjuk. Az első axiomából és az eddigi számításainkból $P_{L^-}(x) = 0$. Az 1. és 2. axiomából $P_{L^0}(x) = 0$. Most a gubanc-egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $P_{L^+}(x) = x$, tehát a bal irányítású, két hurokból összekapcsolt lánc Conway polinomja x. Ha a lánc jobb irányítású, a polinomja $-x$. Ezt könnyen láthatjuk, ha a 7*b* ábrán a felső hurkokon megfordítjuk a nyilakat. Ekkor L^+ és L^- diagramok szerepe a gubanc-egyenletben felcserélődik (és a triviális csomó L^0 diagramja is máshogy néz ki).

A 7*c* ábra a lóhere polinomjának kiszámolását mutatja. Megjegyezzük, hogy a gubanc-egyenlet itt egy bal irányítású két hurokból összekapcsolt láncot ad L^0-ként. Ez az, amiért a csomók előtt láncokkal kellet foglalkoznunk.

Feladatok

6. Adjuk meg a "8. ábra" csomó Conway polinomját (7*d* ábra).

7. Adjuk meg az "átdöfött 8. ábra" lánc jobb és bal irányítású változatának Conway polinomját (7*e* és 7*f* ábrák). (Emlékeztető: ne felejtsünk el különbséget tenni az legegyszerűbb (két összekapcsolt hurokból álló) jobb és bal irányítású láncok között).

A számolások folytatásához szükség lesz bizonyos általánosításokra...

Szétválasztott lánc polinomja

Egy láncra azt mondjuk, hogy *szétválasztott*, ha két, egymással nem összekapcsolt részből áll.

TÉTEL: *Minden szétválasztott lánc Conway polinomja 0.*

Az állítás bizonyításához képzeljük el, hogy az adott szétválasztott lánc L^0 diagramjának két részét bezártuk egy-egy (egymástól diszjunkt) dobozba, és a dobozokat letetettük egymástól nem túl messze.

Rajzoljunk mindkét dobozhoz egy-egy belőlük kiinduló köteldarabot, és fektessük őket egymás mellé a $9a$ ábrán látható módon. A gubanc egyenletek két új lánc L^+ és L^- diagramját eredményezik (lásd 9b és 9c ábrák). Ekkor

$$P_{L^+}(x) = P_{L^-}(x).$$

Csakugyan, ha a felső dobozt a függőleges tengelye körül eltekerjük $-360°$-kal, L^+ diagram L^- diagramba megy át, innen már a fentebbi azonosság tényleg következik, figyelembe véve az 1. axiomát. A gubanc egyenletből:

$$P_{L^0}(x) = x^{-1}(P_{L^+}(x) - P_{L^-}(x)) = 0,$$

ezzel kész vagyunk.

Feladatok

8. Igazoljuk, hogy Borromean gyűrűk Conway polinomja x^4.

9. Adjuk meg a 10. ábrán látható lánc és csomó polinomját.

10. Mutassuk meg, hogy a Conway polinomok nem tökéletes invariánsok, keressünk különböz csomókat azonos polinommal. Kis segítség: a legegyszerűbb példa erre a lóhere és tükörképe. Hogy megmutassuk, nem ekvivalensek, módosítsuk Conway polinomot *Jones polinomra.*, amit hasonló módon definiálhatunk, a gubanc egyenletet kivéve, ami most így fog kinézni:

$$3.' \frac{1}{\sqrt{x}} P_{L^+}(x) - \sqrt{x} P_{L^-}(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} P_{L^0}(x).$$

Összefoglalva

A néhény elvégzett számításból is láthatjuk, hogy a csomók és láncok Conway polinomokkal való vizsgálata egészen elegáns módszer, lehetőséget ad az azonosításukra, és rámutat bonyolultságukra. A lóhere, a "8. ábra"', és a Borromean gyűrűk polinomjainak kiszámolásával (egyik sem volt 0 vagy 1) precíz bizonyítást adtunk arra, hogy nem kibogozhatóak. A megfelelő polinomokat kiszámolva, bebizonyíthattuk volna, hogy a $7e$ és $7f$ ábrákon látható láncok nem ekvivalensek, ami nem is teljesen nyilvánvaló.

Persze ezek a bizonyítások csak akkor állják meg a helyüket, ha bizonyítottnak tekintjük a tényt, hogy minden csomónak és láncnak létezik egy egyértelműen meghatározható Conway polinomja. Csupán az axiomák kimondásával nem tudjuk garantálni egy-egy dologról, hogy kielégíti azokat (mi van, ha ellentmondásos a rendszer?). De hogy lehet ezt garantálni? Csakis a Conway polinomok egyértelmű létezésének bizonyításával. Ez az elemi bizonyítás azonban nagyon fáradságos, ezért nem is írom itt le.

12. évfolyam előadása: Nos, hol is van a hiba?

A cikk

Számos, magát értelmiséginek valló ember alig ért a matematikához, és bizonytalan még a legegyszerűbb képletekben is. Példaként következzék az iskolában is mindenkinek tanított százalékszámítással foglalkozó feladat!

1. probléma

Egy farmer leszüretelt 10 tonna görögdinnyét, és egy folyón leszállította azt legközelebbi városba. Mint az köztudott, a görögdinnye szinte kizárólag csak vízből áll. Amikor a dinnyéket bepakolták a bárkába, a tömegük 99%-át tette ki víz. Az út során a görögdinnyék valamennyire kiszáradtak, és a víztartalmuk 1%-kal (98%-ra) csökkent. Mekkora volt a dinnyék tömege, amikor kipakolták őket a városban? Sokan nem fogják elhinni az eredményt, még akkor se, ha maguk számolták ki. Javasoljuk az olvasónak, hogy próbálja meg a feladatot önállóan megoldani. Sokan képesek bedőlni a legprimitívebb érveléseknek is, főleg ha azokat elég meggyőzően adják elő. Példaképp nézzük meg ezt a régi feladatot!

2. probléma

Egy visszavonult tábornok úgy döntött, hogy megválik a csizmájától. Elküldte hát a piacra az inasát, hogy adja el őket \$15-ért. Az inas találkozott két féllábú veteránnal a piacon, és egyenként \$7.50-et kért tőlük. Amikor az inas beszámolt urának az üzletről, az visszaküldte őt \$5-ral, mivel szerinte egy veteránnak olcsóbban kellett volna adni a csizmát. De az inas a piacra való úton \$3-t italra költött, és csak fejenként \$1-t adott vissza a két veteránnak. Számoljuk össze a pénzeket: mindkét veterán fizettet \$6.50-et, ez összesen \$13, továbbá elivott az inas \$3-t. Ez így: $\$13 + \$3 = \$16$. Honnan lett egy dollár többletünk?

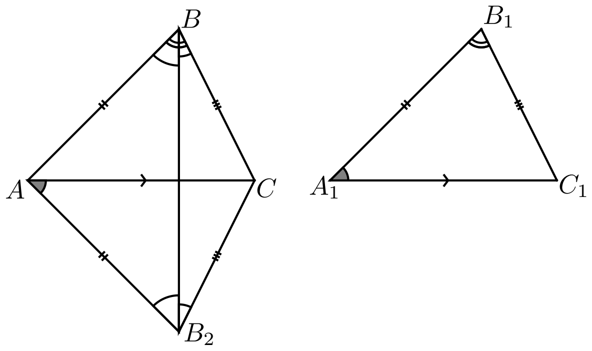
(Ilyenfajta gondolatmeneteket szoktak használni például az ígérgető politikusok is.)

Ez a példa viszonylag egyszerű, ám jól mutatja, hogyan futhatunk bele matematikai ellentmondásokba. Az olvasó kényszerítve van rá, hogy elfogadja a meggyőző hibás levezetést, ami ellentmond nyilvánvaló vagy jól ismert matematikai tételnek. (Néha ez a hiba nagyon jelentéktelen és nehezen megtalálható.) Hogy ezt szemléltessük, mutatunk egy geometriai „tételt”.

3. probléma

A következő „tétel” egy kiegészítő elemzés a háromszögek egybevágóságához. Ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögeknél $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ és $ABC\angle = A_1B_1C_1\angle$, akkor ez a két háromszög egybevágó. Ez az úgynevezett $SSA = SSA$ egybevágósági feltétel teljesülése, vagyis két oldalban és egy szögben egyeznek.

„Bizonyítás:” Vegyük fel az AB_2C háromszöget az ábrán látható módon.



Ebben a háromszögben $CAB_2\angle = C_1A_1B_1\angle$ és $AB_2 = A_1B_1$. Tehát az SAS egybevágósági feltétel szerint az $A_1B_1C_1$ és AB_2C háromszögek egybevágóak, hiszen két oldalban és közbezárt szögükben egyeznek (tudjuk, hogy $AC = A_1C_1$). Így $ABC\angle = AB_2C\angle$ és $AB = AB_2$. Most pedig húzzuk be a BB_2 szakaszt! Így megkapjuk a BAB_2 egyenlőszárú háromszöget. Következésképpen $ABB_2\angle = AB_2B\angle$. Ugyanakkor megfigyelhető, hogy $CBB_2\angle = CB_2B\angle$, tehát a CBB_2 háromszög szintén egyenlőszárú, és $CB = CB_2$. Így végül megállapíthatjuk, hogy az ACB_2 háromszög egybevágó az ACB háromszöggel, mivel három oldalban megegyeznek, tehát az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek is egybevágóak. Ezzel bebizonyítottuk a ,,tételt"?

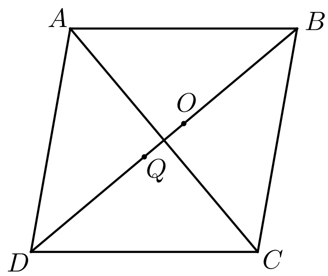
Nem kérjük, hogy megcáfolja a ,,tételünk" következtetését. Nem nehéz észrevenni, hogy a bizonyítás rossz. De hol van benne a hiba?

Nem mindig könnyű megérteni, hogy egy matematikai állítás miért igaz vagy hamis. A levezetésekben való hibakeresés képessége az egyike legfontosabb készség, amelyet egy hivatásos matematikus elsajátíthat. A matematika története tele van olyan esetekkel, amikor matematikusok hibát találtak olyan bizonyításokban, amelyeket évtizedekig helyesnek tartottak.

Mi további iskolai példákat fogunk megvizsgálni. A soron következő összes feladat tartalmaz ,,megoldást" is. Vagyis a megoldások megtalálandó hibákat tartalmaznak.

4. probléma

Adott egy $ABCD$ paralelogramma, amelyben $ABD\angle = 40°$. Az ABC és CAD háromszögek körülírt köreinek középpontjai a BD szakaszon vannak. Milyen típusú az $ABCD$ paralelogramma?



,,Megoldás:" Legyen O és Q az ABC és CAD háromszögek körülírt körének középpontja! Mivel ezekből a pontokból az AC-re bocsátott merőlegesek felezik AC-t, megállapíthatjuk, hogy OQ merőleges az AC átlóra. Ebből következik, hogy a paralelogramma átlói merőlegesek egymásra, tehát rombusz.

Tetszik a megoldás?

Néha a trükk a feladat állításában, nem pedig a megoldásában van.

5. probléma

A p és q számok kielégítik az $x^2 + px + q = 0$ egyenletet. Adjuk meg p-t és q-t.

,,Megoldás:" A másodfokú egyenlet gyökeire vonatkozó összefüggések segítségével a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} p+q &= -p \\ p \cdot q &= q \end{cases}$$

Megoldásként két számpárt kapunk: $p = q = 1$, illetve $p = 1, q = 2$.

Vannak kétségei a megoldással kapcsolatban?

6. probléma

Oldjuk meg az alábbi egyenletet: $\operatorname{tg}(x + \pi/4) = 3 \cdot \operatorname{ctg} x - 1$

,,Megoldás:" Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát az addíciós-tételek segítségével, és vezessük be új változóként $y = \operatorname{tg} x$-et. Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{y+1}{1-y} = \frac{3}{y} - 1$$

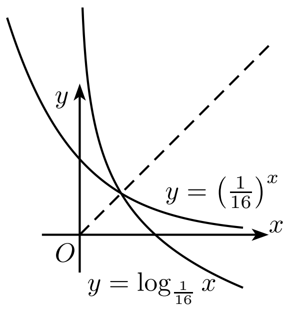
Ebből az $y = 3/5$ eredményt kapjuk, tehát $x = \operatorname{tg}^{-1}(3/5) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Hiánytalan ez a megoldás?

7. probléma

Hány megoldása van a $\log_{1/16} x = (1/16)^x$ egyenletnek?

,,Megoldás:" A jobb- és a baloldalon lévő kifejezések egymás inverzei. Ha grafikusan ábrázoljuk őket, ,,láthatjuk", hogy csak az első síknegyed felezőegyenesén van egy közös pontjuk. Tehát az egyenletnek egy megoldása van.



Van kifogása ez ellen?

A következő két feladat kicsit kilóg cikkünk fő témájából. A bennük lévő helyzetek látszólag lehetetlenek, emiatt keltik fel az érdeklődésünket.

8. probléma

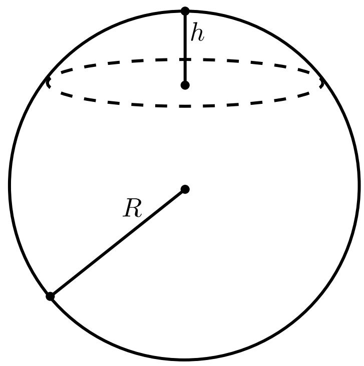
Egy egyenes körkúp lehető legnagyobb területű síkmetszetét a csúcspontján keresztül megrajzolva kaptuk meg. Kiderült, hogy így a metszet területe kétszer akkora, mint a tengelypárhuzamos metszet területe. Határozzuk meg a tengelypárhuzamos metszet csúcsánál lévő szöget!

A feladat állítása lehetetlennek tűnik, hiszen egy kúp síkmetszetei közül a tengelypárhuzamos metszetnek van a legnagyobb területe.

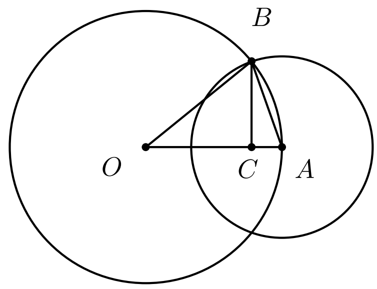
9. probléma

Egy gömb középpontja egy másik gömb felszínén fekszik. Tudjuk, hogy a második gömb első által tartalmazott részének felszíne ötöde az első gömb felszínének. Határozzuk meg a két gömb sugarának hányadosát!

A feladat megoldásához szükségünk van a gömbsüveg felszínére (az alapkör nélkül): $S = 2\pi hR$, ahol R a gömb sugara és h a süveg magassága.



,,Megoldás:"Az első és második gömb sugara legyen rendre R, illetve r. Fektessünk egy, a két középpontra illeszkedő síkot. Ekkor $OA = OB = R$ és $AB = r$. Legyen C a B-ből az OA-ra állított merőleges talppontja. Így AC annak a gömbsüvegnek a magassága, amely a második gömb első által tartalmazott rész segítségével meghatározott gömbsüveg magassága. Tehát $h = AC$, így felírva az ABC és OBC háromszögekre a Pitagorasz-tételt az alábbi egyenletet kapjuk: $r^2 - h^2/R^2\,(R-h)^2$, amiből $h = \frac{r^2}{2R}$.

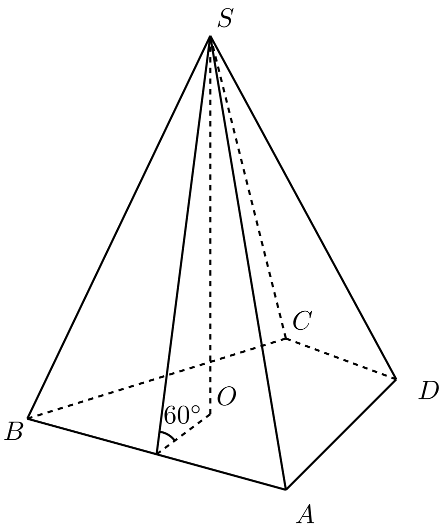


Ezt behelyettesítve a gömbsüveg alapkör nélküli felszínképletébe: $S = \pi r^2$. Ám az első gömb teljes felszíne $4\pi r^2$. Ezek szerint a második gömb első által tartalmazott részének felszíne mindig negyede az első gömb felszínének. De a feladat szövege szerint az ötöde, tehát ellentmondásba ütköztünk. Akkor a feladatnak nincs is megoldása?

10. probléma

Egy gúla alapja egy konvex négyszög, melynek valamelyik két oldala 10 egység, másik két oldala pedig 6 egység hosszú. A gúla magassága 7 egység. Mind a négy oldallap 60°-os szöget zár be az alaplappal. Határozzuk meg a gúla térfogatát!

,,Megoldás:" Mivel az összes oldallap ugyanakkora szöget zár be az alappal, az $ABCDS$ gúla S csúcsának az alapra vett merőleges vetülete egybeesik az $ABCD$ négyszög beírt körének középpontjával, O-val (6. ábra). A beírt kör sugara: $7 \operatorname{ctg} 60° = 7/\sqrt{3}$.



Az $ABCD$ négyszög területe megegyezik az ABO, BDO, CDO és DAO háromszögek területeinek összegével. Amit viszont igen könnyű meghatározni. Rendezés után megkapjuk, hogy az alap területe: $(10+6)\cdot 7/\sqrt{3} = 112/\sqrt{3}$. Tehát a gúla térfogata $784/3\sqrt{3}$. Egyetértünk a megoldással?

Megfejtések

1. probléma

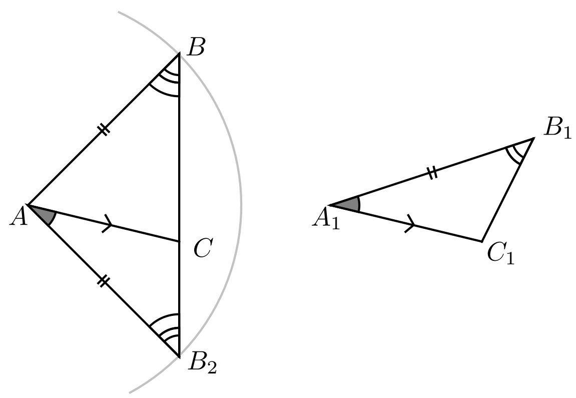
A dinnyék víztartalma eredetileg 99%, vagyis a maradék 1% szárazanyag. Ez 0.1t szárazanyag-tartalmat jelent. Az út végén ez a 0.1t már a teljes tömeg 2%-a volt (mivel ekkor a víztartalom már csak 98% volt), ami azt jelenti, hogy a teljes tömeg mindössze $\frac{100\%}{2\%}\cdot 0.1 = 5$t volt, mire a dinnyék a városba értek.

2. probléma

Amikor a 13\$-hoz hozzáadtunk 3\$-t, kétszer számoltuk az inas által elivott pénzt. A 13\$-ból 10\$ az, amit a tábornok kapott, és 3\$, amit az inas elköltött.

3. probléma

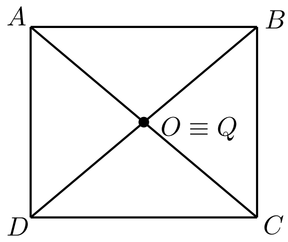
Ha a BB_2 szakasz áthalad a C ponton, ahogy az ábrán látható, az indoklás hamis. Ebben az esetben, bár $CBB_2\angle$ és $CB_2B\angle$ egyenlőek, értékük 0, emiatt nem használhatjuk fel az egyenlőszárú háromszögek tulajdonságait.



Ezen egybevágsósági feltétel esetén ki kell kötni, hogy a két oldal közül a *nem kisebbikkel szemközti* szögben egyeznek meg.

4. probléma

Előfordulhat, hogy mindkét említett kör középpontja egybeesik a paralelogramma középpontjával, ebben az esetben $ABCD$ téglalap.



5. probléma

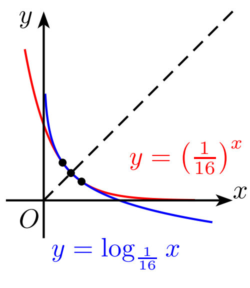
A szöveg nem mondja, hogy az egyenletnek nincs más gyöke p-n és q-n kívül. Ugyancsak megoldás a $p = q = -\frac{1}{2}$ számpár, ebben az esetben az 1 is kielégíti az egyenletet. (EP: $p = q = 0$???)

6. probléma

Az egyenlet átalakításakor leszűkítettük a benne szereplő függvények értelmezési tartományát, így a következő megoldások sorozata elveszett: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

7. probléma

Az ábra rossz. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az $\frac{1}{2}$ és az $\frac{1}{4}$ számok mindketten kielégítik az egyenletet. Ezek a megoldások az $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ és az $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{1}\right)$ pontokhoz tartoznak az $\log_{\frac{1}{16}} x$ és az $\left(\frac{1}{16}\right)^x$ függvények ábrázolásakor. Ezek a függvények szimmetrikusak az $x = y$ egyenesre, tehát ezen az egyenesen is metszik egymást.



Helyes megoldás:

Analízis segítségével könnyen bizonyítható, hogy az egyenletnek pontosan három megoldása van. Ugyancsak könnyen belátható, hogy az $\log_a x = a^x$ típusú egyenleteknek nincs háromnál több megoldása, csak azt kell belátni, hogy a különbségük által meghatározott függvény maximum 3 helyen metszi a tengelyt, azaz e függvény deriváltja legfeljebb kétszer veszi fel a 0 értéket.

A $f(x) = \log_{\frac{1}{16}} x - \left(\frac{1}{16}\right)^x$ lokális szélsőértékeit keressük, azaz a $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln \frac{1}{16}} - \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{16}$ zérushelyei kellenek.

$\frac{1}{x\cdot\ln\frac{1}{16}} - \left(\frac{1}{16}\right)^x \cdot \ln\frac{1}{16} = 0$ kicsit átalakítva: $\frac{1}{x\cdot\ln^2\frac{1}{16}} = \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

Ennek $\frac{1}{16}$ alapú logaritmusát véve: $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{x\cdot\ln^2\frac{1}{16}} = x$.

Ezt kicsit átalakítva: $-\log_{\frac{1}{16}} x = x + \log_{\frac{1}{16}} \ln^2\frac{1}{16}$.

Az egyenlet mindkét oldalát ábrázolva látható, hogy két helyen metszik egymást.

8. probléma

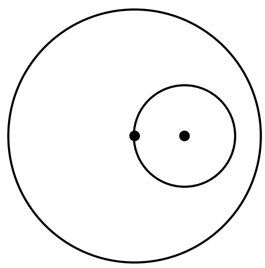
A kúp csúcsán áthaladó metszetek egyenlőszárú háromszögeket határoznak meg. Jelöljük α-val a tengelypárhuzamos metszet csúcsánál lévő szöget, ϕ-vel pedig egy tetszőleges másik csúcsánál lévőt. Ekkor $0 < \phi \leq \alpha$.

Ezen metszetek területe $\sin\phi$-vel arányos. Tehát ha $\alpha \leq 90°$, akkor a tengelypárhuzamos metszeté a legnagyobb terület. De ha $\alpha > 90°$, akkor a legnagyobb területtel rendelkező metszet az, amire $\phi = 90°$.

A feladat feltételei miatt $\alpha > 90°$ és $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, tehát $\alpha = 150°$.

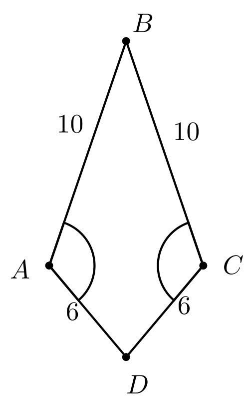
9. probléma

Nem vettük figyelembe azt az esetet, amikor a második gömb teljesen az első belsejében van, ekkor 5 a második gömb felületének aránya az elsőéhez. Tehát a sugaraik aránya $\sqrt{5}$.

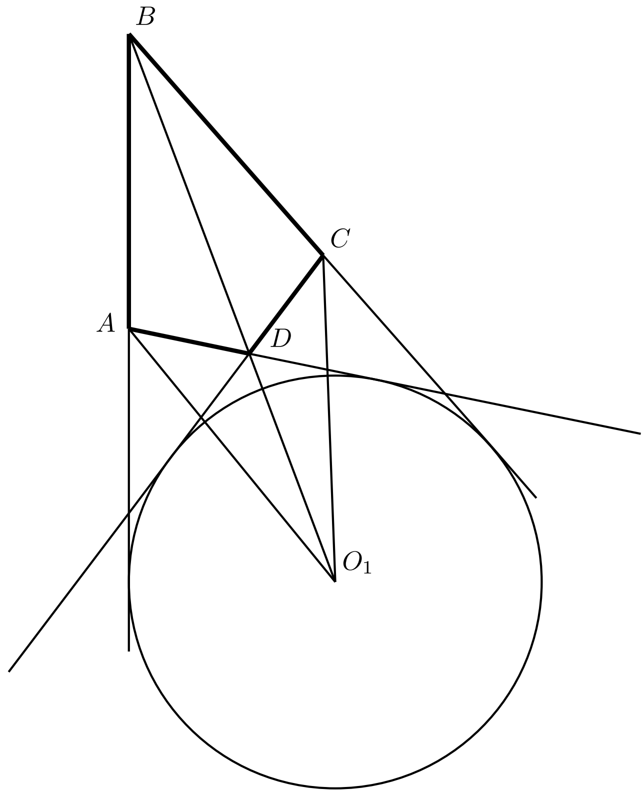


10. probléma

Vizsgáljuk azt az $ABCD$ négyszöget, amelyben $AB = BC = 10$ és $AD = DC = 6$. Az A-nál és C-nél lévő szögek egyenlők (hiszen a négyszög deltoid), $ABCD$ területe akkor maximális, ha ez a két szög derékszög. Tehát a lehetséges legnagyobb terület 60 egység. A megoldásban viszont $T_{ABCD} = 112/\sqrt{3}$ adódott, ami több, mint 60. Ezek szerint nem létezik a feltételeknek megfelelő gúla?



A feladat leírásából az nem következik, hogy a csúcspont vetülete a beírt kör középpontja kell legyen, csak az, hogy az AB, BC, CD, DA egyenesektől egyenlő távol kell lennie, s ez a távolság $\frac{7}{\sqrt{3}}$. Ez a pont a négyszög területén kívülre is eshet. Nevezzük el O_1-nek.

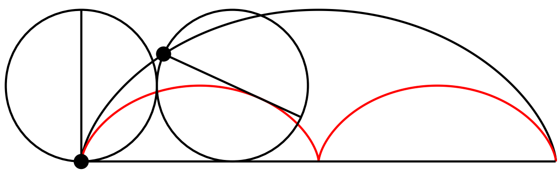


Ekkor az $ABCD$ négyszög területe felírható a következő módon: $(ABO_1 + BCO_1) - (CDO_1 + DAO_1)$. Ezt kiszámolva a négyszög területe $(10 - 6) \cdot 7\sqrt{3} = 28\sqrt{3}$.

Tehát a gúla térfogata $\frac{196}{\sqrt{3}}$.

Salát Máté emlékére

1. Egy szabályos érmét addig dobálunk, amíg legalább egyszer kapunk fejet is és írást is. Mennyi a dobások számának a várható értéke?
2. Egy ellipszis alakú asztallap ,,hossza" 160 cm, ,,szélessége" 1 m. Le lehet-e takarni az asztallapot teljes egészében egy téglalap alakú, 140 cm×130 cm-es terítővel?
3. Tegyük fel, hogy x és y racionális számok, amelyekre $x^5 + y^5 = 2x^2y^2$. Bizonyítsuk be, hogy $1 - xy$ egy racionális szám négyzete.
4. Mi azon pontok mértani helye a síkban, amelyekből egy adott parabolához egymással 30°-os szöget bezáró érintők húzhatók?
5. Bontsunk fel egy kört egybevágó síkidomokra úgy, hogy legalább az egyik darab ne tartalmazza a kör középpontját, még határán sem.
6. Egy cikloisba (csúszásmentesen gördülő kör egy pontjának a pályája) ,,beletehetünk" egy feleakkora cikloist. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti cikloist leíró kör átmérője végig érinti a beírt cikloist.



7. Egy repülő tetszőleges irányú 100 km/h-s szélben indul és tudjuk hogy szélcsendben óránként 1000 km/h-s sebességre képes. A repülőnek 5 óránYI üzemanyaga van. Legfeljebb milyen messzire juthat a kiindulási ponttól, ha azt szeretnénk, hogy vissza is tudjon repülni?