Háromszögekre darabolás

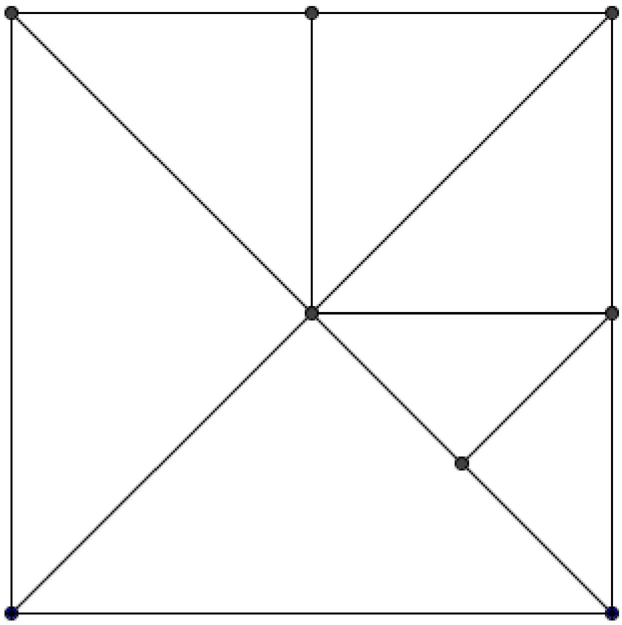
Ebben a cikkben különféle problémákat fogunk megvitatni olyan sokszögekről, amelyeket háromszögekre darabolunk. Például egy négyzetet sokféle módon lehet háromszögekre vágni (lásd 1-4. ábra).

Vizsgáljuk meg figyelmesen ezeket az ábrákat! Az első és negyedik ábrán a háromszögek derékszögűek, a második ábrán pedig mindegyik tompaszögű. A kérdés lehet a következő: fel tudunk-e szeletelni egy négyzetet olyan háromszögekre, amelyek mindegyike hegyesszögű?

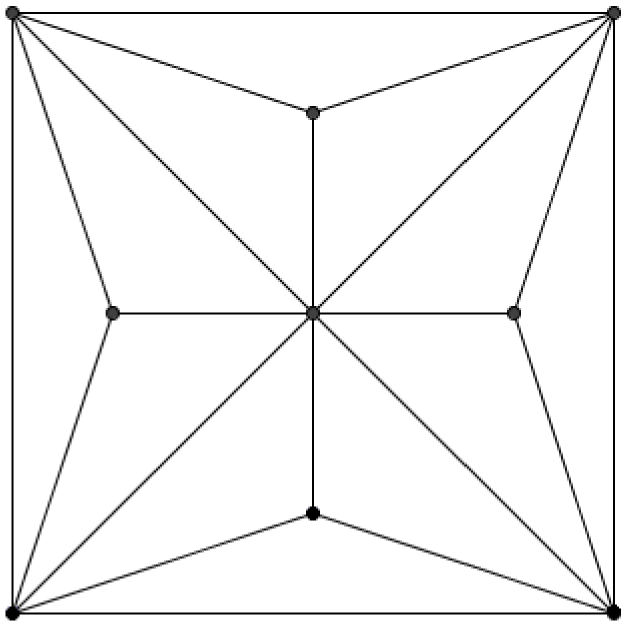
Továbbá, mindegyik ábrán van legalább két háromszög egy közös oldallal (a 4. ábrán minden háromszögnek van olyan szomszédja, amelyikkel nincs közös oldaluk). Mindig ez az eset áll fenn?

A 2. és 3. ábrán mindegyik háromszög ugyanakkora területű és páros számú van belőlük. Kérdés fel lehet-e vágni egy négyzetet páratlan számú, egyenlő területű háromszögre?

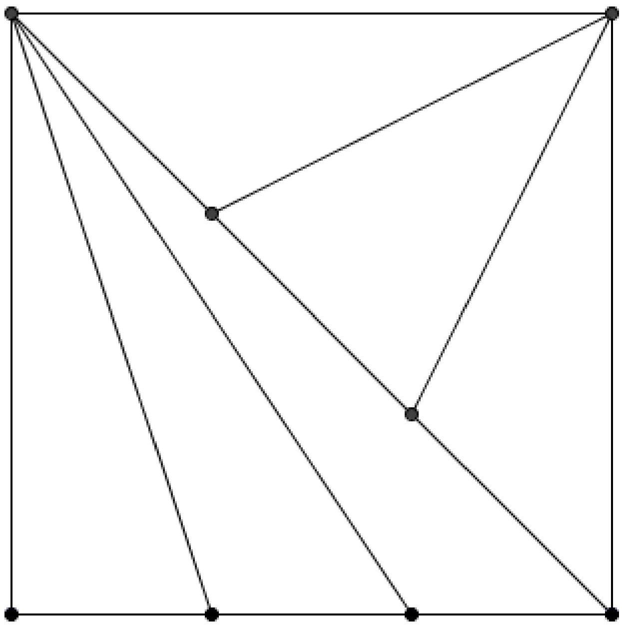
Általánosabban vizsgálva, érdekes lesz kitalálni, hogy egy sokszöget bizonyos feltételek mellett fel tudunk-e darabolni háromszögekre. Ezek a feltételek előírhatják a háromszögek szögeit, számukat, elrendezésüket, stb.



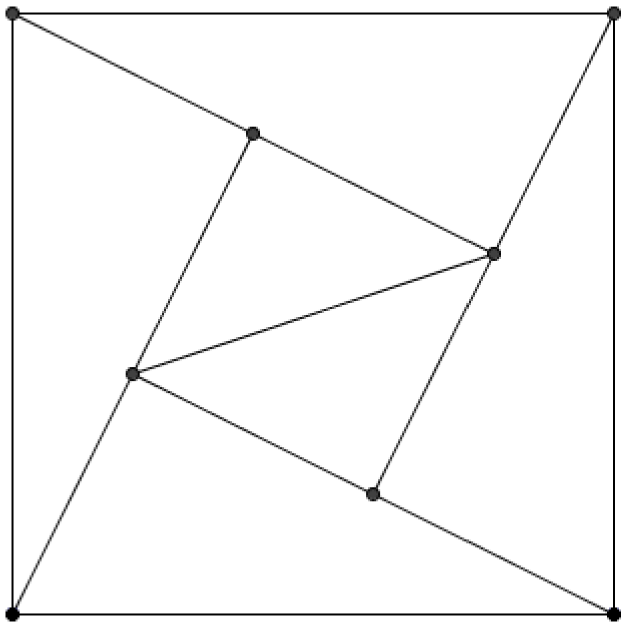
1. ábra



2.ábra



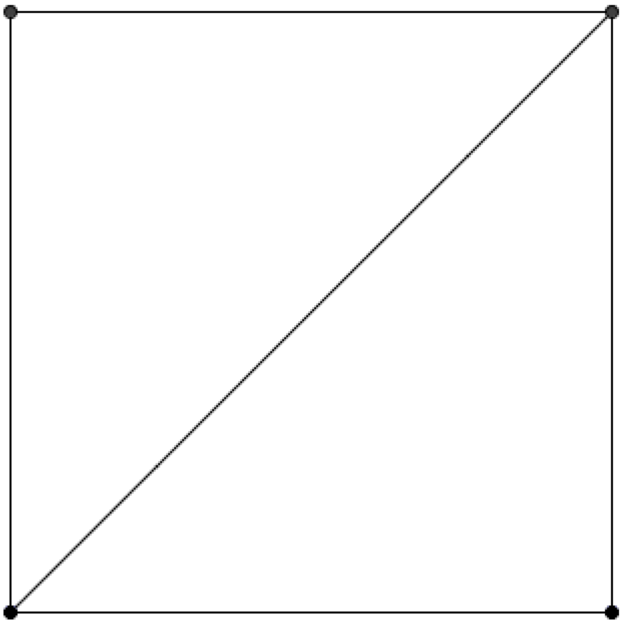
3.ábra



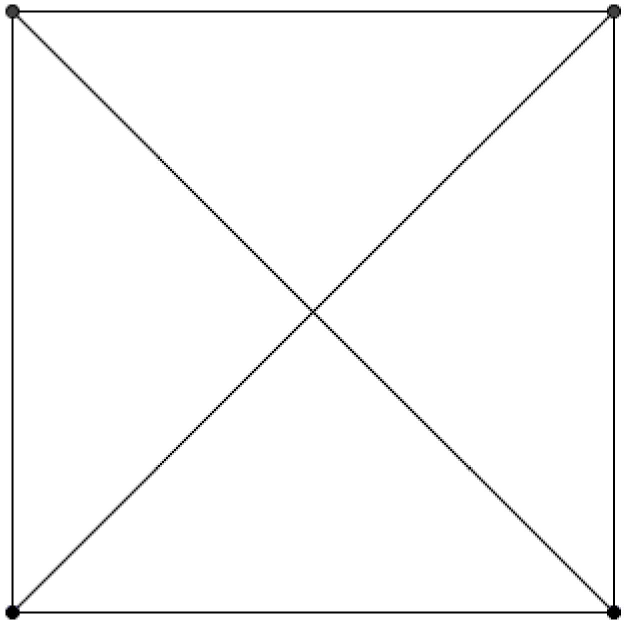
4.ábra

Hegyesszögű háromszögek

1. Probléma: Lehetséges-e egy négyzetet kizárólag hegyesszögű háromszögekre darabolni? Természetes azzal kezdeni ennek a problémának a megoldását, hogy megpróbálunk az elvárt módon feldarabolni egy négyzetet. A kezdés lehet az, hogy felvágjuk a négyzetet egy (5. ábra) vagy két (6. ábra) átlója mentén.

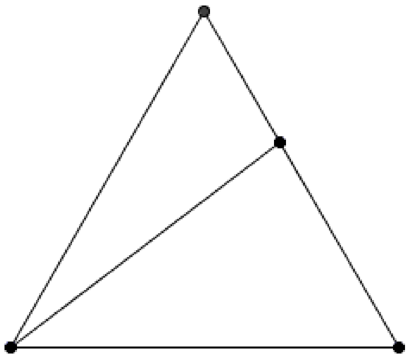


5.ábra

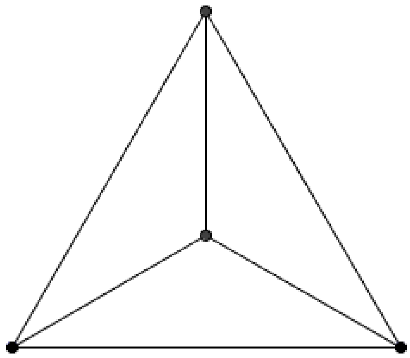


6.ábra

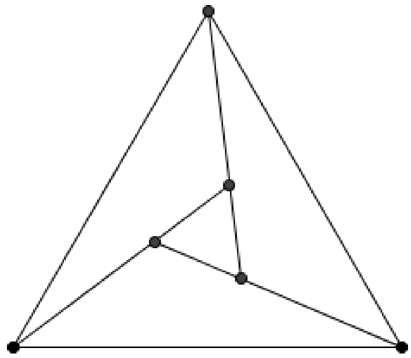
Mindkét esetben leegyszerűsítjük a problémát arra, hogy hogyan vágjunk fel egy derékszögű háromszöget hegyesszögűekre. Hogyan tudunk szétvágni egy háromszöget több másik háromszögre? Három egyszerű lehetőség van erre (7-9. ábra).



7.ábra



8.ábra



9.ábra

Mindhárom ábrán legalább egy, vagy több eredményül kapott háromszög tompaszögű! Ha most megkérjük az olvasót, hogy próbáljon feldarabolni néhány háromszöget – valószínűleg azzal a feltételezéssel fogja abbahagyni, hogy a válasz a kérdésünkre nem. Ez a helyzet ismerős! Vagy folytatjuk a próbálgatást, hogy megtaláljuk a várt eredményt, vagy kereshetünk egy bizonyítást arra, hogy ilyen felosztás nem létezik. El lehet gondolkodni a problémán; a válasz egy kicsit később meg is lesz, előtte azonban egy másik problémát nézünk meg.

Tiszta határú háromszögek

Az összes fenti ábrán van olyan háromszög, melynek oldalai nem tartalmaznak semelyik más háromszögből csúcspontot. Az ilyen háromszöget nevezzük „tiszta határú háromszögnek”!

2. probléma: Lehetséges-e egy konvex n-szöget úgy háromszögekre bontani, hogy semelyik háromszögnek ne legyen tiszta határa?

Azt fogjuk bizonyítani, hogy ilyen felbontás nem létezik. Indirekt tegyük fel, hogy létezik ilyen felbontás. Legyen T a felbontás során keletkezett háromszögek száma, és V_{int} a „belső” csúcspontok, vagyis a háromszögek élein fekvő csúcspontok száma. Világos, hogy $V_{int} \geq T$, mert a feltevésünk alapján minden háromszögnek legalább egy belső csúcspontot kiosztunk, és egy csúcspont nem lehet egyszerre két háromszögnél belső csúcspont.
Azt is tudjuk, hogy az összes háromszög szögeinek az összege: $T \cdot 180^o$. A belső csúcspontokra illeszkedő szögek összege: $V_{int} \cdot 180^o$, a poligon csúcspontjainál lévő szögek összege (amik egyúttal a háromszögekre való felbontásnál is szerepelnek) pedig: $(n-2) \cdot 180^o$.
Tehát $T \cdot 180^o \geq (n-2) \cdot 180^o + V_{int} \cdot 180^o > V_{int} \cdot 180^o$ (mivel az n>3 esetet vizsgáljuk)
Innen (180-cal osztva) adódik $T > V_{int}$, ellentétében $V_{int} \geq T$ feltétellel.
Ezzel igazoltuk az első tételünket:

1.Tétel: Ha egy konvex n-szöget fel van darabolva háromszögekre, akkor mindig van a felbontás során legalább egy olyan háromszög, amelynek tiszta a határa.

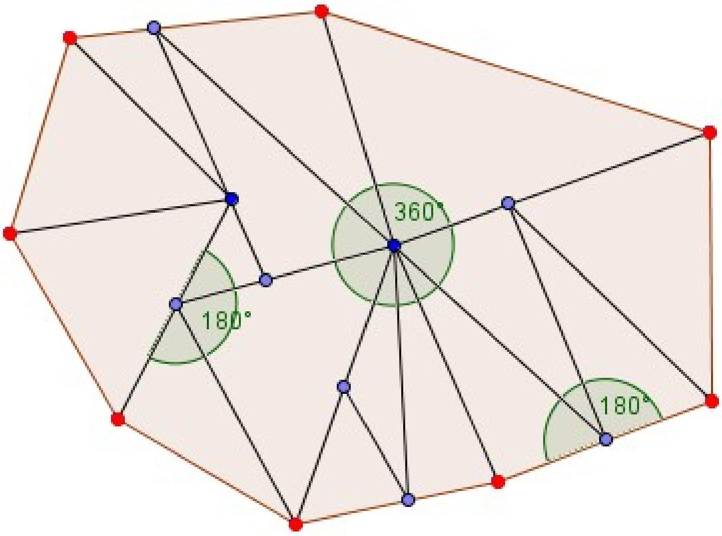
1. feladat: Igaz –e ez a tétel nem konvex polygonokra?

Közös oldalak nélkül

3. probléma: Lehetséges-e úgy háromszögekre feldarabolni egy n-szöget, hogy semelyik két háromszögnek ne legyen közös oldala?

Kezdjük a legegyszerűbb esettel, azzal ahol n=3. A 9. ábrán látszik hogy van ilyen felbontás. Most próbáljunk hasonló módon feldarabolni egy négyzetet! Az elsőtől a negyedik ábráig minden négyzet tartalmaz két olyan háromszöget amelynek van közös oldala. Megint el kell döntenünk, hogy megpróbáljuk bebizonyítani hogy nem létezik ilyen felbontás, vagy megpróbálunk keresni megfelelő eredményt.
Ki fog derülni, hogy nincs ilyen felbontás- tehát akárhogy is darabolunk fel egy konvex n-szöget háromszögekre, (n≥4), mindig van közöttük legalább két olyan háromszög amelyeknek van közös oldala. A bizonyítás nem egyszerű, ezért előtte nézzünk egy fontos segédtételt!

A V≤ T+2 egyenlőtlenség:
2. Tétel: Ha egy konvex n-szöget T darab háromszögre bontottunk, és V az összes háromszög csúcspontjainak a száma, akkor V≤ T+2.



10. ábra

Bizonyítás: Az összes háromszög szögeinek az összege: $T\cdot 180^o$. Máshogy is kiszámolhatjuk ezt az összeget. Osszuk a csúcspontokat két csoportra. Az első csoportban az adott n-szög csúcspontjai lesznek. (Ezek pirosak a 10. ábrán.) Az összes többi csúcspont a második csoportba tartozik (ezeket kékre színeztük a 10. ábrán). Világos hogy a piros csúcspontú szögek összege egyenlő az n-szög szögeinek az összegével, tehát a piros szögek összege: $(n-٢)\cdot ١٨٠^o$.
Tekintsünk egy tetszőleges kék csúcspontot. Latszik hogy a rá illeszkedő szögek összege vagy 180 fok, vagy 360 fok (lásd a 10. ábrát); de semmiképpen sem kevesebb mint 180 fok. Mivel $V-n$ darab kék csúcspont van, a kék szögek összege ≥ $(V-n)\cdot$[illegible]^o. Tehát, $\underline{T\cdot 180^o}$ = az összes háromszög szögeinek az összege = a piros szögek összege+ a kék szögek összege ≥
$(n-2)\cdot 180^o+(V-n)\cdot 180^o=\underline{(V-2)\cdot 180^o}$.
Innen (180-cal osztva, majd mindkét oldalhoz 2-t adva) a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk: **V≤ T+2**.
Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk!

Tételezzük fel hogy felvágtunk egy konvex n-szöget háromszögekre, úgy hogy nincs olyan két háromszög aminek lenne közös oldala.

Számoljuk meg azon szakaszokat, melyek háromszögoldalak. Ezeket a szakaszokat, oldalaknak fogjuk hívni és számukat S-sel jelöljük. Az biztos hogy

S=3T

mivel minden háromszögnek három oldala van és semelyik oldal nem esik egybe egy másik háromszög oldalával.

Két részre osztjuk a csúcspontok és az oldalak halmazát is:

I.: Határpontok és határvonalak- ezek azok amelyek rajta fekszenek az n- szög oldalain vagy maguk is az n-szög oldalai. A határon fekvő csúcspontok számát V_b -vel, a határon fekvő oldalak számát (az n-szög oldalait) S_b -vel fogjuk jelölni.

II.: Belső pontok és oldalak – azok amelyek nem fekszenek az n-szög oldalain. Számukat V_{in} -nel és S_{in} -nel fogjuk jelölni.

Egyértelmű hogy:
$$V=V_b+V_{in}$$
és
$$S=S_b+S_{in}$$

Most kapcsolatot keresünk a határon fekvő pontok és az n-szög oldalai közt. Ezt egy „körbeutazással” csináljuk, körül megyünk a n-szög oldalain. Az út közben e csúcsok és az oldalak váltakoznak ami azt jelenti, hogy mind a kettőből ugyanannyi van.

$$S_b = V_b$$

Van kapcsolat a belső oldalak illetve pontok száma között is, ez már egy kicsit bonyolultabb.

$$3 \cdot V_{in} \geq S_{in}$$

Hogy bebizonyítsuk ezt az egyenlőtlenséget kihasználjuk azokat a belső pontokat amelyek rajta vannak egy belső oldalon és nem csak csúcsok. Ezeket belső-oldalpontoknak fogjuk nevezni és számukat V_{int} -tel fogjuk jelölni.

Egyértelmű hogy:

$$V_{in} \geq V_{int}$$

Ennek következtében a $3 \cdot V_{in} \geq S_{in}$ egyenlőtlenség bebizonyításához elegendő az ha belátjuk azt, hogy $3 \cdot V_{int} \geq S_{in}$. Ez be lesz bizonyítva ha képesek leszünk minden belső ponthoz hozzá rendelni három belső oldalt, oly módon hogy minden pont megfelel legalább egy oldalnak.

Meg kell bizonyosodnunk arról, hogy minden belső oldal hozzárendelhető legalább egy belső csúcshoz. Ez nyilvánvalóan igaz a csúcsot tartalmazó oldalakra. Amennyiben pedig egy belső oldal nem tartalmaz csúcsokat, biztosan része egy másik háromszög oldalának. Ezért legalább egy csúcsa oldalbontó csúcs, és ehhez a csúcshoz rendelhetjük hozzá a szóban forgó oldalt.

Ezért $3V_{int} >= S_{in}$, és ebből következik, hogy $3V_{in} >= S_{in}$. Ekkor

$3T = S = S_{in} + S_b <= 3V_{in} + V_b = 3(V_{in} + V_b) - 2V_b = 3V - 2V_b <= 3V - 2n$.

Ebből megkapjuk a $V >= T + 2/3n$ egyenlőtlenséget.

Mivel $n >= 4$, ide jutottunk: $V >= T + 8/3 > T + 2$, amely ellentmond a korábban belátott segédtételnek.

Így a következőt bizonyítottuk:

3. tétel: Ha egy n-szöget (n>=4) háromszögekre osztunk fel, legalább két háromszögének van közös oldala.

Az alábbi feladatokra nem térünk ki előadásunkban, de álljanak itt az érdeklődőknek.

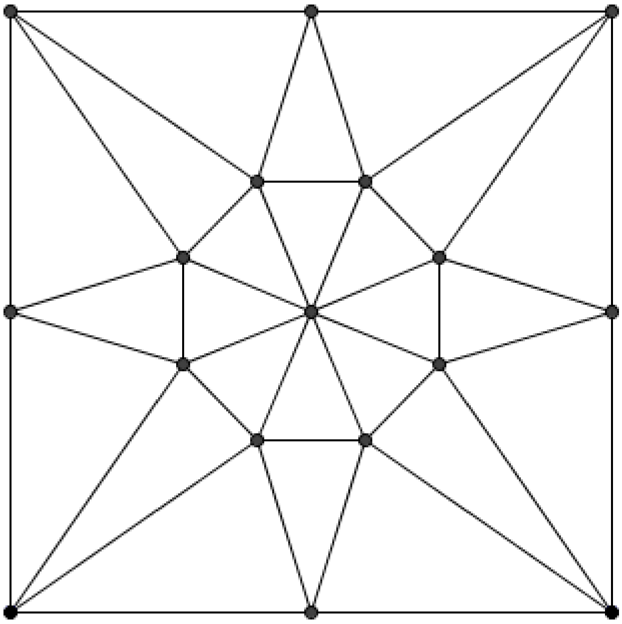
2.feladat: Osszunk fel egy háromszöget T darab háromszögre úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös oldala! Jelölje V a felbontásban szereplő összes háromszögcsúcs számát! Bizonyítsuk, hogy V = T + 2 .

3.feladat: Bontsunk egy n-szöget (n>=4) háromszögekre! Bizonyítsuk, hogy legalább n -3 olyan szakasz van, mely közös oldala két háromszögnek!

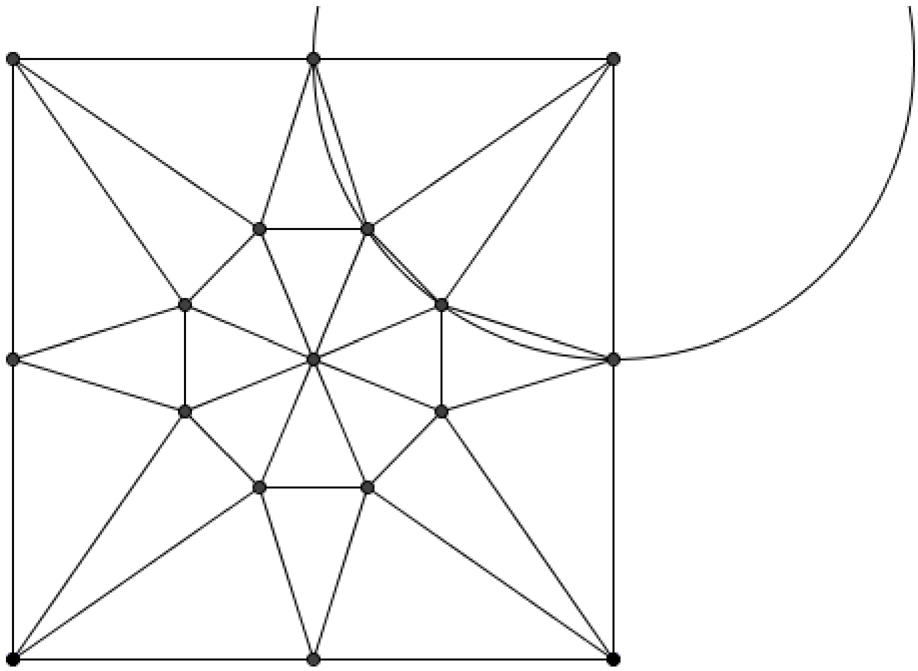
4.feladat: A kettes és a hármas tétel felteszi, hogy a sokszög konvex. Teljesülnek ezek a tételek konkáv sokszögekre is?

Vissza a hegyesszögű háromszögekhez

Két probléma maradt a cikk elejéről. Korábban úgy tűnt, hogy nem fogjuk tudni csupa hegyesszögű háromszögre darabolni a négyzetünket. Habár nem tudtuk megcsinálni az első próbálkozásra, de a felosztás megvalósítható, ahogy látható az a 12. ábrán is!



12./a ábra



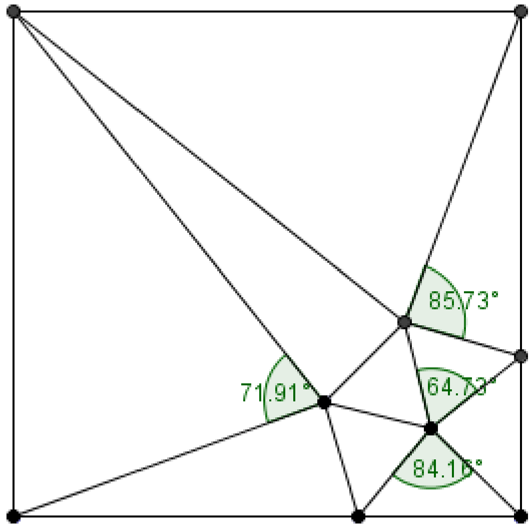
12./b ábra

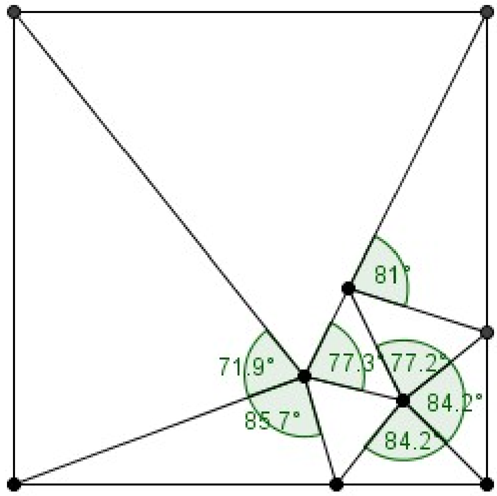
(A 12./b ábrát csak azért rajzoltuk fel, hogy megmutassuk, hogy úgy is választhatók a háromszögoldalak, hogy minden háromszög -amellett, hogy hegyesszögű- egyenlőszárú is legyen!)

Feladatok

5.feladat: A 12. ábrán 24 háromszög látható. Meg lehet-e valósítani ugyanezt kevesebb háromszöggel?

A következő oldalon megmutatunk két felbontást. Az egyiket 10-ből (szimmetrikusan), a másikat 9-ből. Kérdés (erre nem tudtunk válaszolni), hogy 8-ból meg lehet-e csinálni a felbontást?!





13./a ábra **13./b ábra**

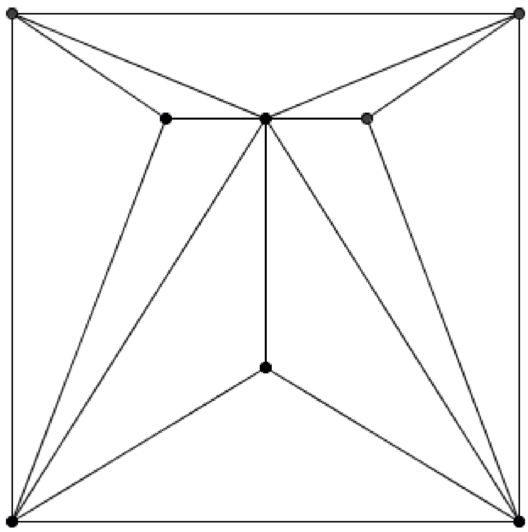
6.feladat: Igazoljuk, hogy minden konvex sokszöget szét lehet vágni hegyesszögű háromszögekké.

Háromszögek egyenlő területtel

4.probléma. Lehetséges-e, hogy szét tudunk darabolni egy négyzetet páratlan számú egyenlő területű háromszögre.
E probléma hasonlít a fenti problémákhoz. Ugyanakkor sokkal nehezebb a választ megkapni rá. A válasz nem. A szerző nem tudta megmutatni ezt a tényt elemi módszerek segítségével. Egy bonyolult megoldás a 1999-es Július/Augusztusi Kvantum „2-adic Numbers” című cikkében megtalálható, előadásunk idő (és ismeret) hiányában erre nem tud kitérni.

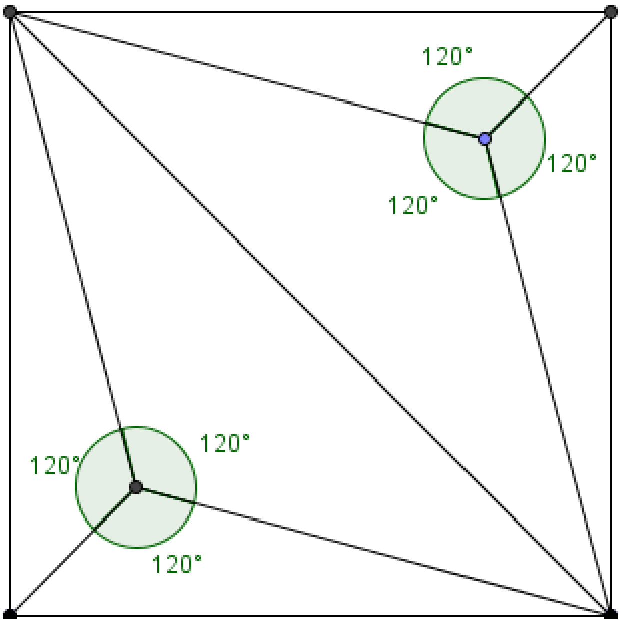
Változatos problémák háromszögdarabolásokra

Érintettünk néhány problémát, ami a sokszögek háromszögekké való darabolásával foglalkozott. Számos egyéb érdekes problémát fel lehet vetni, és ezek mindegyike lehet a tárgya egy hasonló kis cikknek. Néhány érdekes probléma teljesség igénye nélkül:
4. probléma: A 2. ábrán a négyzet 12 db tompaszögű háromszögre van vágva, a 14. ábrán pedig 10 db-ra. Mennyi az a minimális számú tompaszögű háromszög amennyire szétbontható egy négyzet?

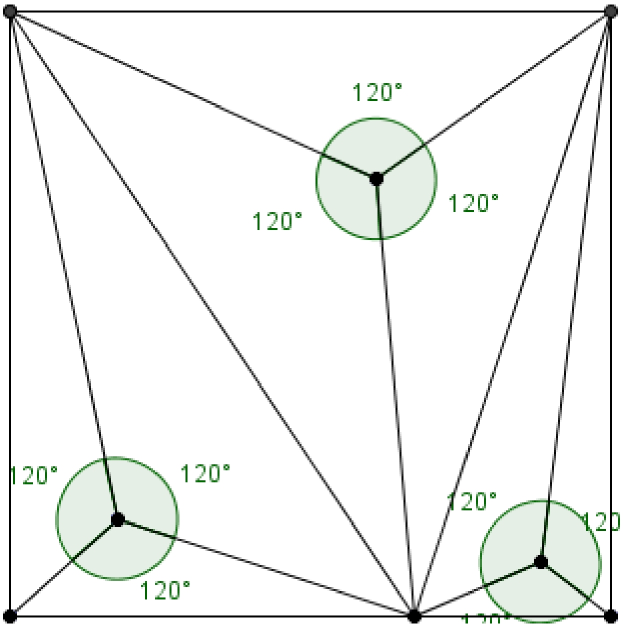


14.ábra

És akkor a mi próbálkozásunk, amivel megmutatjuk, hogy hatból meg lehet csinálni, egyúttal olyan felbontásra is példát adunk, ahol minden háromszögnek van egy adott nagyságú (itt 120 fokos) szöge:



15./a ábra



15./b ábra

Az ábráknál azt a tényt használtuk ki, hogy hegyesszögű és derékszögű háromszögek esetén az oldalak fölé emelt 120 fokos szöghöz tartozó látószögkörívek egy ponton mennek át, és ezen pontból bármely háromszögoldal 120 fokos szög alatt látszódik. (A második ábrát azért rajzoltuk meg, hogy megmutassuk, hogy négyzet felbontható úgy is 120 fokos háromszögekre, hogy a háromszögek nem egybevágók!)

<u>5. probléma:</u>. Egy négyzetet szét lehet-e vágni háromszögekké, úgy, hogy nincs a felbontás során két egybevágó (egyforma) háromszög, de mindegyik háromszög

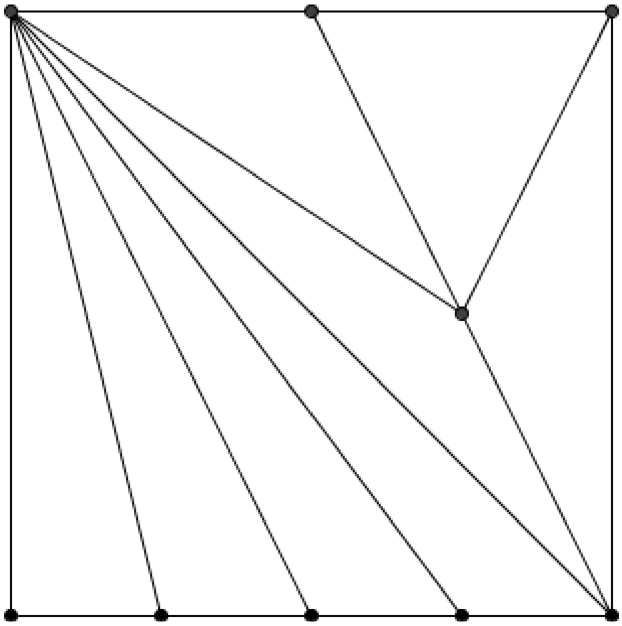
I. derékszögű háromszög,
II. egyenlő szárú háromszög,
III. egyenlő szárú, derékszögű háromszög,
IV. hasonló háromszög,
V. egyenlő a kerületük,
VI. azonos területű?

<u>Megoldások:</u>

<u>5. probléma/ VI:</u> Egyenlő területű , de nem egybevágó háromszögekre bontás

Felhasznált tétel: A háromszöget egy súlyvonala két egyenlő területű háromszögre bontja.

Ha felveszünk egy négyzetet és behúzzuk az egyik átlóját, akkor 2 db egyenlő területű, de egybevágó háromszöget kapunk. Az egyik háromszög egyik oldalát (ne az átfogót) felezzük meg, és húzzuk be az ehhez tartozó súlyvonalat. Újabb 2 db egyenlő területű háromszöget kaptunk. Most ennek a 2 háromszögnek (a már felezett oldalon) felezzük meg Az oldalait és húzzuk be az ehhez tartozó súlyvonalakat. 4 db egyenlő területű, nem egybevágó háromszöget kaptunk. Most foglalkozzunk a másik derékszögű háromszöggel: felezzük meg az egyik oldalát (az eredeti négyzet egyik oldala legyen) és húzzuk be a hozzá tartozó súlyvonalat: 2 db egyenlő területű háromszöget kaptunk. Felezzük meg a közös oldalt és húzzuk be az ehhez tartozó 2 db súlyvonalat. Eredményül 8 db egyenlő területű, de nem egybevágó háromszöget kapunk. (16.ábra)

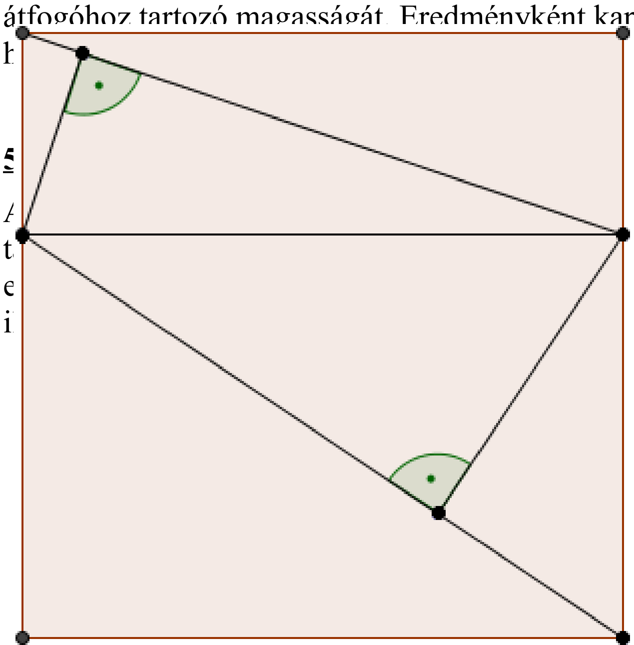


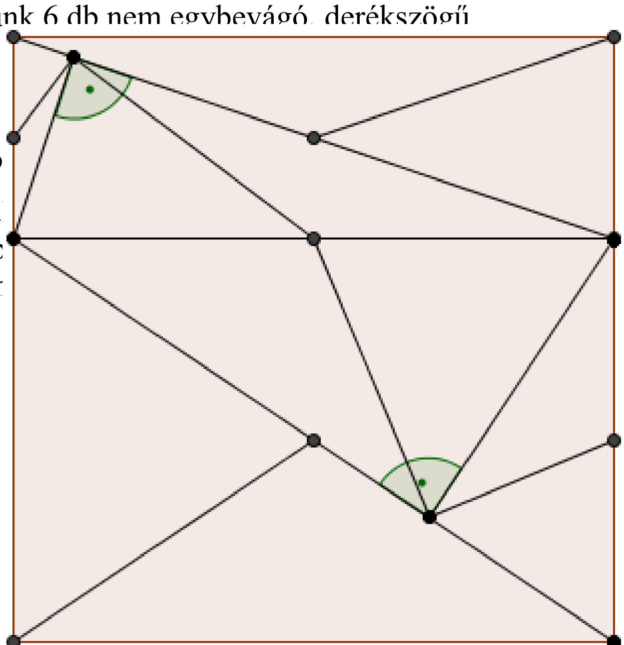
16. ábra

<u>5. probléma/ I:</u> Derékszögű, de nem egybevágó háromszögekre:

Vegyünk fel egy négyzetet és húzzunk be egy olyan szakaszt benne , ami párhuzamos valamelyik négyzetoldallal , de nem felezi a másik 2 oldalt. Húzzunk be mindkét téglalapban egy-egy átlót, de úgy, hogy ne legyen közös pontjuk (ne induljanak ki közös csúcsból).

Ha ez kész, akkor húzzunk be 2 db külön-külön téglalapban található derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságát. Eredményként kapunk 6 db nem egybevágó, derékszögű

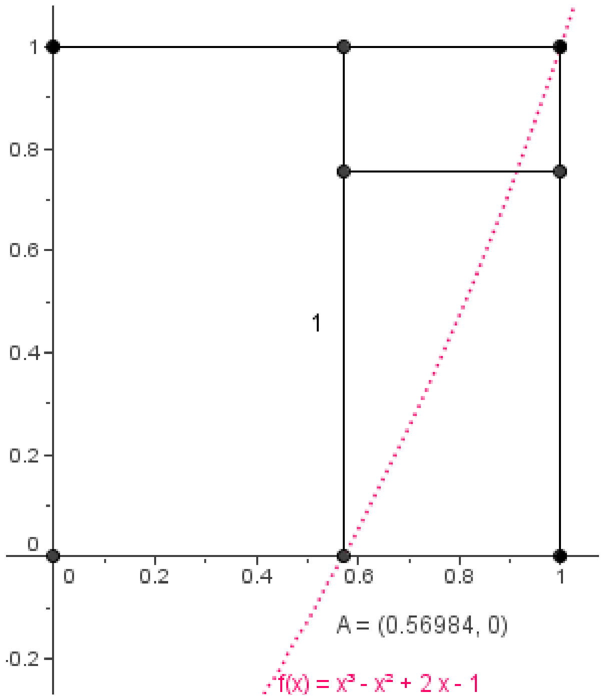




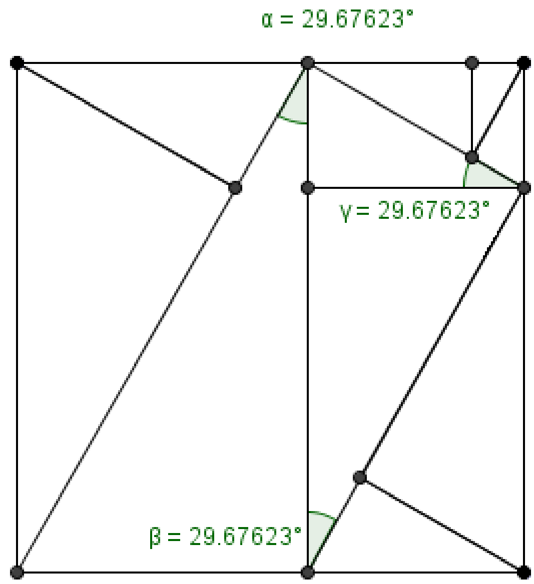
17.ábra **18.ábra**

5. probléma/ IV: Hasonló, de nem egybevágó háromszögekre bontás.

Először megpróbáljuk felbontani a négyzetünket három darab hasonló, de nem egybevágó téglalapra. Ez meg is tehető a 18./a ábrán látható módon! Ahhoz, hogy ezt igazoljuk a „bal oldali" legnagyobb téglalap oldalait 1-gyel és x-szel jelölve, az aránypárokat végig számolva (minden téglalap oldalainak aránya: x/1=x) az $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek valós megoldása 0 és 1 közé esik, (ha $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ jelölést bevezetjük $f(0) = -1; és\ f(1) = 1$ miatt ez látható) körülbelül 0,56984. Innentől a 18.b ábra alapján a megfelelő egymáshoz hasonló derékszögű háromszögeket még tovább bontva az átfogóhoz tartozó magasságokkal a megfelelő felbontást kapjuk.



18./a ábra



18./b ábra

6.probléma: Szét lehet-e vágni egy négyzetet

I. „nagyon tompaszögű" háromszögekké, azaz szét lehet-e vágni egy négyzetet úgy, hogy mindegyiknek az egyik szöge nagyobb, mint 120°? (A pontosan 120-as esetet fent már láttuk!) Vagy akár nagyobb, mint 179°?

II. „közel egyenlő" háromszögekké, például amiknek minden szöge kisebb, mint 65°?

III. Olyan háromszögekké, amiknek minden szöge adott (pl. 30°, 60°, 90°)

IV. A négyzetet szét tudjuk-e bontani olyan háromszögekké, amelyeknek minden szöge adott „alfa" értéktől kisebb Találjuk meg az összes ilyen alfát.

Megoldások:

6. probléma/ II:

Fel lehet-e bontani egy négyzetet „közel egyenlő" háromszögekre úgy hogy a háromszögek szögei ne legyenek nagyobbak mint 65 fok?

Válasz : **Nem**

Bizonyítás: Vegyünk egy háromszöget aminek minden szöge kisebb mint 65 fok. Ha van két 65 fokos szög akkor a harmadik, a legkisebb 50 fokos. Tehát a szögek mérete 65-50 fok között mozog.

Ha vesszük a két legkisebb szöget és összeadjuk őket akkor az összeg nagyobb lesz mint 90. Emiatt nem lehet feldarabolni a négyzet egy 90 fokos szögét két kisebbre. (mert 50+50 az 100 és az több mint 90)

<u>7.probléma:</u> Szét lehet-e vágni egy négyzetet háromszögekké úgy, hogy minden háromszögnek pontosan

I.) két szomszédja,
II.) három szomszédja,
III:) n darab szomszédja legyen (,ahol n egy adott szám)?

Azt, hogy mit tekintünk szomszédos háromszögeknek két különböző módon is megfogalmazhatjuk:két háromszög szomszédos, ha

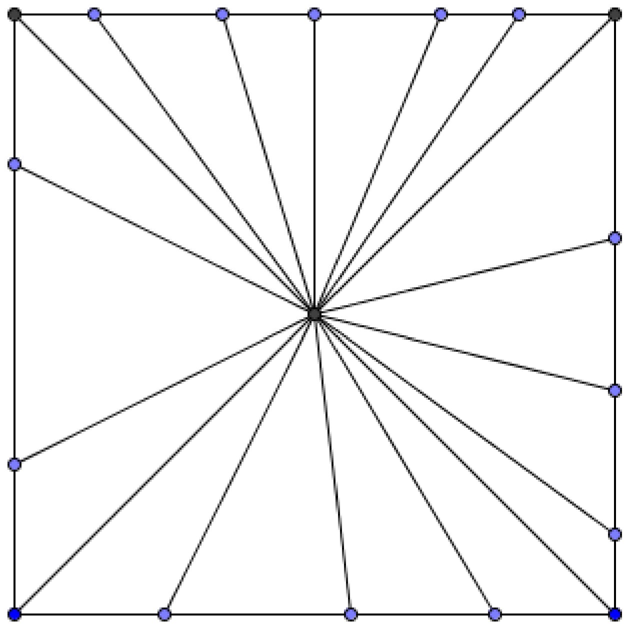
1.) van legalább egy közös pontjuk, vagy
2.) van egy közös oldaluk

Mindkét esetben más-más válasz adható. (Az első eset jóval könnyebb!)

Megoldások:
<u>7. probléma:</u>

Szét lehet-e vágni egy négyzetet háromszögekké úgy, hogy minden háromszögnek pontosan
-csúcsban „n" szomszédja legyen?

Igen, lásd 19. (csillag) ábra



19.ábra

-Élben szomszédos háromszögekre?

2-nél igen
3-nál igen (lásd 5,6,4-es ábrák korábban)

4-től már nem mert akkor minden háromszöghöz hozzá kell hogy tartozzon minimum egy belső (V_{int} -be tartozó) oldalpont, ami csak ennél a háromszögnél belső oldalpont. Vagyis
$V_{int} \geq T$ Azt is tudjuk hogy a négyzet csúcspontjai nem lehetnek belső oldalpontok, vagyis
$V_{int} + 4 \leq V$ (legalább ez a négy pont nem belső oldalpont).
Emiatt T+4≤V de ez nem lehetséges a korábban már bebizonyított V≤T+2 segédtétel miatt(ekkor

ugyanis $T+4 \leq T+2$ lenne, ami nyilván képtelenség)!
Vagyis egy négyzetet (és általában egy konvex sokszöget, ahol az oldalak száma legalább 4) nem lehet felbontani úgy háromszögekre, hogy minden egyes háromszögnek legalább 4 (élben) szomszédja legyen!