Harmadfokú egyenletek megoldása hajtogatással

fordította és átdolgozta: Lelkes Ádám, 3. verzió

1 Bevezetés

Ez egy bonyolultabb hajtogatásos geometriai konstrukció. Érdemes előtte megismerkedni a parabola-hajtogatással és a szögharmadolással. Valójában az a művelet, amit ebben a részben felfedezünk, pont a hajtogatásos szögharmadolás kulcslépése.

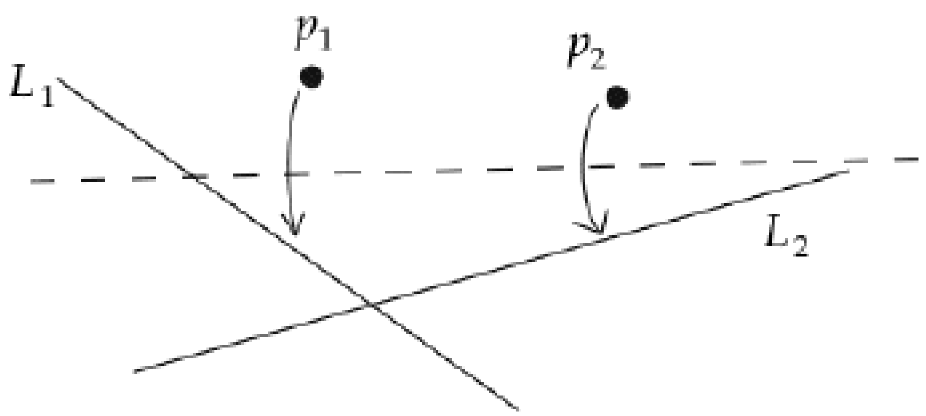
Ennek az origami-megoldásnak geometriai és algebrai értelmezése is van. Geometriailag két egy síkon lévő parabola közös érintőjének meghatározásával, algebrailag egy általános harmadfokú egyenlet megoldásával ekvivalens. Mindkét értelmezésben el lehet mélyedni.

A példaanyagok feltételezik, hogy a tanulók megoldották a szögharmadolásos és parabola-hajtogatásos feladatokat.

2 Példaanyag: egy bonyolultabb hajtogatás

A hajtogatásos szögfelezés egy elég bonyolult origami-műveletet igényel.

Ha adott egy P_1 és P_2 pont és egy e_1 és e_2 egyenes, tudunk egy olyan hajtást végezni, amivel egyszerre kerül P_1 e_1-re és P_2 e_2-re.



2.1 Első kérdés

Megoldható-e ez mindig, függetlenül a pontok és egyenesek helyzetétől?

2.2 Második kérdés

Emlékezzünk, hogy ha egy P pontot többször egy e egyenesre hajtunk, az élek egy parabola érintői lesznek, ahol a fókusz P és a direktrix e. Mint mond ez erről a bonyolultabb műveletről? Mi a geometriai jelentése? Rajzold le!

2.3 Feladat

Fedezzük fel máshogy, hogy mit is csinál ez a művelet. Vegyünk egy papírlapot, és jelöljünk ki rajta egy P_1 pontot (legjobb a lap közepetáján), és legyen az e_1 egyenes a lap alsó széle. Válasszunk ki bárhol máshol egy P_2 pontot. A célunk az, hogy megfigyeljük, hova kerül P_2, ha P_1-et többször e_1-re hajtjuk.

Válasszunk ki tehát egy P_1' pontot e_1-en, és hajtsuk P_1-re. Jelöljük meg azt a pontot, ahol a felhajtott rész érinti P_2-t. (Ha nincs ilyen, jelöljük ki máshol P_1'-t.) Hajtsuk vissza a papírt. Kapunk egy P_2' pontot, ahova P_2 kerül, ha P_1-et e_1-re hajtjuk.

Ismételjük ezt meg több P_1' ponttal addig, amíg elég P_2'-t kapunk ahhoz, hogy összekötve őket kirajzolódjon a görbe.

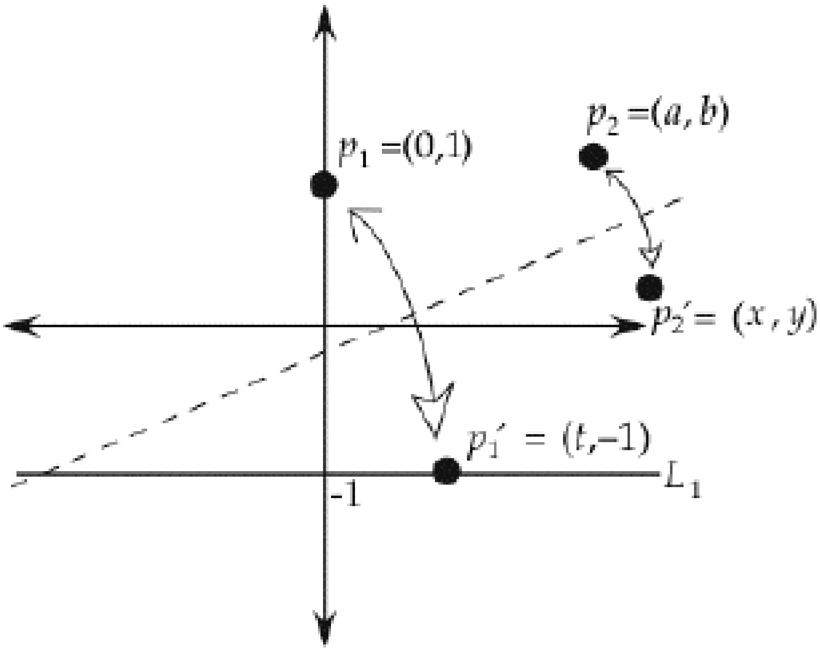
2.4 Harmadik kérdés

Milyen görbét kaptunk? Milyen egyenlettel lehetne leírni ezt a görbét?

3 Példaanyag: milyen görbét kapunk?

Hogy rájöjjünk, milyen görbét kapunk, modellezzük a hajtogatást.

Legyen $P_1 = (0; 1)$.
Legyen e_1 az $y = -1$ egyenes.
P_1-et egy $P_1' = (t; -1)$ pontra hajtottuk.
Legyen adott $P_2 = (a; b)$.



Meg szeretnénk kapni a $P_2'(x; y)$ pont koordinátáit, amely pont P_2 képe a hajtás után. Egy egyenletet kell kapnunk x-re és y-ra, ami meg fogja mutatni, milyen görbét kapunk.

3.1 Instrukciók

Keressük meg a hajtás során keletkező él egyenletét. Ezt és a hajtás geometriáját kihasználva próbáljunk meg egy x-et és y-t tartalmazó egyenletet kapni. Ezt a két egyenletet felhasználva próbáljunk egyetlen egyenletet alkotni, ami az x és y közötti összefüggést megadja (természetesen tartalmazva a és b konstansokat, de t-t nem). Milyen típusú egyenlet ez?

4 Megoldás: egy bonyolultabb hajtogatás

Lehet, hogy ez az első alkalom, amikor a diákok ilyen formában találkoznak ezzel a hajtogatással. Érdemes összehasonlítani ezt a műveletet a szögharmadolással, ha másért nem, azért, hogy meggyőzzük a diákokat a művelet kivitelezhetőségéről.

4.1 Első kérdés

Nem, nem mindig lehet megcsinálni. Ha e_1 és e_2 párhuzamosak és messze vannak egymástól, P_1 és P_2 pedig a két egyenes között, egymáshoz közel találhatóak, könnyen belátható, hogy a feladat megoldhatatlan. (Végülis minden hajtogatás izometria, tehát P_1 és P_2 távolsága megmarad.)

4.2 Második kérdés

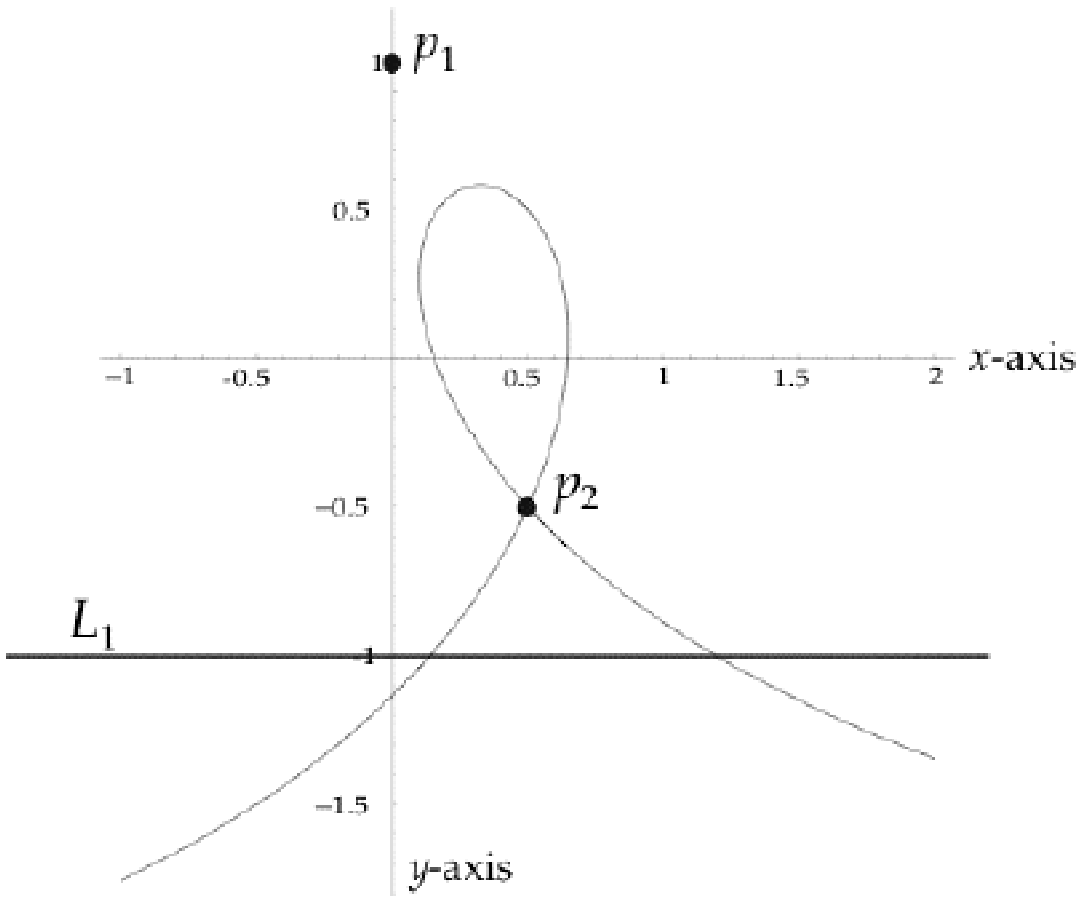
Mivel P_1-et e_1-re hajtogatjuk, az élek egy P_1 fókuszú, e_1 vezéregyenesű parabola érintői lesznek. Hasonlóan az élek érinteni fogják a P_2 fókuszú és e_2 direkrixű parabolát is.

Emiatt ez a művelet két parabola közös érintőjének megtalálásával ekvivalens.

4.3 Feladat

Hasonlóan a parabola-hajtogatáshoz, ez a feladat is sok hajtogatást és sok P_2' pontot igényel ahhoz, hogy kirajzolódjon a görbe. Ahogy egyre több hajtást végzünk, sokszor eljön az idő, amikor a hajtás egyszerűen *elmozdítja* a pontot ahelyett, hogy még egy papírréteget helyezne rá. Ebben az esetben is meg kell jelölni azt a pontot, ahova P_2 kerül.

Az ábra egy lehetséges példát mutat.



4.4 Harmadik kérdés

A görbének egy harmadfokú függvény görbéjéhez kell hasonlítania. Lehetséges viszont, hogy a diákok még nem láttak igazi harmadfokú görbét, ezért nem fogják felismerni.

5 Megoldás: milyen görbét kapunk?

Ez a feladat hasonlít a parabola-hajtogatáshoz. Valójában a kezdő felállás azonos: $P_1 = (0;1)$, e_1 az $y = -1$ egyenes, $P_1' = (t;-1)$. Ennek megfelelően az él egyenlete meg fog egyezni a parabola-hajtogatásnál látottal: $y = \frac{t}{2}x - \frac{1}{4}t^2$.

Az igazi feladat a P_2 pont belevarázsolása az egyenletbe. P_2 $(a;b)$ és P_2' $(x;y)$ koordinátái között kell összefüggést találni. És mivel a célunk az hogy megkapjuk a P_2' mozgását leíró görbét, ahogy t változik, szeretnénk, ha egyszercsak eltűnne t a képletből.

Egy zavaró pont lehet az $(x;y)$ koordináták használata P_2'-nél. Ennek az a célja, hogy a végső egyenletben x és y szerepeljen, a görbék leírásánál szokásos változók. A diákoknak fel kell ismerniük, hogy ez az x és y *nem* azonos azzal az x-szel és y-nal, ami az él egyenletében szerepel.

Tehát a diákoknak néhány fontos felismerést kell tenniük a feladat megoldásához. Először is a $\overline{P_1P_1'}$ szakasz meredeksége meg kell egyezzen $\overline{P_2P_2'}$ meredekségével. Ez a következőt jelenti:

$$-\frac{2}{t} = \frac{y-b}{x-a} \tag{1}$$

Ezután sok diák be szeretné gyömöszölni ezt az egyenletet az él egyenletébe, hogy egyetlen egyenletet kapjon, csak x és y változókkal. (Emlékezzünk, hogy a és b konstans.) De ez hiba, ugyanis az él egyenletében szereplő x és y nem egyezik meg P_2' koordinátáival. Lehetséges, hogy néhány diák $(x';y')$-vel fogja jelölni a koordinátákat a hibák elkerülése végett.

Van azonban egy ismert pont az élen: $\overline{P_2P_2'}$ felezőpontja, ami $(\frac{x+a}{2};\frac{y+b}{2})$. Ha ezt a pontot belegyömöszöljük az él egyenletébe, és aztán összevarázsoljuk az (1) egyenlettel, a következő egyenletet kapjuk x-re és y-ra (P_2' koordinátáira):

$$\frac{y+b}{2} = -\left(\frac{x-a}{y-b}\right)\frac{x+a}{2} - \frac{(x-a)^2}{(y-b)^2} \implies$$
$$\implies (y+b)(y-b)^2 = -(x^2-a^2)(y-b) - 2(x-a)^2$$

Vegyük észre, hogy ez egy harmadfokú görbe! (Van egy y^3 tagunk a bal oldalon, és egy x^2y-unk a jobbon.)

Ránézésre ez az egyenlet nem annyira izgalmas. De megadott a és b értékekre felrajzolni a görbét nagyon izgalmas lehet, mert ugyanazt a görbét kapjuk, mint a hajtogatásos feladattal. A görbe felrajzolása egy megfelelő matematikai programot vagy egy elég drága grafikus számológépet igényel, de mindenképpen megéri megcsinálni.

6 Harmadfokú egyenlet megoldása

Mint a parabola-hajtogatásnál, itt is látható, hogy hajtogatással meg lehet oldani bizonyos egyenleteket, jelen esetben harmadfokúakat. Na de hogyan?

Először az általános $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenlettel kezdenénk, de megszabadulhatunk az x^2-es tagtól, ha behelyettesítünk $z = x - \frac{1}{3}a$-t. Így következő egyenletet kapjuk:

$$z^3 + \frac{3b - a^2}{3}z - \frac{9ab - 27c - 2a^3}{27} = 0$$

Vagyis valójában feltételezhetjük, hogy az egyenletünk $x^3 + ax + b = 0$ alakú, ahol a és b racionális *(utóbbi a hajtogathatósághoz szükséges, érdemes utánanézni, hogyan lehet tetszőleges szakaszt n egyenlő részre osztani - L. Á.)*. Vegyük a következő másodfokú egyenleteket:

$$\left(y - \frac{1}{2}a\right)^2 = 2bx \text{ és}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

Mivel a és b meghajtogatható, a két egyenlet együtthatóit meg tudjuk hajtogatni, úgyszintén a parabolák fókuszát és direktrixét. Az első parabola fókusza $(\frac{b}{2}; \frac{a}{2})$, direktrixe $x = -\frac{b}{2}$ lesz, a második parabola fókusza $(0; \frac{1}{2})$, vezéregyenese $y = -\frac{1}{2}$.

Tehát $(\frac{b}{2}; \frac{a}{2})$-t $x = -\frac{b}{2}$-re, $(0; \frac{1}{2})$-et $y = -\frac{1}{2}$-re hajtjuk. A hajtásél a két parabola közös érintője lesz, és bár a hajtogatásra több lehetőség is adódhatna, jelen esetben csak egy élt kapunk. Legyen az él meredeksége m.

Állítás. m gyöke az $x^3 + ax + b = 0$ egyenletnek.

Bizonyítás. Legyen a két érintési pont $(x_0; y_0)$, ill. $(x_1; y_1)$. Összevarázsolhatjuk a két parabola deriváltját m-mel, hogy valami egyenletfélét kapjunk. Nézzük meg az első parabolát!

A parabolák egyenletei:

$$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 2bx \tag{0}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 \tag{1}$$

Az érintési pontok rendre $(x_0; y_0)$ és $(x_1; y_1)$. Az (1) függvény deriváltja egyértelmű: $y' = x$, tehát a mi esetünkben $m = x_1$. A (0) egyenletet rendezzük y-ra:

$$y = \pm\sqrt{2bx} + \frac{a}{2}$$

Értelemszerűen vízszintes helyzetű parabolánál egy x koordinátához két pont is tartozik. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban tekintsünk el a negatív ágtól, a levezetés arra is hasonló módon megkonstruálható, de ha egy harmadfokú egyenletnek elég egy gyökét megtalálnunk, onnan másodfokú egyenletre visszavezethető a probléma. Tehát a függvény deriváltja:

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2b}{x}}$$

Vagyis a meredekség:

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2b}{x}} = \sqrt{\frac{b}{2x}}$$

x helyére behelyettesítve $x_0 = \frac{(y_0 - \frac{a}{2})^2}{2b}$-t:

$$m = \sqrt{\frac{b}{\frac{2\left(y_0 - \frac{a}{2}\right)^2}{2b}}} = \sqrt{\frac{b^2}{\left(y_0 - \frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{b}{\left(y_0 - \frac{a}{2}\right)}$$

A második parabolából $m = x_1$ az x_1 pontban, tehát $y_1 = \frac{1}{2}m^2$. Ezen kívül gyömöszöljük be $(x_0; y_0)$-t az első parabola egyenletébe:

$$x_0 = \frac{(y_0 - \frac{a}{2})^2}{2b} = \frac{b}{\frac{2b^2}{(y_0 - \frac{a}{2})^2}} = \frac{b}{2m^2}$$

Viszont m a hagyományos módon is kiszámítható:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{m^2}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{m}}{m - \frac{b}{2m^2}} == \frac{m^4 - am^2 - 2bm}{2m^3 - b}$$

A nevezővel megszorozva mindkét oldalt:

$$2m^4 - bm = m^4 - am^2 - 2bm$$

$$m^4 + am^2 + bm = 0$$

Leoszthatunk $m \neq 0$-val:

$$m^3 + am + b = 0$$

És örülhetünk, mint majom a farkának.

Most, hogy hajtottunk egy élt, aminek a meredeksége egy harmadfokú egyenlet gyöke, könnyen konstruálhatunk egy pontot, aminek m az egyik koordinátája. Például legyen $(w; 0)$ a pont, ahol az él metszi az x tengelyt (tehát ez egy megszerkeszthető pont), és hajtsunk egy $x = w+1$ egyenest. Ez az egyenes az élünket $(w + 1; m)$-ben fogja metszeni. Tehát most már hivatalosan mondhatjuk, hogy hajtogatással megoldottunk egy harmadfokú egyenletet.