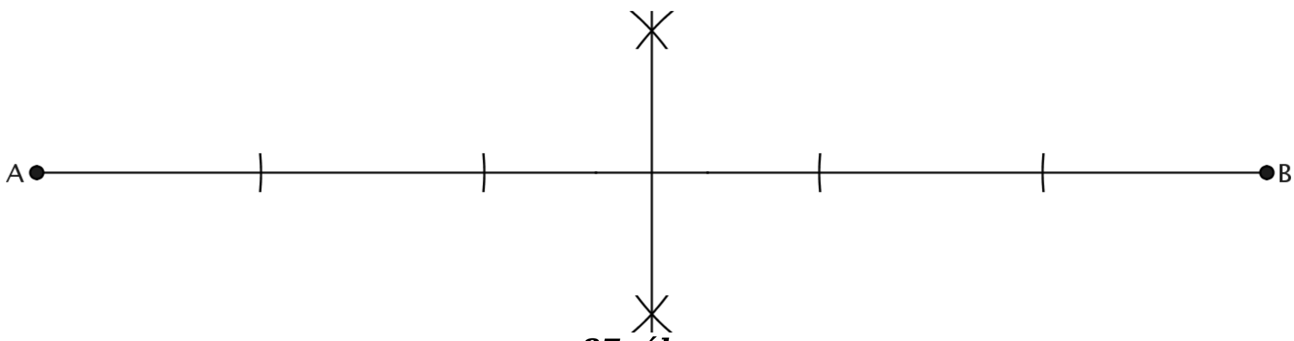
17. fejezet: Mascheroni-féle szerkesztések

Gyakran mondják, hogy az ősi görög geometrikusok, egy állítólag Platón által indított hagyományt követve, minden sík alakzatot megszerkesztettek egy körzővel és egy szintezővonalzóval (egy jel nélküli vonalzó). Ez nem igaz. A görögök sok más mértani eszközt használtak, beleértve azokat, amik szögeket harmadoltak. Mégis, a körző-és-vonalzó szerkesztéseket elegánsabbnak tartották, mint a más eszközökkel készülteket. Folyamatos próbálkozásaik, hogy körző-és-vonalzó módszert találjanak a szög harmadolására, a kör négyzetesítésére, a kocka területének duplázására – az ókor három nagyszerű geometriai szerkesztésére – majdnem 2000 éve bizonyítatlanok.

Későbbi századokban a geometrikusok a szerkesztési problémáknál használható eszközökre még szigorúbb megszorítások kirovásával szórakoztatták magukat. Az első effajta törekvés egy 10. századi matematikus, Abul Wefa munkájához köthető, amiben olyan szerkesztésekről ír, amikhez elég egy vonalzó és egy „rögzített körző”, későbbi nevén „rozsdás körző”. Ez egy állandó sugarú körző. A szakasz- és szögfelezés ismert módszere a fix-körző-és-vonalzó szerkesztések egyszerű példája. A 87. ábrán látható, hogy milyen egyszerűen használható a rozsdás körző egy olyan szakasz felezésére, aminek a hossza a körző átmérőjének több, mint kétszerese. Abul Wefa megoldásainak többsége – különösen a szabályos ötszög szerkesztésének a módszere, ha adott egy oldala – rendkívül találékony és nehéz tökéletesíteni.

A 88. ábrán látható, hogy hogyan kell a rozsdás körzőt használni egy AB egyenessel párhuzamos egyenes rajzolására tetszőleges P ponton át. Ez egy rombusz sarkainak megszerkesztésével lett megoldva három lépésben, és olyan egyszerű, hogy a képre való ránézéssel rá lehet jönni. Ez a módszer legalább 1574-ig megy vissza, mégis felfedezték és kidolgozták újra (Példáért lásd: *Mathematics Teacher*, 1973. február, 172. oldal).

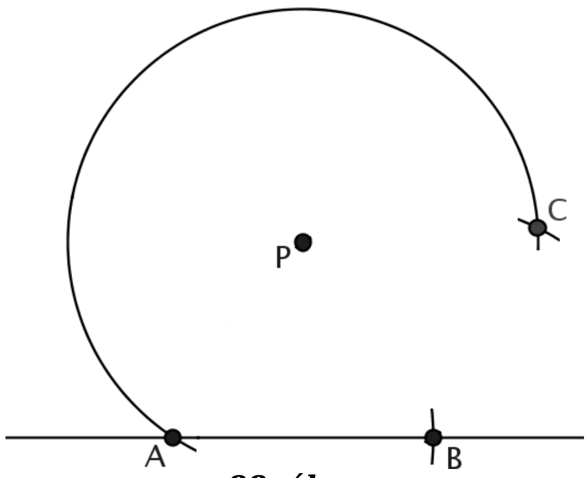
Leonardo da Vinci és számos reneszánsz matematikus kísérletezett fix-körzős geometriával, de a következő fontos tanulmány a témakörben a *Compendium Euclidis Curiosi* volt, egy 24 oldalas könyvecske, amit névtelenül adtak ki Amszterdamban, 1673-ban. Angolra Joseph Moxon, Anglia királyi hidrográfusa fordította le négy évvel később. Mai ismereteink szerint egy dán geometrikus, Georg Mohr írta, akivel pillanatok múlva újra találkozunk. 1694-ben egy londoni földmérő, William Leybourn egy *Pleasure with Profit* című furcsa könyvben a rozsdás körző-szerkesztéseket a matematikai játék egy alakjaként kezelte. Az erről a témáról szóló szakasza felett ezt írta: „Lássuk, hogy lehet egy közönséges húsvillával (vagy más eszközzel, ami nem nyílik tágabbra vagy záródik szűkebbre) és egy sima vonalzóval sok kellemes és elragadó geometriai műveletet végezni”.



87. ábra

Hogyan felezzünk szakaszt „rozsdás körzővel”

A 19. században a francia Jean Victor Poncelet ajánlott bizonyítást, amit később szigorúan fejlesztett a svájci Jacob Steiner, hogy minden körző-és-vonalzó szerkesztés lehetséges egy vonalzóval és egy fix-körzővel. Ez a következtetés egyenesen jön a nevezetes bemutatójukból, miszerint minden körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztéshez elég egy vonalzó, ha adott a síkon egy kör és a középpontja. A 20. század elején megmutatták, hogy még a teljes „Poncelet-Steiner kör" sem szükséges. Mindössze egy – akármilyen kicsi – körív és a hozzá tartozó középpont szükséges. (Ezen szerkesztésekben ismertnek tekintették a kört, ha a középpontja és a kerületének egy pontja meg volt határozva.)



88. ábra

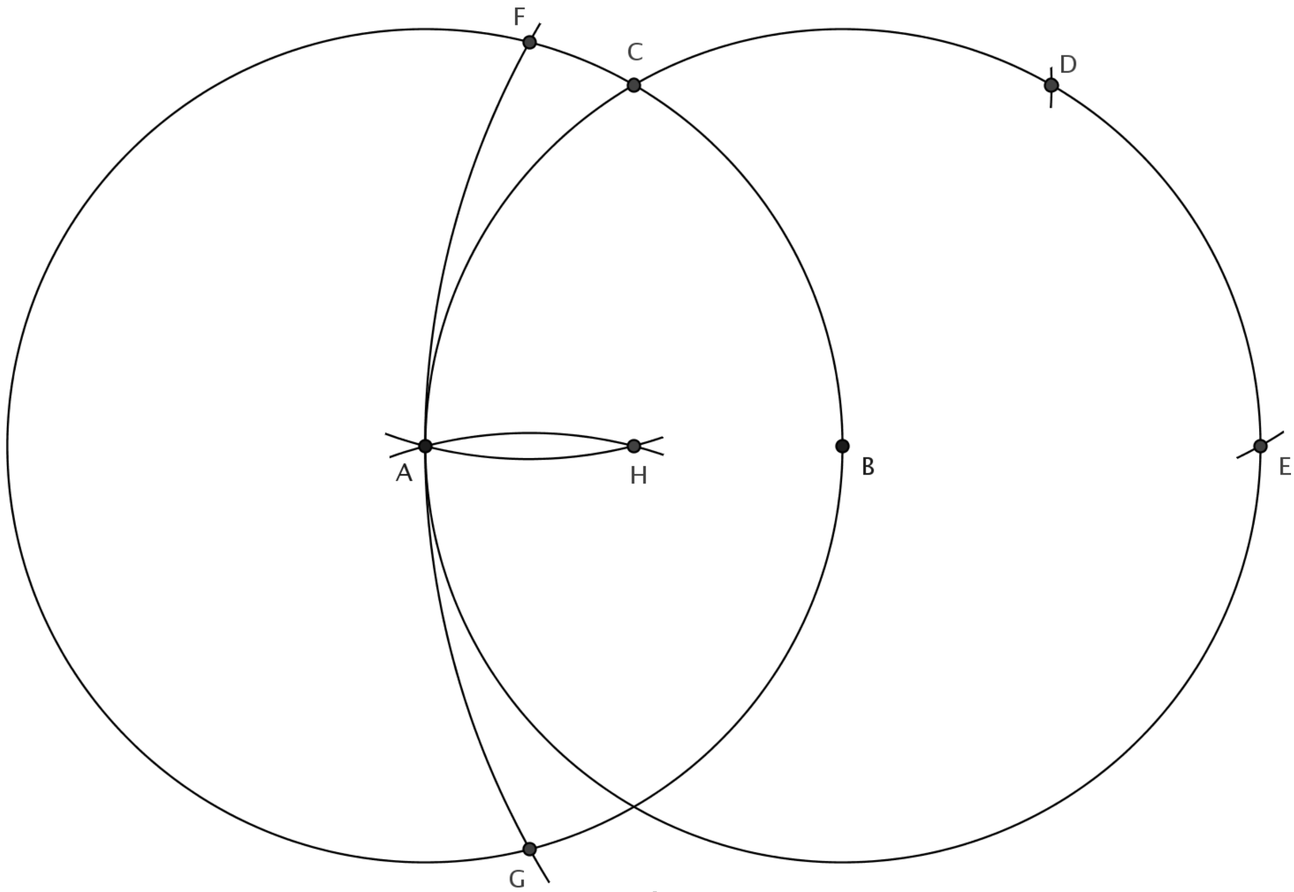
Párhuzamos szerkesztése rozsdás körzővel

Számos jól ismert matematikus tanult szerkesztéseket, amik olyan egyszerű eszközökkel lehetségesek, mint egy vonalzó, egy vonalzó két ponton megjelölve, egy párhuzamos vonalzópár, egy derékszöget, vagy más szöget bezáró vonalzópár, stb. Aztán 1797-ben egy olasz geometrikus – Lorenzo Mascheroni – elbűvölte a matematikus társadalmat a *Geometria del compasso* közzétételével, amiben bebizonyította, hogy minden körző-és-vonalzó szerkesztés elvégezhető egyedül egy körzővel. Bár egyenes vonalak nem rajzolhatók csak körzővel, feltételezzük, hogy két, körívek metszéspontjából kapott pont meghatároz egy egyenest.

A csak körzővel végzett szerkesztéseket ma is Mascheroni szerkesztéseknek nevezzük, bár 1928-ban kiderült, hogy Mohr már belátta ugyanezt egy homályos kis munkában, az *Euclides Danicius*-ban, amit 1672-ben tett közzé dán és holland változatban. Egy dán tanuló találta a könyvet egy kereskedésben, aki megmutatta a matematika tanárának, a koppenhágai egyetemen tanító Johannes Hjelmslev-nek, aki rögtön felismerte ennek jelentőségét. Hjelmslev 1928-ban kiadta ennek német fordítását Koppenhágában. A mai geometrikusok kevésbé érdekeltek a Mohr-Mascheroni szerkesztésekben, de mivel a szórakoztató természet számos problémáját nyújtják, átvették őket a rejtvénymániások. A cél a korábbi szerkesztések javítása kevesebb lépésből mód felfedezése által. Néha lehetséges javítani Mohr vagy Mascheroni módszerén, néha nem. Vegyük például Mascheroni 66-os számú problémájának öt megoldása közül a legegyszerűbbet, adott A és B pont közti felezőpont keresését (lásd: 89. ábra).

Rajzoljunk két AB sugarú kört A, illetve B középponttal. Majd ugyanekkora sugarú, C, illetve D középpontú körökkel metsszük ki D és E pontokat. (Az olvasók emlékezhetnek, hogy ez az eleje a jól ismert, a kört hat vagy – ha minden második pont adott – három egyenlő ívre osztó eljárásnak.) Ekkor az E pont AB egyenesén fog feküdni, és AE hossza AB duplája lesz. (Ez az eljárás természetesen ismételhető jobbra, hogy AB hosszának kétszeresét, háromszorosát vagy bármely más többszörösét kapjuk.) Rajzoljunk egy E középpontú, AE sugarú kört, ez a bal oldali kört F és G pontokban metszi. Ezek után AB sugárral rajzoljunk egy F és egy G középpontú kört, ezek H pontban metszik egymást.

H az AB szakasz felezőpontja. Ez könnyen bizonyítható AFH és AFE egyenlőszárú háromszögekkel, melyeknek alapon fekvő szögei megegyeznek ($FAE\sphericalangle$), tehát hasonlóak. AF fele AE-nek, tehát AH fele AB-nek. Az inverziót ismerő



89. ábra

Mascheroni módszere, az A és B pont közt félúton lévő H pont megtalálására

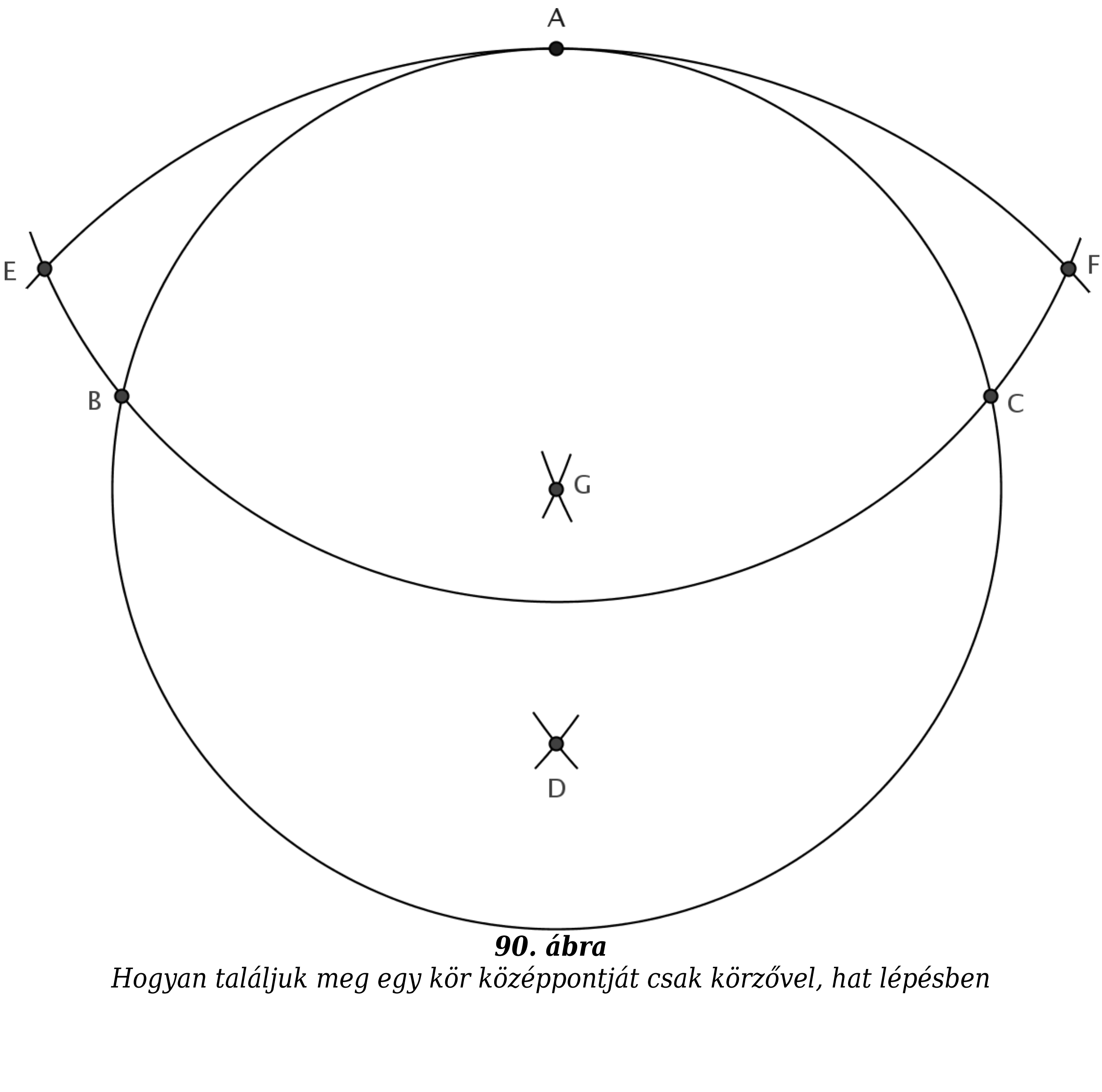
olvasók számára a H pont az E pont inverze a bal oldali körre nézve. E szerkesztés egy egyszerű, inverzióval történő bizonyítása megtalálható a Richard Courant és Herbert Robbins által írt *What Is Mathematics?* (Oxford, 1941) című könyv 145. oldalán. Jegyezzük meg, hogyha adott az AB szakasz, akkor az előbbi szerkesztésben a két utolsó körív közül csak az egyiket kell megrajzolni, ezzel lecsökken a lépések száma hatra. Ez a legkevesebb lépést igénylő megoldása e problémának.

Egy másik híres probléma, melyet megoldott Mascheroni, egy adott kör középpontjának meghatározása. Az eljárása túl bonyolult ahhoz, hogy itt közöljük, de szerencsére egy ismeretlen eredetű, egyszerűbb megközelítés fennmaradt sok régi könyvben, ez a 90. ábrán látható. Az A pont a kör kerületének tetszőleges pontja. A középponttal és tetszőleges – az átmérőnél kisebb – sugárral körzőzzünk, ez a kört B és C pontokban metszi. Az AB sugárú, B illetve C középpontú ívek kimetszik D pontot. (Az első körív sugarától függően D a kör belső, illetve külső pontja is lehet.) Rajzoljunnk egy AD sugarú, D középpontú körívet, ez kimetszi az E és F pontokat. Az E és F középpontú, AE sugarú körívek G pontban metszik egymást. Ez a kör középpontja. Csakúgy, mint az előző problémánál, itt is van egy egyszerű bizonyítás, ami annak felfedezésével kezdődik, hogy DEA és GEA egyenlőszárú háromszögek hasonlóak, mert közös az alapon fekvő szögük ($EAG\sphericalangle$). A bizonyítás többi részéért, illetve az inverzióra épülő bizonyításért lásd az L. A. Graham által írt *The Surprise Attack in Mathematical Problems* (Dover, 1968) című könyv 34-es számú problémáját.

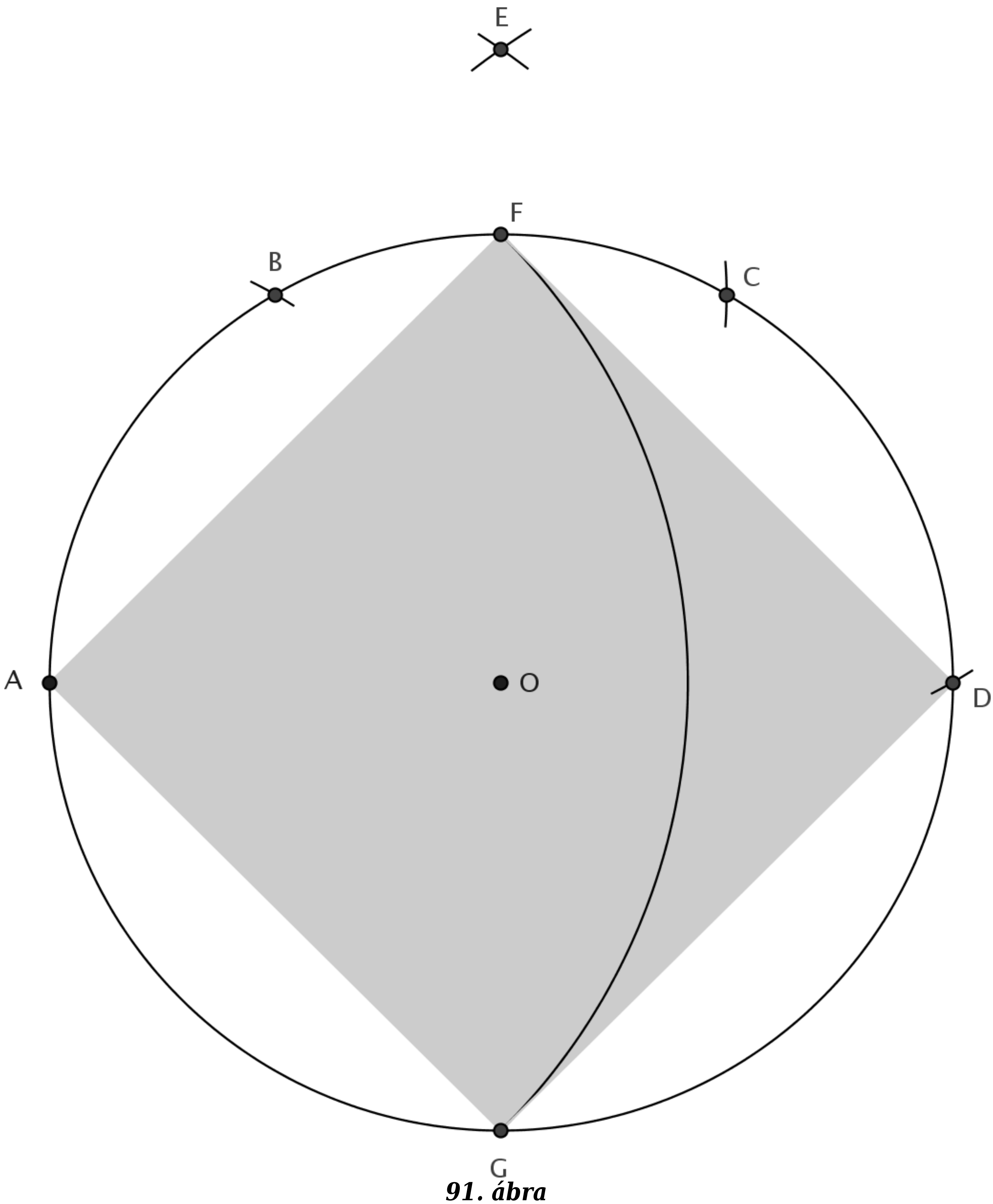
A harmadik jól ismert probléma Mascheroni könyvében „Napóleon problémája” néven vált ismertté mert a könyv szerint eredetileg Napóleon vetette föl Marscheroninak. Kevesen tudják, hogy Napóleon egy lelkes amatőr matematikus volt, de nem volt érzéke hozzá. Viszont a geometria különösen elbűvölte, aminek persze nagy harcászati értéke volt. Ezen felül határtalan csodálatot érzett korának kreatív Francia matematikusai iránt. Úgy tűnik, Gaspard Monge (szórakoztató matematikus, aki főleg a „Monge keverés” fiatalkori elemzése miatt ismert, amiben a régi pakli lapjai felváltva kerülnek az új pakli aljára, illetve tetejére) az egyetlen ember, akivel barátsága állandó volt. „Monge szeretőjeként szeretett engem” – nyilatkozta egyszer Napóleon. Monge egyike volt annak a néhány francia matematikusnak, akik Napóleonnal számoltak. Napóleon – geometriai képessége miatt is – forradalmasította a francia matematika oktatást, ami – néhány matematikatörténész szerint – nagy fellendülés volt a 19. századi kreatív matematikusoknak.

Mint Monge, az ifjú Mascheroni is buzgó csodálója volt Napóleonnak és a francia forradalomnak. Azon felül, hogy a Paviai Egyetem matematika professzora volt, költött is, verseit az Olasz kritikusok kiemelkedőnek tartották. Összegyűjtött verseinek jópár olasz kiadása jelent meg. A *Problems for Surveyors* (1793) könyvét versben ajánlotta Napóleonnak. Ők ketten 1796-ban – amikor Napólen megszállta Észak-Itáliát – találkoztak, s barátkoztak össze. Egy évvel később Mascheroni kiadta a saját könyvét, ami a csak körzővel való szerkesztésről szólt. Napóleont ezúttal egy hosszú ódával tisztelte meg.

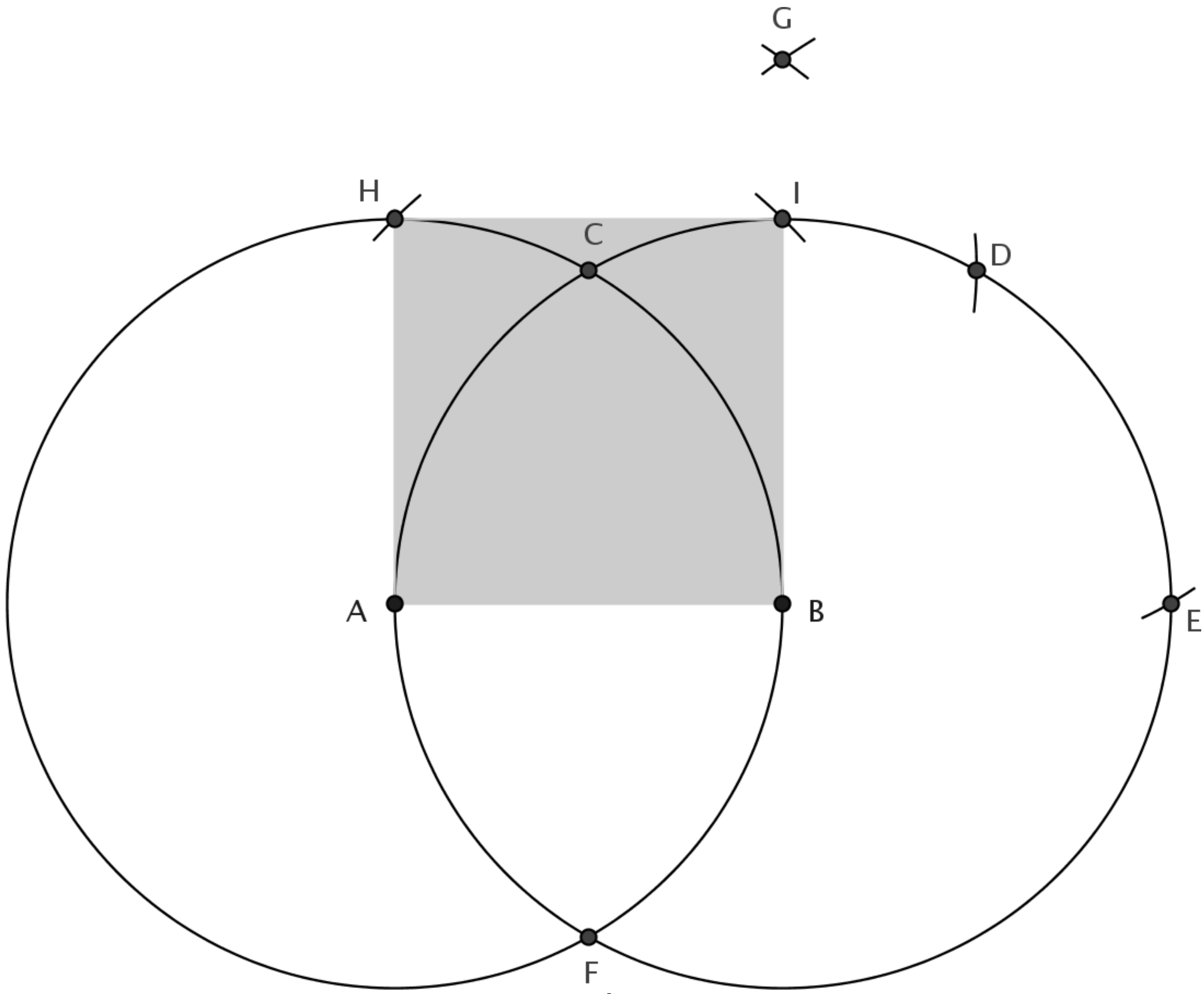
Napóleon Mascheroni számos körzős szerkesztését sajátította el. Egyesek szerint 1797-ben, amikor Joseph Louis Lagrange-vel és Pierre Simon de Laplace-szel (híres



90. ábra
Hogyan találjuk meg egy kör középpontját csak körzővel, hat lépésben



91. ábra
Egy hatlépéses megoldás „Napóleon problémájára”



92. ábra

Egy nyolclépéses megoldás egy négyzet csúcsainak megszerkesztésére, ha adott a négyzet két szomszédos csúcsa

matematikusok akiket Napóleon később ranghoz juttatott) beszélgetett a geometrtiáról, meglepte őket Mascheroni néhány megoldásának elmagyarázásával, ami teljesen új volt nekik. „Tábornok! Mi mindenre számítottunk öntől, kivéve geometriaórákra.” – jegyezte meg állítólag Laplace. Akár igaz ez az anekdota, akár nem, Napóleon mutatta be Mascheroni körzős munkáját a francia matematikusoknak. A *Geometria del compasso* fordítása 1798-ban jelent meg Párizsban, egy évvel az első olasz kiadás után.

„Napóleon problémája” egy kör négy egyenlő ívre osztása egy körzővel, ha adott a középpontja. Máshogy fogalmazva: találjuk meg egy – a körbe írt – négyzet mind a négy csúcsát. Egy gyönyörű hat íves megoldás látható a 91. ábrán. Válasszünk ki egy tetszőleges – a körön lévő – A pontot. Jelöljük be B, C és D pontokat, amiket A, B és C középpontú, OA sugarú körívekkel kapunk meg. Az A és D középpontú, AC sugarú körök E pontban metszik egymást. Az OE sugarú, A középpontú kör F, illetve G pontban metszi az eredeti kört. A, F, D és G a beírt négyzet csúcsai. Nem tudom, hogy ez Mascheroni megoldása-e (angolra nincs lefordítva a könyve, olaszul és franciául pedig nem tudok) vagy egy későbbi felfedezés. Henry Ernest Dudeney bizonyítás nélkül írja le a *Modern Puzzles*-ben (1926). Egy egyszerű bizonyítás található Charles W. Tigg *Mathematical Quickies* (McGraw-Hill, 1967) című könyvében (248. probléma).

Két hasonló, de kevésbé ismert probléma: keressük meg egy négyzet másik két csúcsát, ha két szomszédos (1), illetve két szemközi (2) csúcsa adott. Egy nyolc íves megoldást küldött külön-külön Don G. Olmstead és Paul White, ami egyébként – bizonyítással együtt – megtalálható M. H. Greenblatt *Mathematical Entertainments* (Cronwell, 1965) című könyvében, a 139. oldalon. Az eljárás a 92. ábrán látható. A és B a két adott pont. Miután rajzolunk két AB sugarú kört A és B középponttal (C és F pontban metszik egymást), ugyanekkora sugárral D és E pontokat. CF sugárral A és E középpontú köríveket rajzolunk, ezek G pontban metszik egymást. Végül GB sugárral rajzolunk egy A és egy B középpontú kört, amik kimetszik az AB sugarú körökből H és I pontokat. H és I a négyzet másik két csúcsa.

Az általam ismert legjobb megoldás a második, jóval nehezebb problémára kilenc körívet igényel. Az olvasók feladata ezt megkeresni, vagy egy ennél jobbat találni.

Toldat

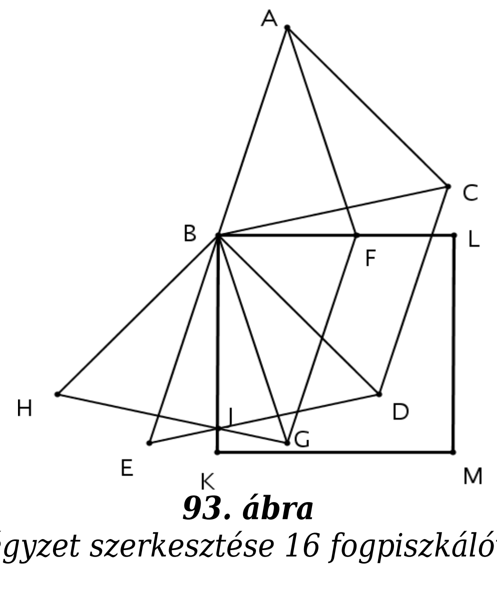
Manis Charaosh hívta fel a figyelmemet arra a meglepő, bár kevéssé ismert tételre, hogy minden olyan pont, ami megszerkeszthető egy körző és egy vonalzó segítségével, meg lehet szerkeszteni csak fogpiszkálókkal. A fogpiszkálók egyenlő hosszú szakaszok, amiket mozgathatunk a síkon.

Ezt a furcsa szerkesztési módot T. R. Dawson, a *Fairy Chess Review* szerkesztője találta ki, és a *Mathematical Gazette* 23. számában, 1939 májusában közölte „Gyufaszál geometria” címen (161.-168. oldal). Dawson bizonyítja a fenti tételt, és azt is megmutatja, hogy azon pontok, amelyek fogpiszkálókkal nem szerkeszthetők, azok körző és vonalzó segítségével sem. Mutat módszereket egy szakasz megfelezésére, egy szög megfelezésére, merőleges szerkesztésére, egy adott ponton átmenő párhuzamos szerkesztésére és egyéb alapvető szerkesztésekre, amik szükségesek a bizonyításhoz.

Ez a felfedezés rengeteg – eddig felfedezetlen – feladatot ad, amik különböző szerkesztések minimális gyufaszállal való kivitelezésével foglalkoznak. Például Dawson legjobb megoldása egy egységnyi oldalú négyzet megszerkesztésére (ahol a négyzet oldala megegyezik a gyufaszál hosszával) a 93. ábrán látható, ahol AF egy tetszőleges szakasz a $BAC\sphericalangle$ -ön belül. E megoldáshoz 16 gyufaszál szükséges.

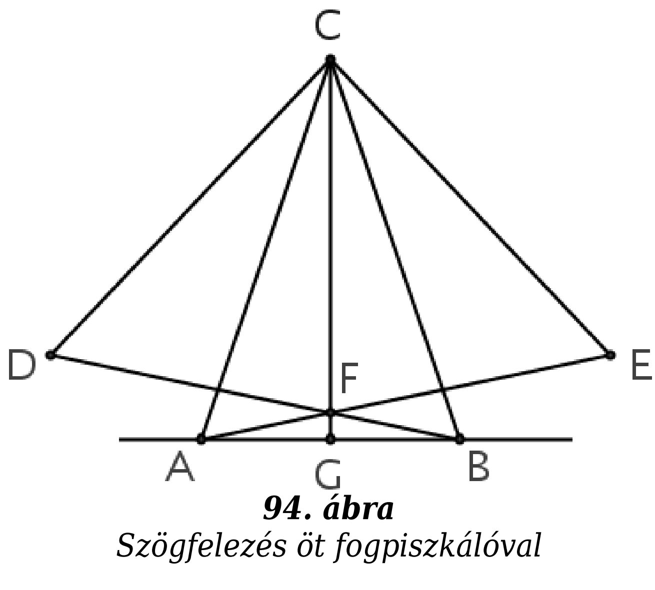
Dawson állítása szerint legalább 11 gyufaszál szükséges egy egységnyi hosszú szakasz megfelezéséhez, két, egységnyi távolságra lévő pont közti felezőpont megtalálásához pedig legalább 13. Az olvasónak azt a feladatot adja, hogy találjon olyan eljárást két – az egységnél nagyobb, de az egység $\sqrt{3}$ -szorosánál kisebb távolságra lévő – pont közti felezőpont megtalálására, amihez 10 gyufaszál szükséges.

A 94. ábrán egy egyszerű, 5 gyufaszálat igénylő módszer látható egy 120°-nál nem nagyobb, nem pont 60°-os szög megfelezésére. Ez a módszer továbbá C pontból merőlegest állít AB -re. Egyenlő oldalú háromszögek egymás mellé helyezésével egyszerű a vonalakat meghosszabbítani, illetve párhuzamost szerkeszteni.



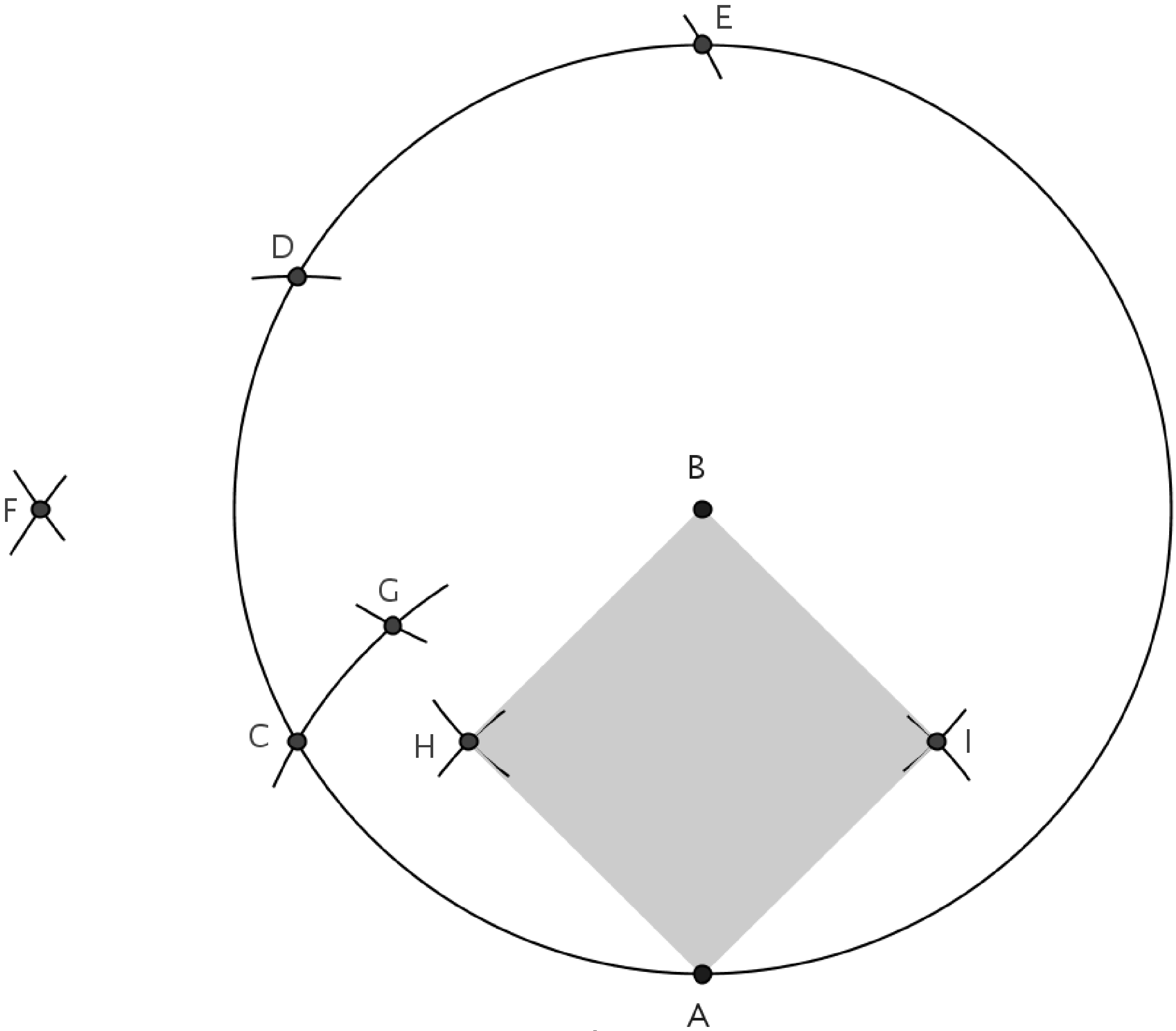
93. ábra

Négyzet szerkesztése 16 fogpiszkálóval



94. ábra

Szögfelezés öt fogpiszkálóval



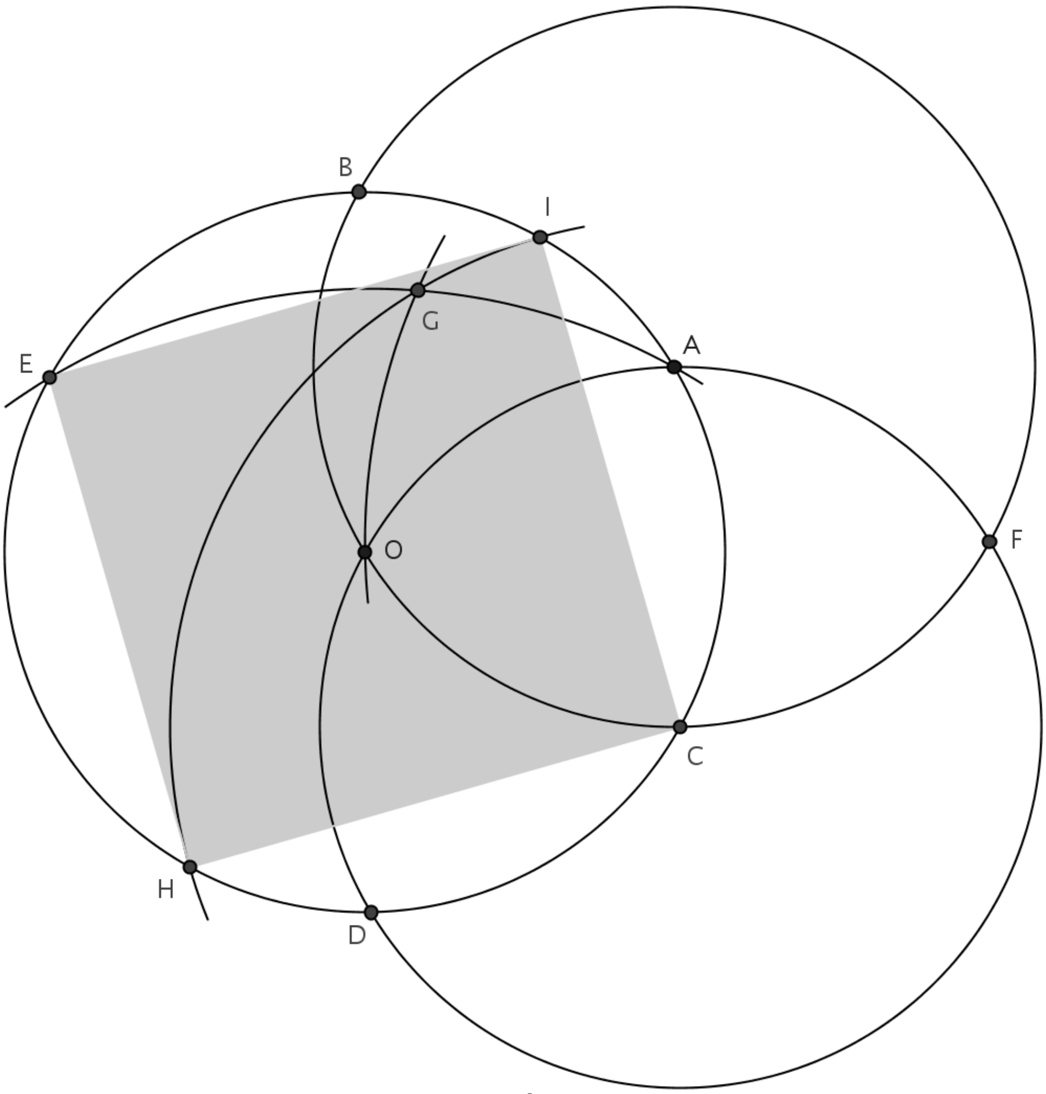
95. ábra

Négyzet szerkesztése, ha adott a két szemközti csúcsa

Válaszok

A 95. ábra egy kilenc köríves módszert mutat a következő Mascheroni probléma megoldására: adott egy négyzet két szemközti csúcsa, találjuk meg a másik két csúcsot kizárólag körző segítségével. A és B a megadott csúcsok. Rajzoljunk egy B középpontú AB sugarú kört. Ugyanilyen sugárral vegyük fel a körön C, D és E pontokat (A, C és D középpontból). Rajzoljunk A és E középpontból CE sugarú köröket, ezek F pontban metszik egymást. Rajzoljunk kört E középpontból BF sugárral, ez G pontban metszi ez egyik körívet. BG sugárral A és B középpontokból köröket rajzolunk, ezek metszéspontjai H és I. A, H, B és I a keresett négyzet csúcsai. Ifj. Philip G. Smith küldött egy egyszerű bizonyítást a szerkesztésre, derékszögű háromszögekre és a Pitagorasz-tételre alapozva, de ezt kihagytam, hogy az olvasókat ilyen bizonyítások készítésére sarkalljam.

Miután megírtam a rovatomat a Mascheroni szerkeztésekről, megtudtam hogy a hat körös megoldás „Napóleon problémájára” tényleg Mascheronié. Fitch Cheney elküldte nekem a „Felül tudjuk múlni Mascheronit?” (*The Mathematics Teacher*, 46. szám, 1953 március, 152-156. oldal), amelyben megadja Mascheroni megoldását, amit az ő egyszerűbb, öt íves megoldása követett.



96. ábra

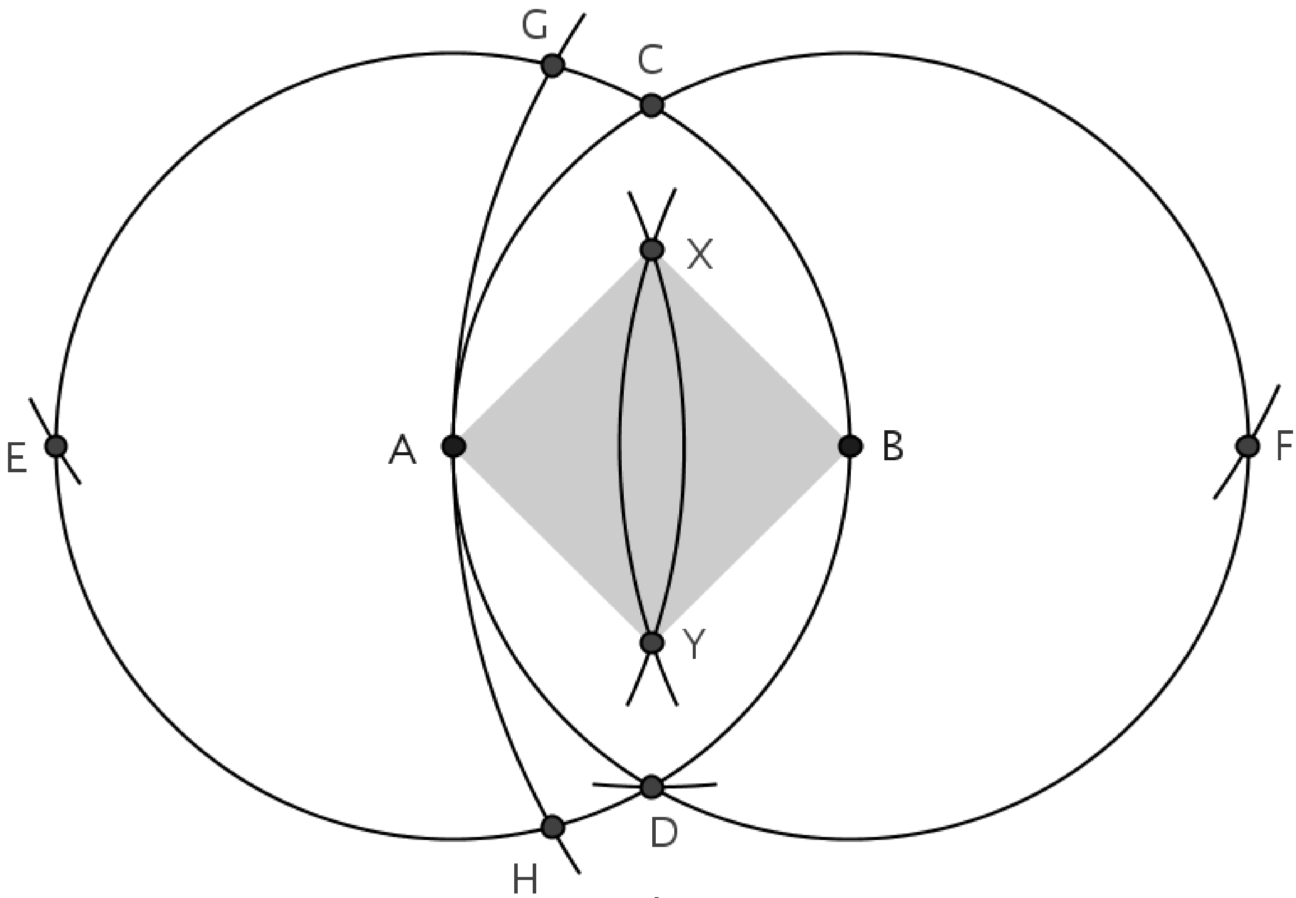
Fitch Cheney egyszerűbb megoldása „Napóleon problémájára"

Cheney megoldása a 96. ábrán látható. Válasszunk ki egy tetszőleges A pontot a körön, és rajzoljunk e pont köré egy AO sugarú kört. Rajzoljunk egy C középpontú kört ugyanekkora sugárral. A DA sugarú, D középpontú kör E pontban metszi az eredeti kört. Ez előző ívet az F középpontú, FO sugarú kör G-ben metszi. Végül egy C középpontú, CG sugarú körrel ki tudjuk metszeni H és I pontokat az eredeti körből. E, I, C és H a négyzet csúcsai.

Cheney cikkében felhívja a figyelmünket a „modern körző" – ami megőrzi a nyílás nagyságát – és Euklidesz „klasszikus körző"-je – ami összecsukódik, amint valamelyik szárát elemeljük a síkról – közti különbségre. Cheney megoldása Mascheroniéval szemben csak klasszikus körzőt igényel. Cheney megadja a klasszikus körzőt igénylő módszerét egy ötszög körbe írására, ami két lépéssel rövidebb Mascheroni modern körzős módszerénél.

Sok olvasó észrevette, hogy Mascheroni csak körzős módszere két pont közti felezőpont megtalálására egy lépéssel lerövidíthető. A 89. ábrán tisztán látható, hogy a két kör metszéspontjainak távolsága egyenlő CE-vel ennélfogva E pont megtalálható a köztes D pont megtalálása nélkül is. Ez az eljárás – ahogy sok olvasó kitalálta – automatikusan csökkenti egy lépéssel a szükséges ívek számát egy szakasz felezésekor, egy körbe írt négyszög csúcsainak megtalálásakor („Napóleon problémája"), és, ha adott egy négyszög két szomszédos csúcsa, a másik kettő csúcs megtalálásakor.

A másik két csúcs megkeresése, ha két szemközti csúcs adott – egy általam kilenc ívvel megoldott probléma – nyolc lépéssel oldható meg az előbb említett eljárás alkalmazásával. Viszont több, mint egy tucat olvasó talált egy gyönyörű, hat íves megoldást. Miután megrajzoltuk az adott pontokon átmenő köröket, C középponttal, CD sugárral rajzoljuk meg az EDF ívet. Ezután F középponttal, AF sugárral rajzoljuk meg GAH ívet. Végül E és F középpontokkal rajzoljuk egy-egy EG sugarú kört, ezek kimetszik X és Y pontokat. Nem nehéz bebizonyítani, hogy a $AXBY$ a kívánt négyzet csúcsai.



97. ábra

Egy hat íves megoldás egy Mascheroni problémára