Arany Dániel versenyek feladatai

Erben Péter

2007. szeptember-október

Algebra

1. Egy szám négyzetgyöke legfeljebb mennyivel lehet nagyobb a számnál?
2. Az x, y, z valós számokra

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ xy+yz+zx &= 9 \end{aligned}$$

   Bizonyítsuk be, hogy $0 \le x, y, z \le 4$.
3. Az x, y, z, a valós számokra

$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ xy+yz+zx &= \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

   Bizonyítsuk be, hogy $0 \le x, y, z \le \frac{2}{3}a$.
4. Határozzuk meg a következő függvények értékkészletét!
   a) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$
   b) $\dfrac{2x-1}{x^2+1}$
   c) $\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+4}$
   d) $2\sqrt{x}+\sqrt{9-2x}$
5. Milyen p pozitív egész esetén teljesül, hogy az $f(x)=\sqrt{x^2+p}-\sqrt{x^2+1}$ függvény értékkészlete pontosan 10 egész számot tartalmaz?
6. Az $x^{1949}, x^{1978}, x^{2007}$ számok közül bármely kettő különbsége egész. Bizonyítsuk be, hogy x egész.
7. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, akkor $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$

Geometria

1. Egy a alapú egyenlőszárú háromszögbe r sugarú félkört írtunk, melynek középpontja az alapon van, és érinti a szárakat.

   Mekkora $\left(\frac{a}{r}\right)^2$, ha a félkör az alaphoz tartozó magasságot a felső harmadolópontban metszi?

2. Az a és b befogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó negyedrésze.

   Mekkora ekkor $\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6$ értéke?

3. Egy egyenlőszárú háromszög súlypontja rajta van a háromszög beírt körén.

   Mekkora a köréírt és a beírt kör sugarának aránya?

4. Egy derékszögű háromszög beírt körének átfogóval párhuzamos érintőjéből a háromszög oldalai egy d hosszúságú szakaszt metszenek ki.

   Legfeljebb mekkora lehet $\frac{d}{c}$?

5. Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara r. A beírt körhöz az oldalakkal párhuzamos érintőket húzunk. Az érintők által levágott háromszögek beírt körének sugara: r_a, r_b, r_c.

   Bizonyítsuk be, hogy $r_a + r_b - r_c = r$.

6. Egy c átfogójú derékszögű háromszög beírt körének középpontja K, súlypontja S.

   Bizonyítsuk be, hogy
   $$\frac{1}{5} < \frac{KS}{c} < \frac{1}{3}.$$

7. Bizonyítsuk be, hogy egy derékszögű háromszögben
   $$2(a \cdot s_a^2 + b \cdot s_b^2) \leq 5cs_c^2\sqrt{2},$$
   a szokásos jelöléseket használva.

8. Egy hegyesszögű háromszögbe három négyzetet írtunk úgy, a négyzetek egyik oldala a háromszög egy-egy oldalára illeszkedik, a másik két csúcs pedig a háromszög különböző oldalaira.

   Igazoljuk, hogy a négyzetek területének összege kevesebb, mint másfélszerese a háromszög területének!

9. Az ABC derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága AD. Az ADC és ADB háromszögek beírt körének középpontját összekötő egyenes az AC és AB befogókat K-ban és L-ben metszi.

   Bizonyítsuk be, hogy $AK = AL = AD$.

10. Az egységnyi sugarú körbe írható ABC háromszög köréírt körét a B és C csúcsból húzott belső szögfelező a B_1, illetve C_1 pontban metszi.

    Igazoljuk, hogy ha $BC = B_1C_1$, akkor a BCB_1C_1 négyszög területe legfeljebb $\sqrt{3}$ területegység.

11. Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalának belső pontja X. Az AXC és CXB háromszögek beírt köreinek AB-től különböző közös külső érintője a CX szakaszt Y-ban metszi.

    Milyen X esetén lesz az AYB háromszög területe minimális?

Megoldások

Algebra

1. Egy szám négyzetgyöke legfeljebb mennyivel lehet nagyobb a számnál?

   Megoldás: Az $f(x) = \sqrt{x} - x$ függvény maximumát keressük. Ez megegyezik a nemnegatív számokon értelmezett $g(y) = y - y^2$ függvény maximumával, ami $y = \frac{1}{2}$ esetén vétetik fel, és értéke $\frac{1}{4}$.

2. Az x, y, z valós számokra

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ xy + yz + zx &= 9 \end{aligned}$$

   Bizonyítsuk be, hogy $0 \leq x, y, z \leq 4$.

   Megoldás: Az első egyenletből $z = 6 - (x + y)$,

   ezt a másodikba írva: $xy + (x + y)(6 - (x + y)) = 9$.

   Rendezve x-re: $x^2 + (y - 6)x + 9 - 6y + y^2 = 0$.

   Akkor lehet megoldása az egyenletrendszernek, ha az utóbbi másodfokú egyenletnek is van megoldása, ehhez pedig szükséges, hogy a diszkrimináns nemnegatív legyen.

   $(y - 6)^2 - 4(9 - 6y + y^2) \geq 00$,

   vagyis $-3y^2 + 12y \geq 0$,

   innen $0 \leq y \leq 4$ következik.

   Az egyenlet szimmetrikus a változókra, tehát a másik két ismeretlenre hasonló feltétel teljesül. Könnyen ellenőrízhető, hogy a szélső értékek elérhetők. Például $(x = 0, y = 3, z = 3)$, illetve $(x = 4, y = 1, z = 1)$.

3. Az x, y, z, a valós számokra

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ xy + yz + zx &= \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

   Bizonyítsuk be, hogy $0 \leq x, y, z \leq \frac{2}{3}a$.

   Megoldás: Az előző számítás, paraméteresen.

4. Határozzuk meg a következő függvények értékkészletét!

   a) $\dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$

   b) $\dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}$

   c) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 4}$

   d) $2\sqrt{x} + \sqrt{9 - 2x}$

   Megoldás: Ugyanazt a technikát lehet alkalmazni mind a négy feladatnál. A függvény értékét megadó formulát egyenlővé tesszük egy c paraméterrel, másodfokúvá alakítjuk az egyenletet c paraméterrel, és megnézzük a diszkriminánsra adódó feltételt.

(Ahhoz, hogy legyen olyan x, amelyre a függvényérték c, az kell, hogy a paraméteres egyenletnek legyen megoldása.)

a) $\frac{x+1}{x^2+1} = c$

$x + 1 = cx^2 + c$, tehát $cx^2 - x + c - 1 = 0$

A diszkrimináns nemnegatív: $D(c) = 1 - 4c(c-1) = -4c^2 + 4c + 1 \leq 0$

A lefelé nyíló parabola zérushelyei: $c_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16+16}}{-8} = \frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$.

Innen $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq \frac{x+1}{x^2+1} \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

b) $\frac{2x-1}{x^2+1} = c$, $D(c) = 4(1 - c - c^2)$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq c \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{x^2-1}{x^2+3x+4} = c$, $D(c) = -7c^2 + 12c + 4$, $-\frac{2}{7} \leq c \leq 2$. $x = -3$-ra maximális, $x = -\frac{1}{3}$-ra minimális a függvényérték. Érdemes ábrázolni a függvényt.

d) $2\sqrt{x} + \sqrt{9-2x} = c \Rightarrow \ldots \Rightarrow D(c) = (4c^2 + 108)^2 - 4 \cdot 36 \cdot (c^4 - 18c^2 + 81) = -128 \cdot (c^2 - 27) \geq 0$, vagyis $0 \leq c^2 \leq 27$, innen $0 \leq c \leq 3\sqrt{3}$.

A maximum rendben is van, $x = 3$-ra felvétetik, a minimummal azonban "baj" van. A függvény nem veszi fel a 0 értéket. Gyöktelenítve a "számlálót" vizsgálható a monotonitás, amiből a minimum $x = 0$-nál 3.

5. Milyen p pozitív egész esetén teljesül, hogy az $f(x) = \sqrt{x^2 + p} - \sqrt{x^2 + 1}$ függvény értékkészlete pontosan 10 egész számot tartalmaz?

   Megoldás: Gyöktelenítve látható, hogy $x = 0$-ra maximális $f(x)$, itt $\sqrt{p} - 1$ az értéke. Végtelen felé tartva tetszőlegesen kicsi pozitív számot felvesz, tehát az kell, hogy 0 és $\sqrt{p} - 1$ között pontosan 10 pozitív egész legyen.

   $121 \leq p < 144$.

6. Az $x^{1949}, x^{1978}, x^{2007}$ számok közül bármely kettő különbsége egész. Bizonyítsuk be, hogy x egész.

   Megoldás: A különbségek hányadosa x^{29} racionális. Innen $x^6 = e/((x^{29})^{68} - (x^{29})^{67})$ racionális. Innen x^5, tehár x is racionális.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, akkor $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n+b^n+c^n}$

   Megoldás: A feltételt felszorozva a nevezőkkel: $(a + b + c)(ab + ac + bc) = abc$, innen $0 = a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc = (a + b)(b + c)(c + a)$.

   Valamelyik két változó egymás ellentetje.

Geometria

1. Egy a alapú egyenlőszárú háromszögbe r sugarú félkört írtunk, melynek középpontja az alapon van, és érinti a szárakat. Mekkora $\left(\frac{a}{r}\right)^2$, ha a félkör az alaphoz tartozó magasságot a felső harmadolópontban metszi?

   Megoldás: $r = \frac{2}{3}m$, hasonlóság: $b/\frac{1}{2}a = 1/\frac{2}{3}$, $b/a = 3/4$, $m^2 = \frac{5}{16}a^2$, $(a/\frac{2}{3}m)^2 = 36/5$.

2. Az a és b befogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó negyedrésze. Mekkora ekkor $\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6$ értéke?

   Megoldás: Terület: $4m^2 = ab$. Pitagorasz: $16m^2 = a^2 + b^2$. Innen: $a/b + b/a = 2$, amiből a végeredmény: 2702.

3. Egy egyenlőszárú háromszög súlypontja rajta van a háromszög beírt körén. Mekkora a köréírt és a beírt kör sugarának aránya?

   Megoldás: Pitagorasz, hasonlóság, terület. $r = m/6$, $5 = b/a$, $R = \frac{m^2+a^2}{2m}$, $R/r = 25/8$.

4. Egy derékszögű háromszög beírt körének átfogóval párhuzamos érintőjéből a háromszög oldalai egy d hosszúságú szakaszt metszenek ki. Legfeljebb mekkora lehet $\frac{d}{c}$?

   Megoldás: $3 - \sqrt{8}$. Hasonlóság és terület.

$$\frac{ab - (a+b)\sqrt{a^2+b^2} + a^2 + b^2}{ab}$$

   maximuma kell. $x = a/b, y = x + 1/x, z = 1 + y$ jelölésekkel

$$\frac{1}{z - \sqrt{z^2 - 1}}$$

   maximuma kell a $z \geq 3$ feltétel mellett. Szigorúan monoton csökkenő függvény.

5. Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara r. A beírt körhöz az oldalakkal párhuzamos érintőket húzunk. Az érintők által levágott háromszögek beírt körének sugara: r_a, r_b, r_c. Bizonyítsuk be, hogy $r_a + r_b - r_c = r$.

   Megoldás: Hasonlóság. $\frac{r_a}{r} = \frac{b-2r}{b}$, $\frac{r_b}{r} = \frac{a-2r}{a}$, $\frac{r_c}{r} = \frac{m_c-2r}{m_c}$.

$$r_a + r_b - r_c = r\left(1 - \frac{a+b-c}{b} + 1 - \frac{a+b-c}{a} + 1 - \frac{a+b-c}{ab/c}\right) = r$$

6. Egy c átfogójú derékszögű háromszög beírt körének középpontja K, súlypontja S. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{5} < \frac{KS}{c} < \frac{1}{3}.$$

   Megoldás: A "logikus" rendszerben: $\overrightarrow{SK}(\frac{a+3b-3c}{6}; \frac{3a+b-3c}{6})$ Pitagorasz, számolgatás. Érdemes nézni a szélső helyzeteket.

7. Bizonyítsuk be, hogy egy derékszögű háromszögben

$$2(a \cdot s_a^2 + b \cdot s_b^2) \leq 5cs_c^2\sqrt{2},$$

   a szokásos jelöléseket használva.

   Megoldás: Pitagorasz, közepek.

$$a + b + \frac{3ab(a+b)}{a^2+b^2} \leq \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot c$$

   Két rész: $a + b \leq \sqrt{2}c$ és $\frac{3(1/a+1/b)}{1/a^2+1/b^2} \leq 3\sqrt{2}c$

8. Egy hegyesszögű háromszögbe három négyzetet írtunk úgy, a négyzetek egyik oldala a háromszög egy-egy oldalára illeszkedik, a másik két csúcs pedig a háromszög különböző oldalaira. Igazoljuk, hogy a négyzetek területének összege kevesebb, mint másfélszerese a háromszög területének!

   Megoldás: Hasonlóság: az a-ra írt négyzet x_a oldalára $\frac{x}{a} = \frac{m_a - x}{m_a}$. Innen $x = \frac{2T}{a+m_a}$. Az állítás:
$$4T^2 \cdot \left(\frac{1}{(a+m_a)^2} + \frac{1}{(b+m_b)^2} + \frac{1}{(c+m_c)^2} \right) \leq \frac{3}{2}T$$
   $\frac{a+m_a}{2} \geq \sqrt{am_a}$, vagyis $\frac{1}{(a+m_a)^2} \leq \frac{1}{8T}$, ebből következik az állítás.

   Érdekesség: nem lehet egyenlőség.

9. Az ABC derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága AD. Az ADC és ADB háromszögek beírt körének középpontját összekötő egyenes az AC és AB befogókat K-ban és L-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AK = AL = AD$.

   Megoldás: Szögszámolás szögfelezőkből. $DO_1O_2 \sim ABC$, mert van derékszöge, és a befogók aránya rendben van. (A magasság hasonló háromszögekre vágja a derékszögű háromszöget.) A szögekből jön, hogy AKL-nek van két 45°-os szöge.

10. Az egységnyi sugarú körbe írható ABC háromszög köréírt körét a B és C csúscból húzott belső szögfelező a B_1, illetve C_1 pontban metszi. Igazoljuk, hogy ha $BC = B_1C_1$, akkor a BCB_1C_1 négyszög területe legfeljebb $\sqrt{3}$ területegység.

    Megoldás: Kerületi szögek tétele és szinuszos területképlet. (Van egy 60 fokos szög.)

11. Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalának belső pontja X. Az AXC és CXB háromszögek beírt köreinek AB-től különböző közös külső érintője a CX szakaszt Y-ban metszi. Milyen X esetén lesz az AYB háromszög területe minimális?

    Megoldás: CY állandó (érintőszakaszok), tehát X magasság talppont.

Tartalomjegyzék