Determinánsok kombinatorikai feladatokban

Erben Péter

2007. augusztus

Bevezetés

A következőkben bemutatunk egy lehetséges feldolgozást, amely egyszerű kombinatorikai feladatokból kiindulva elvezet a determináns fogalmáig, majd bemutatunk néhány példát a Gessel-Viennot lemma alkalmazására.

Az anyag jelentős része elhangzott a Berzsenyi Dániel Gimnázium 2006-os tehetséggondozó táborának foglalkozásain.

1. Utak megszámlálása

1.1 Binomiális együtthatók

1.1.1. feladat: Hányféle módon olvasható ki az ábrából a "MATEKTÁBOR" szó?

```
M A T E K T
A T E K T Á
T E K T Á B
E K T Á B O
K T Á B O R
```

Megoldás: Ennél a közismert és egyszerű feladatnál megadunk három lehetséges megoldási módszert. A későbbi pontokban használni fogjuk ezeket a módszereket.

1. módszer - *felsorolás*

Ha nem túl nagy a probléma mérete, a legnyilvánvalóbb megközelítés, hogy felsoroljuk az összes lehetséges esetet. A nehézséget ilyenkor az jelenti, hogy kell találnunk egy jó sorrendet a felsoroláshoz, ami garantálja, hogy nem hagyunk ki és nem számolunk kétszer eseteket. Persze ha túl nagy a megoldásszám, akkor a felsorolást számítógépre kell bíznunk.

Egy lehetséges kiolvasás:

```
M A T E
      K
      T Á
        B O
          R
```

Néhány variáció elkészítése után sejthető, hogy túl sok eset van ahhoz, hogy érdemes legyen mindet megrajzolni. A felsorolás végezhető például aszerint, hogy az első sorban hányadik betűnél lépünk lefele.

2. módszer - *összegzés*

Az ábrát táblázatnak tekintjük, és minden cellába beírjuk azt a számot, hogy oda hányféle módon juthatunk el a kiinduló mezőről. Látható, hogy a kiolvasás csak úgy lehetséges, ha minden pillanatban lefele vagy jobbra lépünk tovább. Tehát egy mezőre balról vagy felülről érkezhetünk, és ezek az esetek kizárjál egymást.

Innen már látható a táblázat kitöltésének szabálya: Minden mezőre a balra mellette és a felette lévő mező számának összegét kell írni. (A táblázat szélén kívül képzelhetjük úgy, hogy csupa nulla áll.)

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126

Most megkaptuk a választ kérdésünkre: 126 különböző módon olvasható ki a "MATEKTÁBOR" szó az ábrából. A kapott számokat nézegetve felfedezhetjük a Pascal-háromszög elemeit, ami nem meglepő, hiszen a Pascal-háromszög ismert képzési szabálya alapján határoztuk meg a beírt számokat.

3. módszer - *kódolás*

Előfordulhat, hogy a megszámlálni kívánt objektumokat ügyesen kódolva olyan kódhalmazt kapunk, amiről meg tudjuk mondani számosságát. Most is ez a helyzet. Mivel a kiolvasás során jobbra (`J`) és lefele (`L`) léphetünk, minden kiolvasás kódolható egy `J - L` sorozattal.

Például a fenti ábra kódja: `JJJLLJLJL`.

Minden kód 5 darab `J` és 4 darab `L` betűt tartalmaz, és ezek sorrendje tetszőleges lehet. Az is látható, hogy a kódok és a lehetséges kiolvasások között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van.

A 9 hosszú `J - L` sorozatok megszámlálásakor azt kell meghatároznunk, hogy a kód 9 karaktere közül melyik az a 4, ahol `L` szerepel. Az ismétlés nélküli kombinációk száma:

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126.$$

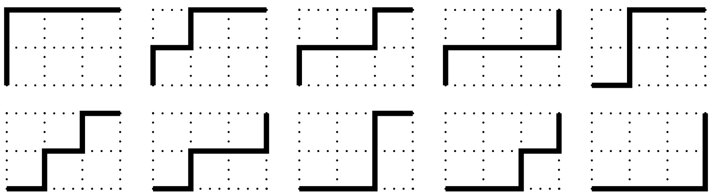
1.1.2. feladat: A $(0;0)$ pontból a $(3;2)$ rácspontba kell eljutni, jobbra és felfele lehet lépni.

Hányféle út rajzolható?

Megoldás: Könnyen látható, hogy a rácspontokat az előző feladat ábráján a betűknek feleltethetjük meg, csak annyi a különbség, hogy most alulról felfelé (de továbbra is balról jobbra) haladhatunk.

A lehetőségek száma: $\binom{3+2}{2} = \binom{5}{2} = 10$.

A lehetséges utak (a bal alsó pont a (0;0)):



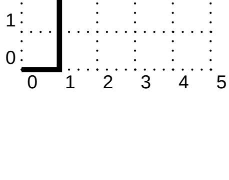
1.1.3. feladat: A $(0;0)$ pontból a $(5;4)$ rácspontba kell eljutni, jobbra és felfele lehet lépni, de tilos rálépni a $(3;3)$ pontra.

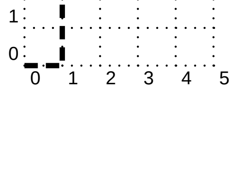
Hányféle út rajzolható?

Megoldás: A tiltott mezők esetét is többféle módon kezelhetjük.

1. módszer - *"összes esetek száma"* $-$ *"tiltott esetek száma"*

Ez a megközelítés akkor hasznos, ha a "tiltott esetek száma" egyszerűen számolható.





Az összes esetek száma az 1.1.1. feladat alapján: 126. A tiltott utak mindegyike két részre bontható: a tiltott mező előtti, és a tiltott mező utáni szakasz. Ezek a szakaszok megfelelnek az előző feladatokban megszámolt utaknak, számuk: $\binom{3+3}{3} = \binom{6}{3} = 20$, illetve $\binom{2+1}{1} = \binom{3}{1} = 3$. (A $(3;3)$-ból az $(5;4)$-be ugyanannyi út vezet, mint $(0;0)$-ból a $(2;1)$-be.) Bármelyik első szakasz bármelyik második szakasszal folytatható, tehát a tiltott utak száma összesen: $20 \cdot 3 = 60$.

A megengedett utak száma így $126 - 60 = 66$.

2. módszer - *összegzős/táblázatos módszer, kinullázott tiltott mezővel*

Ezt az ötletet Wéber Huba nyolcadikos diákomtól hallottam. Használjuk a táblázatos módszert, tehát minden rácspont egy cellának felel meg, és a cellák értéke egyenlő a megfelelő rácspontba vezető utak számával. Mivel egy pontba alulról vagy balról érkezünk (és ezek egymást kizáró esetek), ezért a cellába írt szám a balra és alatta lévő szám összege. (Ahol balra vagy alatta már nincs cella, oda nullát gondolunk.)

Ez idáig egyezik az 1.1.1. feladat 2. megoldásával, most jön az újdonság: a tiltott mező(k)re írjunk nullát, és így folytassuk a táblázat kitöltését.

4	1	5	15	15	30	**66**
3	1	4	10	**0**	15	36
2	1	3	6	10	15	21
1	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
y/x	0	1	2	3	4	5

Érdemes végiggondolni, hogy a "kinullázós" módszer valóban helyes eredményt ad. Esetünkben a jobb felső sarokban olvasható 66 a megoldások száma.

1.1.4. feladat: A $(0;0)$ pontból a $(5;4)$ rácspontba kell eljutni, jobbra és felfele lehet lépni, de tilos rálépni a $(3;3)$ és a $(2;1)$ pontra.

Hányféle út rajzolható?

Megoldás: Az előbbi pontban leírt két módszeren túl most megadunk egy algoritmust is, amely könnyen bővíthető, és a később következő útszámlálós feladatok megoldására is alkalmas.

Esetek megszámlálása.

Az összes utak számából levonjuk a tiltott utak számát. Vigyázni kell, mert amikor megszámoljuk a $(2;1)$-en, majd a $(3;3)$-on átmenő tiltott utakat, akkor kétszer számoljuk azokat a rossz utakat, amelyek mindkét tiltott mezőn áthaladnak. Ezen metszet számosságát is meg kell határozni.

Az eddigiek után most már nem részletezzük a számítást:

$$\binom{9}{4} - \binom{3}{1} \cdot \binom{6}{3} - \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} + \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} = 126 - 60 - 60 + 27 = 33.$$

Táblázat.

4	1	5	12	12	18	**33**
3	1	4	7	**0**	6	15
2	1	3	3	4	6	9
1	1	2	**0**	1	2	3
0	1	1	1	1	1	1
y/x	0	1	2	3	4	5

Algoritmus.

Egy egyszerű rekurzív eljárással felsorolhatjuk a megengedett utakat. Az eljárás paramétere, hogy eddig hány lépést tettünk meg, illetve az, hogy most milyen koordinátájú ponton állunk.

Az eljárás törzsében minden lehetséges lépésirányra megvizsgáljuk, hogy lehet-e arra lépni. Ha igen, akkor lépünk, és az új pontra rekurzívan meghívjuk a bejáró eljárást.

```
bejár(lépés,x,y):
          Ha (x = m) és (y = n)
          akkor
                    db := db + 1
                    megoldás kiírása
          különben
                    {felfele}
                    Ha y < n és szabad(x,y+1)
                    akkor
                         ut[lépés+1] := 'F'
                         bejár(lépés+1,x,y+1)
                    Elágazás vége

                    {jobbra}
                    Ha x < m és szabad(x+1,y)
                    akkor
                         ut[lépés+1] := 'J'
                         bejár(lépés+1,x+1,y);
                    Elágazás vége
          Elágazás vége
Eljárás vége
```

A főprogram:

```
          db := 0
          bejár(0,0,0)
          ki('Összesen ', db, ' megoldás.')
```

A 33 megoldást a program a következő sorredben adja meg:

```
FFFFJJJJJ  FFFJFJJJJ  FFFJJFJJJ  FFJFFJJJJ  FFJFJFJJJ  FFJJFFJJJ  FFJJJJFFJ
FFJJJJFJF  FFJJJJJFF  FJFFFJJJJ  FJFFJFJJJ  FJFJFFJJJ  FJFJJJFFJ  FJFJJJFJF
FJFJJJJFF  JFFFFJJJJ  JFFFJFJJJ  JFFJFFJJJ  JFFJJJFFJ  JFFJJJFJF  JFFJJJJFF
JJJFFJFFJ  JJJFFJFJF  JJJFFJJFF  JJJFJFFFJ  JJJFJFFJF  JJJFJFJFF  JJJFJJFFF
JJJJFFFFJ  JJJJFFFJF  JJJJFFJFF  JJJJFJFFF  JJJJJFFFF
```

A sorrend abból következik, hogy a program minden helyzetben először felefele próbál továbblépni, és utána próbálkozik jobbra. A `bejár` eljárásban további lehetséges lépések adhatók meg, a `szabad` függvény pedig tiltott mezők tetszőleges halmazát definiálhatja.

1.1.5. feladat: A $(0;0)$ pontból a $(5;4)$ rácspontba kell eljutni, jobbra és felfele lehet lépni, de tilos rálépni a $(3;2)$ és a $(2;3)$ pontra.

Hányféle út rajzolható?

Megoldás: Az 1.1.4. feladthoz képest annyi a különbség, hogy nincs olyan tiltott út, amelyik mindkét tiltott mezőn áthaladna.

A lehetséges utak száma:

$$\binom{9}{4} - \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} - \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 126 - 40 - 60 = 26.$$

A táblázatos módszerrel és a programmal is ugyanezt az eredményt kapjuk.

1.1.6. feladat: A $(0;0)$ pontból az $(n;m)$ rácspontba kell eljutni, jobbra és felefele lehet lépni, de tilos rálépni az $(r;s)$ pontra. $(0 < r < n, 0 < s < m)$

Hányféle út rajzolható?

Megoldás: Az általános képlet:

$$\binom{n+m}{n} - \binom{r+s}{r} \cdot \binom{(n+m)-(r+s)}{n-r}$$

1.1.7. feladat: A $(0;0)$ pontból indulunk, felfele vagy jobbra szabad lépni. Hány olyan út lehetséges, amelynek végpontja a $(0;n),(1;n-1),(2;n-2),\ldots,(k;n-k),\ldots,(n;0)$ pontok valamelyike?

Megoldás: A táblázatos módszer alapján könnyen megsejthető, hogy a lehetséges utak száma 2^n.

y/x	0	1	2	3	4	5
5	**1**					
4	1	**5**				
3	1	4	**10**			
2	1	3	6	**10**		
1	1	2	3	4	**5**	
0	1	1	1	1	1	**1**

Ez a binomiális együtthatók elméletéből közismert eredmény az utak segítségével egyszerűen magyarázható: A $(k;n-k)$ típusú pontok eléréséhez pontosan n lépés kell. Bármelyik lépés az előzőektől függetlenül kétféle lehet (`J` vagy `F`), tehát az összes lehetőségek száma valóban 2^n.

1.2 Catalan-számok

1.2.1. feladat: A $(0;0)$ pontból az $(n;n)$ rácspontba kell eljutni, jobbra és felfele lehet lépni. Az út nem mehet az $y = x$ egyenletű egyenes alá.

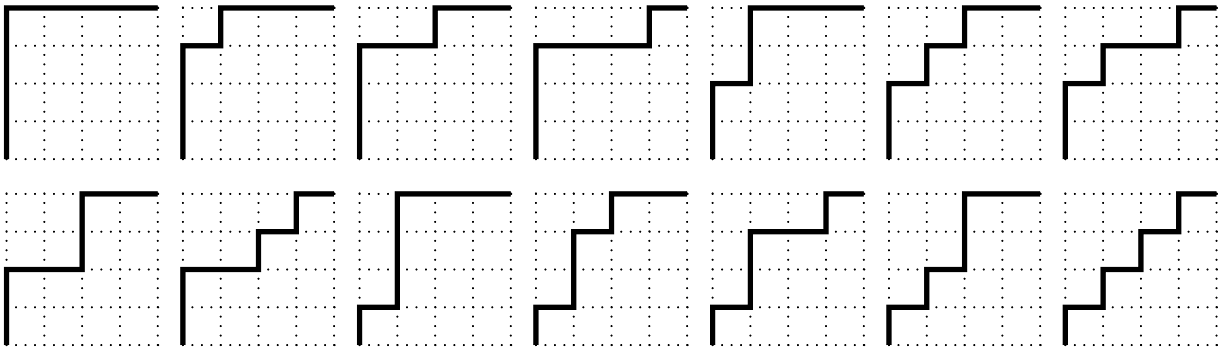
Hányféle út rajzolható?

Megoldás: A folytatásban c_n fogja jelölni a megfelelő utak számát. A c_n számokat szokás *Catalan-számoknak* nevezni. Eugène Catalan 1838-ban írt cikkében foglalkozott ezekkel a számokkal. A későbbieket egyszerűsíti, ha bevezetjük még a $c_0 = 1$ értéket.

Táblázatos módszerünkkel gyorsan megkapjuk a következő értékeket: $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 5, c_4 = 14$.

y/x	0	1	2	3	4
4	1	4	9	14	**14**
3	1	3	5	**5**	
2	1	2	**2**		
1	1	**1**			
0	**1**				

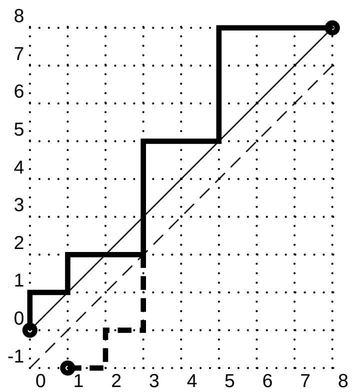
A $c_4 = 14$ út:



Az általános képlet levezetését az "összes eset" - "tiltott esetek" elv segítségével végezhetjük el. A tiltott esetek megszámlálását a *tükrözéses módszer* teszi lehetővé.

Ha egy $(0;0)$-ból $(n;n)$-be vezető út az $y = x$ egyenletű egyenes alá lép, akkor valahol biztosan rálép az $y = x - 1$ egyenletű egyenesre. Jelölje az *első* ilyen pontot M! A tiltott út M-ig tartó szakaszát tükrözzük az $y = x - 1$ egyenesre. Ekkor a $(0;0)$ kiindulópont képe az $(1;-1)$ pont lesz, és a tiltott út kezdeti szakasza az $(1;-1)$-ből induló és M-be érkező útba megy át.

A gondolatmenet megfordítható. Minden $(1;-1) \to (n;n)$ út metszi az $y = x - 1$ egyenest, az első ilyen metszéspontot jelölje ismét M. Az út M-ig tartó szakaszát az $y = x - 1$ egyenesre tükrözve egy $(0;0) \to (n;n)$ tiltott utat kapunk.



Tehát a tiltott utak száma egyenlő a $(1;-1) \to (n;n)$ utak számával. Az 1.1 feladataiban kapott eredmény szerint ilyen út összesen $\binom{(n-1)+(n+1)}{n-1} = \binom{2n}{n-1}$ van.

Hasonlóan az "összes" út száma $\binom{2n}{n}$.

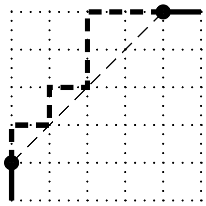
A keresett formula:

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)! \cdot (n+1)!} = $$
$$= \frac{(n+1) \cdot (2n)! - n \cdot (2n)!}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{(2n)!}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

1.2.2. feladat: A $(0;0)$ pontból az $(n;n)$ rácspontba kell eljutni, jobbra és felfele lehet lépni. Az út (az első és utolsó pont kivételével) nem érintheti az $y = x$ egyenletű egyenest.

Hányféle út rajzolható?

Megoldás: A feltétel miatt az első lépés kötelezően függőleges, az utolsó pedig vízszintes. Elég tehát a $(0;1)$-ből induló és $(n-1;n)$-be érkező utakat számolni. Ezek pont akkor felelnek meg, ha nem mennek az $y = x + 1$ egyenletű egyenes alá.

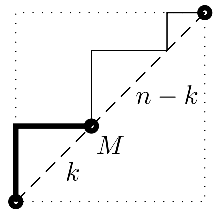


Ez éppen az előző feladat $n-1$ méretű esete, vagyis a megengedett utak száma: c_{n-1}.

1.2.3. feladat: A $(0;0)$ pontból az $(n;n)$ rácspontba kell eljutni, jobbra és felfele lehet lépni. Az út nem mehet az $y=x$ egyenletű egyenes alá.

Számoljuk meg az utakat aszerint csoportosítva, hogy mikor érik el először az $y=x$ egyenest az origó után!

Megoldás: Az első $y=x$-re eső pont legyen az $M(k;k)$ $(1 \le k \le n)$. Az M-ig tartó útszakaszok száma az 1.2.2. alapján c_{k-1}. (Itt felhasználjuk a $c_0 = 1$ jelölést is.) Az M utáni rész az 1.2.1. alapján c_{n-k}-féle lehet.



Az út M előtti és M utáni része egymástól független, tehát $c_{k-1} \cdot c_{n-k}$ olyan út van, ami nem megy az $y=x$ alá, és először az $M(k;k)$ pontban lép vissza erre az egyenesre.

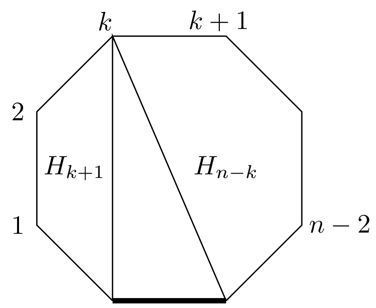
Minden lehetséges k-ra összegezve:

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} \cdot c_{n-k}$$

1.2.4. feladat: Hányféle módon bontható egy n oldalú sokszög nem metsző átlókkal háromszögekre?

Megoldás: Jelöljül H_n-nel az n oldalú sokszög lehetséges felbontásainak számát! Rövid rajzolgatás után kapjuk a következő értékeket: $H_3 = 1, H_4 = 2, H_5 = 5$.

Az általános esetben figyeljük meg a sokszög egyik rögzített oldalát. Erre az oldalra pontosan egy felbontásbeli háromszög illeszkedik. Az ábrán látható módon megszámozzuk a csúcsokat, és csoportosítjuk a felbontásokat aszerint, hogy a kijelölt oldalra illeszkedő háromszög harmadik csúcsa melyik sokszögcsúcs.



Ha a kijelölt harmadik csúcs a k., akkor ettől a háromszögtől balra egy $k+1$, tőle jobbra pedig egy $n-k$ oldalú sokszög helyezkedik el. Ezeket a sokszögeket egymástól függetlenül H_{k+1}, illetve H_{n-k}-féle módon bonthatjuk nemmetsző átlókkal háromszögekre. A lehetőségek száma összeszorzódik, mert a jobboldali sokszög bármelyik felbontásához a baloldali sokszög tetszőleges felbontása tartozhat.

A lehetséges k indexek: $1, 2, \ldots, n-2$. (Bevezetjük a $H_2 = 1$ jelölést.) A megengedett indexekre összegezve:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n-2} H_{k+1} \cdot H_{n-k}$$

A kapott összefüggés nagyon emlékeztet a Catalan-számok rekurziójára. Rövid gondolkodás után észrevehető, hogy kettővel eltolva az indexeket, pontosan átmegy a Catalan-féle képletbe.

$$c_{n-2} = \sum_{k=1}^{n-2} c_{k-1} \cdot c_{n-k-2}$$

Mivel a kezdőértékek is egyeznek ($H_2 = c_0, H_3 = c_1, H_4 = c_2$), bebizonyítottuk, hogy általában:

$$H_n = c_{n-2}$$

1.2.5. feladat: Hányféle helyes zárójelezés alkotható n darab zárójelpár felhasználásával?

Megoldás: Ha a nyitózárójel egy $(0;1)$ lépésnek, a csukózárójel pedig egy $(1;0)$ lépésnek felel meg, akkor a helyes zárójelezések Catalan típusú utaknak feltethetők meg.

Tehát, ha az n zárólejelpárból alkotható helyes zárójelezések száma Z_n, akkor $Z_n = c_n$.

$n = 4$-re $Z_4 = c_4 = 14$:

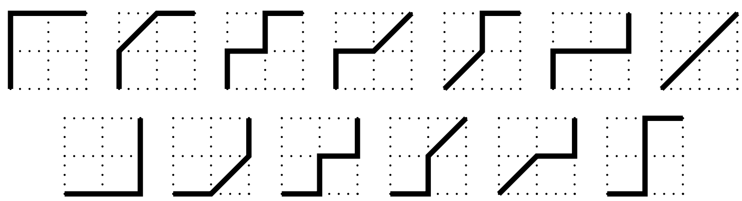
(((()))) ((()())) ((())()) ((()))() (()(())) (()()()) (()())()

(())(()) (())()() ()((())) ()(()()) ()(())() ()()(()) ()()()()

1.3 Delannoy-számok

1.3.1. feladat: A $(0;0)$ pontból az $(n;n)$ rácspontba kell eljutni, jobbra, felfele és átlósan jobbra felfele lehet lépni. Hányféle út lehetséges?

Megoldás: Az ábrán látható, hogy $n = 2$ esetén 13 különböző út lehetséges.



A táblázatos módszerrel könnyen meghatározható kis n értékekre a válasz. A $d_{x,y} = d_{x-1,y} + d_{x,y-1} + d_{x-1,y-1}, (x, y > 0)$ képlet alapján töltjük ki a cellákat, a $d_{0,y} = d_{x,0} = 1$ peremfeltétel mellett. Szokás bevezetni a $d_{n,n} = d_n$ jelölést. A d_n számokat *Delannoy-számoknak* nevezzük.

7	1	15	113	575	2241	7183	19825	**48639**
6	1	13	85	377	1289	3653	**8989**	19825
5	1	11	61	231	681	**1683**	3653	7183
4	1	9	41	129	**321**	681	1289	2241
3	1	7	25	**63**	129	231	377	575
2	1	5	**13**	25	41	61	85	113
1	1	**3**	5	7	9	11	13	15
0	**1**	1	1	1	1	1	1	1
y/x	0	1	2	3	4	5	6	7

A vastagon kiemelt számok adják meg a választ az eredeti kérdésre, $n = 1, 2, \ldots, 7$ esetén. Ezek a számok Henri Auguste Delannoy francia matematikusról kapták nevüket. Delannoy 1889-ben írt cikkében valószínűségszámítási problémák vizsgálata során foglalkozott különböző típusú rácsutak megszámlálásával.

A d_n számok felírására nem ismert "zárt" formula, van viszont többféle rekurzió, generátorfüggvény és összegképlet a kiszámításhoz.

1.3.2. feladat: Hány olyan kétsoros mátrix van, amelynek minden eleme 0 vagy 1, továbbá minden sorában pontosan n darab 1-es szerepel, és minden oszlopában van legalább egy 1-es?

Megoldás: A mátrixokat megfeleltethetjük utaknak. Egy $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ oszlop jelentsen jobbra lépést, egy $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ oszlop jelentsen felefele lépést és az $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ oszlop legyen az átlós lépés. A feltételek szerint csak ilyen oszlopok fordulhatnak elő. Mivel minden sorban pontosan n darab 1-es szerepel, ezért a lépések x és y irányban is n-et haladnak, tehát valóban egy $(0;0) \to (n;n)$ Delannoy-féle utat definiálnak.

A megfeleltetés a mátrixok és a Delannoy-utak között kölcsönösen egyértelmű, így a lehetséges mátrixok száma d_n.

Például $n = 2$ esetén, az 1.3.1. feladatbeli ábrának megfelelő sorrendben:

$$\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

1.3.3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a d_n számok előállíthatók a következő alakban:

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n+i}{i}$$

Megoldás: A Delannoy-utakat három jellel kódolhatjuk: a $(0;1)$ lépés jele `J`, az $(1;0)$ jele `F` és az $(1;1)$ jele `A`. (Jobbra, felfele, átlósan.) A `J` és `F` lépések számának meg kell egyeznie. Ha i darab `J`-`F` lépéspár van, akkor $n - i$ darab átlós lépésnek kell lennie, így összesen $2i + n - i = n + i$ jelből áll egy kód.

A kódot egyértelműen megadja a `J` és `F` lépések pozíciója. Ez összesen $\binom{n+i}{i} \cdot \binom{n}{i}$ lehetőség, mert az $n + i$ helyből először kiválaszthatjuk az i darab `J` helyét, majd a maradék n hely közül kiválaszthatjuk az `F`-ek helyét. Ezután az `A` lépések kódbeli helye már adott.

Minden olyan kód jó Delannoy-utat ad meg, amiben i darab `J` és `F`, továbbá $n-i$ darab A van, tehát a `J`-k és `F`-ek pozíciójának kiválasztása egymástól függetlenül végezhető. Ezért szoroztuk össze a lehetőségek számát az előző képletben.

Minden lehetséges i-re összegezve kapjuk a feladat állítását.

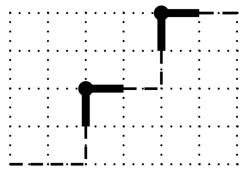
1.3.4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a $d_{m,n}$ számokra teljesül a következő összefüggés:

$$d_{m,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i}\binom{n}{i} 2^i$$

Megoldás: Két lépésben mutatjuk meg az állítás helyességét. Először azokat az utakat számoljuk meg, amelyekben nincs átlós lépés. Az ilyen utakat csoportosíthatjuk valamilyen speciális rész előfordálásainak száma szerint. Nevezzük *csúcsnak* az útban az `FA` részsorozatot. A csúcs koordinátái az `F` lépés végpontjának koordinátái.

Segédtétel: A $(0;0)$-ból $(m;n)$-be vezető, átlós lépések nélküli, pontosan i darab csúcsot tartalmazó utak száma $\binom{m}{i} \cdot \binom{n}{i}$.

A segédtétel bizonyítása: Először is vegyük észre, hogy a csúcsok koordinátáinak megadása meghatározza az utat, hiszen két csúcs között csak `JJ...JFF...F` típusú út vezethet.



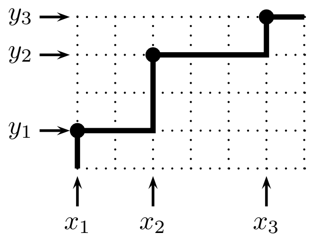
Másodszor az út mentén haladva a rácspontokon mind az x mind az y koordináták sorozata monoton növekvő, hiszen a megengedett lépések egyik koordinátát sem csökkentik.

Tehát ha megadjuk az i darab csúcs i darab x, majd i darab y koordinátáját, akkor egyértelmű, hogy melyik x koordinátának melyik y koordináta a párja.

Mivel a csúcs egy `FJ` lépéspár, ezért a csúcsok koordinátái eleget tesznek az alábbi feltételeknek:

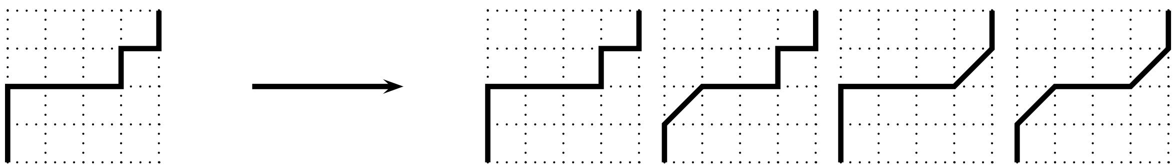
$$0 \leq x_{cs} \leq m-1, \quad 1 \leq y_{cs} \leq n$$

A lehetséges m-féle x koordináta közül és a lehetséges n-féle y koordináta közül egymástól függetlenül választhatjuk ki az i darabot, és bármelyik választáshoz tartozik egy út, tehát a csúcsok kijelölése valóban $\binom{m}{i} \cdot \binom{n}{i}$ különböző módon történhet.



Most már rátérhetünk a feladat állításának bizonyítására. Az $(m;n)$ pontba vezető Delannoy-utakból csak `F` és `J` lépéseket tartalmazó utakat készíthetünk, ha az `A` lépéseket `FJ` csúcsokra cseréljük. Megfordítva, egy csak `F` és `J` lépésekből álló útból Delannoy-utakat "gyárthatunk", ha a csúcsok közül néhányat átlós lépésekre cserálünk.

Ha i csúcs van, akkor 2^i-féle különböző módon lehet néhány csúcsot átlós lépésre cserélni.



Legfeljebb $\min(m,n)$ lehet a csúcsok és átlós lépések együttes száma, és az előbbi módszerrel mindegyik utat pontosan egyszer kapjuk meg, abból az `F-J` útból, amelyben a csúcsok száma megegyezik a Delannoy-út csúcsainak és átlós lépéseinek együttes számával.

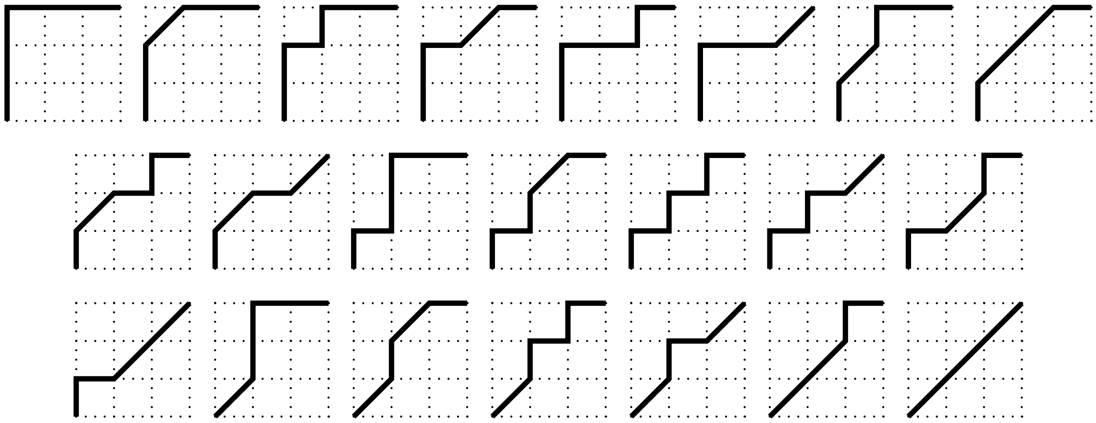
Tehát $\binom{m}{i} \cdot \binom{n}{i} \cdot 2^i$ olyan Dellanoy-út vezet $(m;n)$-be, amelyben a csúcsok és átlós lépések együttes száma i.

A csúcsok és átlós lépések együttes száma $i = 0, 1, 2, \ldots, \min(m,n)$ lehet, minden lehetséges i-re összegezve kapjuk a feladat állítását.

1.4 Nagy Schröder-számok

1.4.1. feladat: A $(0;0)$ pontból az $(n;n)$ rácspontba kell eljutni, jobbra, felfele és átlósan felfele lehet lépni. Az út nem mehet az $y=x$ egyenletű egyenes alá. Hányféle út létezik?

Megoldás: Az ábra az $n=3$ esetén kapható 22 különböző megoldást mutatja.



A táblázatos módszerrel kis n-ekre a következő értékeket kapjuk:

y/x	0	1	2	3	4	5
5	1	10	48	146	304	**394**
4	1	8	30	68	**90**	
3	1	6	16	**22**		
2	1	4	**6**			
1	1	**2**				
0	**1**					

A táblázatban vastagon írt számokat *nagy Schröder-számoknak* nevezzük, szokásos jelölésük r_n.

Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder német matematikus 1870-ben megjelent cikkében (Vier Combinatorische Probleme) különböző zárójelezési feladatokat vizsgálva jutott el az r_n sorozathoz.

Megjegyzés: Most is alkalmazható a tükrözéses módszer, amivel a Catalan-utakat számoltuk meg, de most nem kapunk zárt formulát, csupán a Dellanoy-számokkal fejezhetjük ki a Schröder-számokat. Az összes $(n;n)$-be vezető Dellanoy-utak számából levonjuk a "rossz" utak számát. A rossz utak az $y=x$ egyenletű egyenes alá mennek, tehát legalább egszer rálépnek az $y=x-1$ egyenletű egyenesre. Ha az első ilyen "rálépési" pont előtti rész-utat tükrözzük az $y=x-1$ egyenletű egyenesre, akkor egy $(1;-1)$-ből $(n;n)$-be tartó Dellanoy-utat kapunk, és minden ilyen út megkapható a rossz utakból.

Innen a következő egyszerű formula kapható:

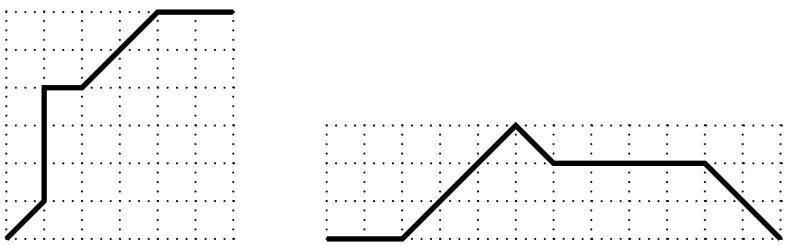
$$r_n = d_n - d_{n-1,n+1}$$

Ellenőrzésképpen kiszámítjuk r_4-et, felhasználva az előző alpont táblázatából ismert Dellanoy-számokat. $r_4 = d_4 - d_{3,5} = 321 - 231 = 90$

1.4.2. feladat: A $(0;0)$ pontból az $(2n;0)$ rácspontba kell eljutni. A megengedett lépések: $(1;1)$, $(1;-1)$ és $(2;0)$. Az út nem mehet az X tengely alá. Hányféle út létezik?

Megoldás: Rövid rajzolgatás után felfedezhető, hogy ez a feladat azonos az előzővel. A koordinátarendszer 45°-os elforgatása és $\sqrt{2}$-szörös megnyújtása megfelelteti az előző példa útjait a most megszámolandó utaknak.

Más szavakkal a $(0;1)$ lépés megfelelője az $(1;1)$, az $(1;1)$-é a $(2;0)$ és az $(1;0)$ megfelelője az $(1;-1)$.



Az utak száma tehát most is r_n.

A Dellanoy-számokhoz hasonlóan a Schröder-számok kiszámítására sem ismert zárt formula.

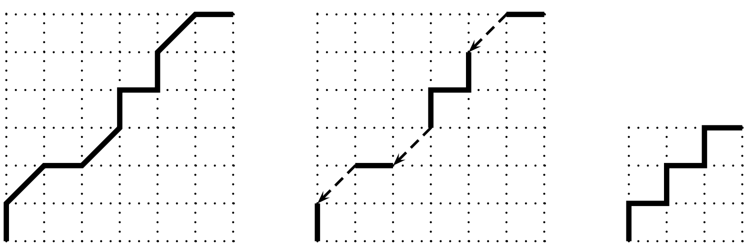
1.4.3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy

$$r_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{k} \cdot c_{n-k}$$

Megoldás: A c_{n-k} Catalan-szám miatt sejthetjük meg, hogy érdemes az r_n által megszámolt utakat két részből "összerakni", az átlós lépésekből és a maradékból. A maradék felel majd meg valamilyen Catalan-útnak. Innen már könnyen rájöhetünk, hogy a fenti összegben a k változó az átlós lépések számát jelenti.

Megmutatjuk tehát, hogy a pontosan k darab átlós lépést tartalmazó nagy Schröder-utak száma $\binom{2n-k}{k} \cdot c_{n-k}$. A szokásos kód segítségével bizonyítunk. Egy nagy Scröder-út `J`, `F` és `A` lépésekből áll. Legfeljebb $2n$ jelből áll egy kód, ha k darab `A` van, akkor pontosan $2n-k$ jelből.

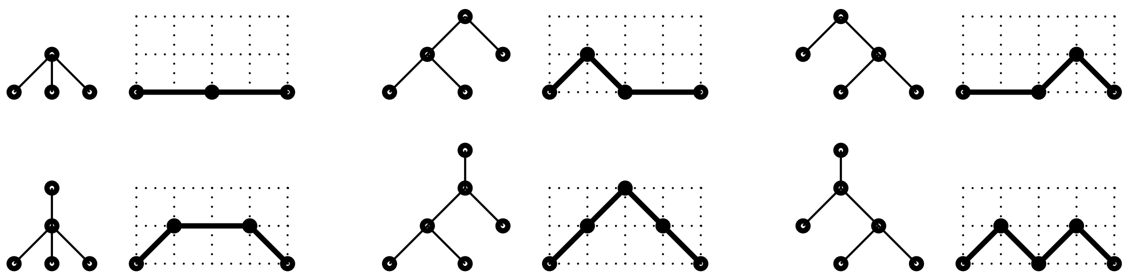
Ha a $2n-k$ hosszú kódban kijelöljük az `A`-k helyét (ezt $\binom{2n-k}{k}$-féle módon tehetjük meg), akkor a megmaradt útszakaszok egy $n-k$ méretű Catalan-úttá "nyomhatók" össze, az ábrán látható módon.



Bármelyik Catalan-út tetszőleges pozíciójára beilleszthetünk átlós lépéseket, és így nagy Schröder-utakhoz jutunk. Tehát mind a c_{n-k}-féle Catalan-út $\binom{2n-k}{k}$-féle módon egészíthető ki nagy Schröder-úttá, ebből adódik a feladat állítása.

1.4.4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy azon $n+1$ levelű rendezett gyökeres fák száma, melyekben a levelek és a gyökér kivételével minden pont kifoka legalább kettő, pontosan r_n!

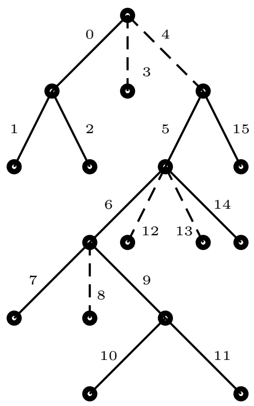
Megoldás: Az $n+1$ levelű fákat egy informatikából ismert bejárási algoritmus segítségével megfeleltetjük nagy Schröder-utak 1.4.2-ben leírt változatának. Az ábra az $n=2$ eset illusztrációja.

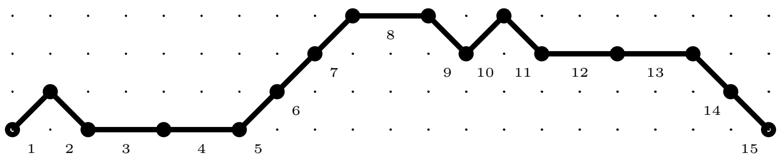


A megfeleltetés a gyökeres fa bal-közép-jobb bejárása szerint, az alábbi szabályoknak megfelelően végezhető:

- A bal-közép-jobb bejárás sorrendjében beszámozzuk az éleket, nullával kezdve a számozást. A nagy Schröder-út lépései sorrendben megfelelnek a fa beszámozott éleinek.
- A gyökérből (balra) induló első él kapja a nulla sorszámot.
- A gyökér kivételével minden csúcsra, a belőle kiinduló élekhez a következő módon rendelünk lépéseket a Schröder-útban:
  - A (balra) első él $(1;1)$ lépésnek felel meg.
  - Az utolsó él $(1;-1)$ lépésnek felel meg.
  - A közbülső élek $(2;0)$ lépéseknek felelnek meg.
- A gyökérből induló éleknek (az első kivételével) vízszintes lépések felelnek meg.

A következő ábra egy nagyobb példán mutatja be a fenti hozzárendelést. A vízszintes lépéseknek megfelelő éleket szagatott vonal jelzi.





Most megmutatjuk, hogy a fenti konstrukció oda-vissza egyértelmű megfeleltetést létesít a megengedett típusú gyökeres fák és a nagy Schröder-utak között.

Ha fa szintjei szerinti indukcióval bizonyítunk. Ha a gyökér alatt egyetlen szint van, $n+1$ levéllel, akkor a 0. éltől eltekintve n darab "szaggatott" él marad, ez n vízszintes lépésnek felel meg, ami valóban egy $(0;0) \to (2n;0)$ nagy Schröder-út.

Tegyük fel, hogy a legfeljebb k szintű fákra igaz az állítás. Bármelyik $k+1$ szintű fa megkapható egy k szintűből úgy, hogy a k szintű fa valamelyik levele alá "becsatlakoztatunk" néhány (≥ 2) élet. Tegyük fel, hogy a k szintű fának $n+1$ levele volt, és m élet rajzoltunk be. Mivel egy levél megszűnt, $(m-1)$-gyel több levele van az új fának.

Mivel legalább két élnek kell indulnia minden belső csomópontból, ezért az új élek közül az első egy felefelé, az utolsó pedig egy lefelé lépés, a közbülsők vízszintesen haladnak, vagyis a beillesztett élek nem rontják el azt a tulajdonságot, hogy a megfeleltetett út visszaér a 0 y koordinátájú egyenesre végül.

Az x irányú elmozdulás is rendben van, mert a két szélső lépés eggyel, a közbülsők kettővel növelték az x irányú elmozdulást, ez $1+1+2\cdot(m-2) = 2m-2 = 2\cdot(m-1)$, és pont $(m-1)$-gyel növeltük a levelek számát.

Vegyük észre, hogy a fa bejárásánál a szintek pontosan annak felelnek meg, hogy a Schröder-út mennyivel az X tengely fölött jár (pontosabban a vízszintes lépések élei vannak ennyivel a gyökér alatt, a gyökérből induló éleket tekintve a 0. szintnek), tehát soha nem fogunk a tengely alá kerülni, és az $n+m$ levelű fának megfelelő út eljutott $(0;0)$-ból $(2(n+m-1);0)$-ba.

A megfordításhoz csak azt kell végiggondolnunk, hogy egy nagy Schröder-útból visszakapható egy megfelelő gyökeres fa. Ez egy egyszerű algoritmussal megmutatható.

Felrajzoljuk a gyökeret és a belőle induló 0. élet. Ezután az algoritmus végrahjtása során mindig tároljuk az utoljára megrajzolt él gyökérhez közelebbi a és gyökértől távolabbi b végpontját. Három eset van:

- Átlós felefele lépés következik. b-ből rajzolunk lefelé egy új élet, és ennek végpontjai lesznek megfelelő sorrendben a és b.
- Vízszintes lépés következik. a-ból rajzolunk egy szaggatott élet. a nem változik, b az új él alsó végpontja lesz.
- Átlós lefelele lépés következik. a-ból rajzolunk egy folytonos élet. Az új a az eddigi a feletti csomópont lesz, az új b pedig az eddigi a.

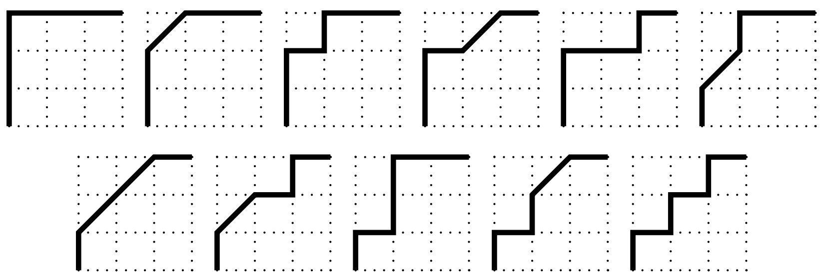
Mivel a Scröder-út 0-ról indul és oda is ér vissza, minden átlós lépésnek lesz ellenkező irányú párja, tehát teljesül az a feltétel, hogy a belső csomópontok kifoka legalább kettő.

Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

1.5 Kis Schröder-számok

1.5.1. feladat: A $(0;0)$ pontból az $(n;n)$ rácspontba kell eljutni, jobbra, felfele és átlósan felfele lehet lépni. Az út nem mehet az $y=x$ egyenletű egyenes alá és az $y=x$ egyenesen nem lehetnek átlós lépések. Hányféle út létezik?

Megoldás: Az ábra az $n=3$ esetben kapható 11 megoldást mutatja.



A táblázatos módszerrel kis n-ekre a következő értékeket kapjuk:

y/x	0	1	2	3	4	5
5	1	9	39	107	197	**197**
4	1	7	23	45	**45**	
3	1	5	11	**11**		
2	1	3	**3**			
1	1	**1**				
0	**1**					

A táblázatban vastagon írt számokat *kis Schröder-számoknak* nevezzük, szokásos jelölésük s_n.

1.5.2. feladat: A $(0;0)$ pontból az $(2n;0)$ rácspontba kell eljutni. A megengedett lépések: $(1;1)$, $(1;-1)$ és $(2;0)$. Az út nem mehet az X tengely alá és az X tengelyen nem lehetnek vízszintes lépések. Hányféle út létezik?

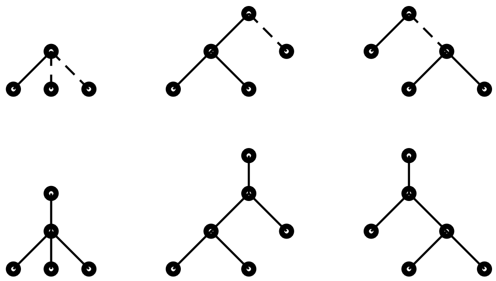
Megoldás: Az 1.4.2. megoldásával teljese megegyező módon látható, hogy most is s_n a válasz.

1.5.3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy $r_n = 2s_n$, ha $n > 0$!

Megoldás: Az 1.4.4.-ben látott gyökeres fák segítségével bizonyítunk. Megmutatjuk, hogy a feltételeknek megfelelő gyökeres fáknak pontosan a fele generál kis Schröder-utat.

Azt kell csak észrevennünk, hogy a tengelyre eső vízszintes lépések a gyökérből induló szaggatott éleknek felenek meg, tehát a kis Schröder-utak azokhoz a fákhoz tartoznak, amelyeknek gyökeréből egyetlen él indul (a 0. él).

Az pedig az ábra alapján könnyen látható, hogy az ilyen fák pontosan feleannyian vannak, mint az összes nagy Schröder-útnak megfelelő fa.



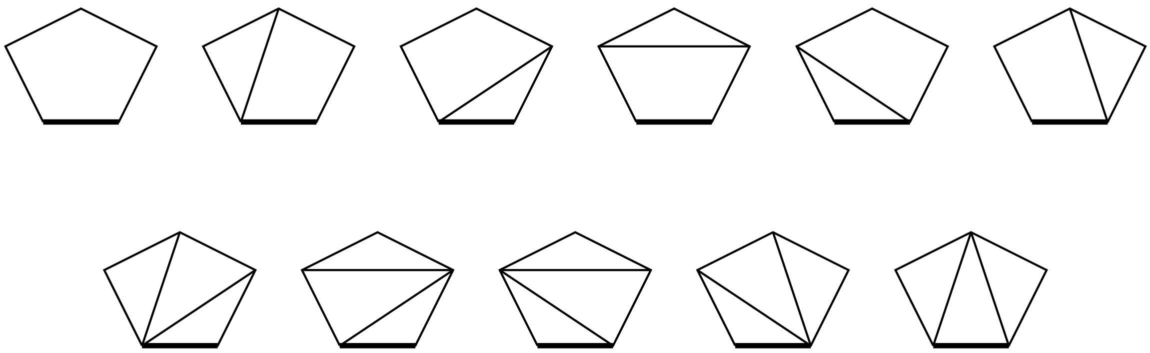
1.5.4. feladat: Hányféle módon zárójelezhető egy $n+1$ karakterből álló sorozat? (Egyetlen karaktert nem zárójelezünk, és a teljes sorozatot sem.)

Például a 4 hosszú lánc zárójelezései:

$$abcd, (ab)cd, (abc)d, a(bc)d, a(bcd), ab(cd)$$
$$((ab)c)d, (a(bc))d, a((bc)d), a(b(cd)), (ab)(cd)$$

1.5.5. feladat: Egy $n+2$ oldalú konvex sokszöget néhány nemmetsző átlójával sokszögekre bontottunk. Hányféle felbontás lehetséges, ha a sokszög egyik oldalát kijelöltük "alapnak"? (Tehát két elforgatással egymásba vihető felbontás különbözőnek számít.)

Például egy ötszög felbontásai:



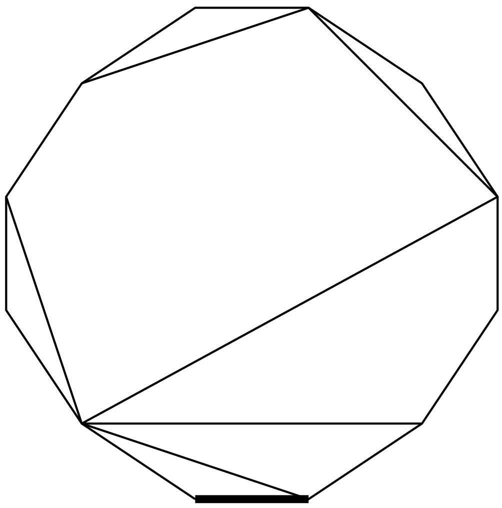
Megoldás: (1.5.4. és 1.5.5.) A zárójelezések és a sokszögfelbontások is megfeleltethetők $n+1$ levelű, kis Schröder-utaknak megfelelő gyökeres fáknak.

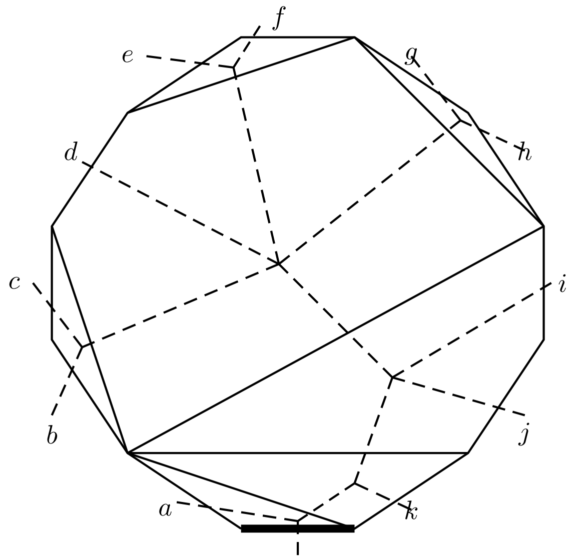
A sokszög oldalai (a kijelölt oldal kivételével) a zárójelezendő kifejezés szimbólumaival lesznek felcímkézve. A kijelölt oldalnál lép be a sokszögbe a fa gyökere, a fa belső csomópontjai a felbontás tartományai, a levelek pedig a sokszög oldalai.

Az

$$a((((bc)d(ef)(gh))ij)k)$$

kifejezésnek megfelelő sokszögfelbontás és fa látható a következő ábrán:





A konstrukcióból látszik, hogy pont azokat a gyökeres fákat kapjuk meg, amelyek kis Schröder-utaknak felelnek meg.

2. Útrendszerek és permutációk

2.1. feladat: A $(0;0)$ pontból és a $(0;2)$ pontból indul egy-egy hangya. Jobbra és felfele léphetnek. A $(6;6)$ és $(6;9)$ pontokba kell érkezniük. (A két hangyának különböző pontba kell érkeznie, de nincs megadva, hogy melyiknek hova.)

Hányféle módon érkezhetnek célba a hangyák?

2.2. feladat: A $(0;0)$ pontból és a $(0;2)$ pontból indul egy-egy hangya. Jobbra és felfele léphetnek. A $(6;6)$ és $(6;9)$ pontokba kell érkezniük. (A két hangyának különböző pontba kell érkeznie, de nincs megadva, hogy melyiknek hova.) **A hangyák által megtett utak nem metszhetik egymást.**

Hányféle módon érkezhetnek célba a hangyák?

2.3. feladat: A kinduló pontok: $A_1(-1;0)$, $A_2(-3;0)$, $A_3(-5;0)$. A célpontok: $B_1(1;0)$, $B_2(3;0)$, $B_3(5;0)$. A megengedett lépések: $(1;1)$, $(1;-1)$ és $(2;0)$. Nem mehetünk az X tengely alá. Hány nemmetsző útrendszer létezik?

2.4. feladat: A kinduló pontok: $A_1(-1;0)$, $A_2(-3;0)$, $A_3(-5;0)$. A célpontok: $B_1(1;0)$, $B_2(3;0)$, $B_3(5;0)$. A megengedett lépések: $(1;1)$, $(1;-1)$ és $(2;0)$. Nem mehetünk az X tengely alá és az X tengelyenen nem léphetünk vízszintesen. Hány nemmetsző útrendszer létezik?

3. Determinánsok

3.1. feladat: Bizonyítsuk be a **Gessel-Viennot tételt:** Adott $2n$ rácspont, az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kiinduló pontok, és a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ célpontok, továbbá a megengedett lépések véges halmaza. Tudjuk, hogy az $A_i \to B_j$ megengedett utak száma m_{ij}. Ekkor az A_i pontokból induló és a B_j pontokba érkező nemmetsző útrendszerek száma

$$\pm \det \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \vdots & m_{12} & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

Gráfon? Kell az, hogy csak az id. perm.-hoz tartozhat nemmetsző útrendszer?

4. Alkalmazások

4.1 Dominófedések

Az alábbi feladatokban különböző alakzatokat fedünk le 2×1-es dominókkal. A dominófedéseket nem metsző útrendszereknek feleltetjük meg. Ha egy dominóba belép valamelyik oldalfelezőpontjánál egy út, akkor a belépési pont középpontosan szimmetrikus képénél lép ki.

4.1.1. feladat: Egy 6×6-os négyzetet dominókkal fedtünk. A bal szélső oldal minden második egységnyi élének felezőpontjából elindítunk egy utat, a fenti szabály szerint.

a) Bizonyítsuk be, hogy az így keletkező utak nem metszik egymást!

b) Mutassuk meg, hogy az útrendszer és a dominófedés között egyértelmű megfeleltetés létesíthető!

4.1.2. feladat: Hányféle módon fedhető le a 6×6-os négyzet dominókkal?

4.1.3. feladat: A kiterjesztett Azték gyémántot dominókkal fedtük. Bal szélének középső éle felezőpontjából indítsunk el egy utat!

a) Mutassuk meg, hogy az út a jobb szélső középső él felezőpontjába érkezik!

b) Bizonyítsuk be, hogy az előbb megadott út és a kiterjesztett Azték gyémánt dominófedései között egyértelmű megfeleltetés van!

4.1.4. feladat: Hányféle módon fedhető le az n. kiterjesztett Azték gyémánt dominókkal?

4.1.5. feladat: Az Aztėk gyémántot dominókkal fedtük. Bal felső "szélének" élfelező pontjaiból kiindítunk egy-egy utat.

a) Bizonyítsuk be, hogy az utak nem metszik egymást!

b) Bizonyítsuk be, hogy az előbb leírt típusú nem metsző útrendszerek és az aztėk gyémánt dominófedései között egyértelmű megfeleltetés van!

4.1.6. feladat: Hányféle módon fedhető le az n. Aztėk gyémánt dominókkal?

4.2 Mátrix azonosságok

4.2.1. feladat: Bizonyítsuk be a determinánsok szorzástételét a Gessel-Viennot tétel segítségével!

A tétel: Ha A és B $n \times n$-es mátrixok, akkor

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Irodalomjegyzék

Aigner M., Ziegler G. M. *Rácsutak és determinánsok*
Bizonyítások a könyvből, Typotex (2004)

Banderier C., Schwer S. *Why Delannoy Numbers?*

Gessel I., Viennot G. *Binomial Determinants, Paths, and Hook Length Formulae*
Advances in Mathematics 58, 300-321 (1985)

Benjamin A. T., Cameron N. T. *Counting on Determinants*
(2005)

Zeilberger D. *A Combinatorial Approach to Matrix Algebra*
Discrete Mathematics 56, 61-72 (1985)

Shapiro L. W., Sulanke R. A. *Bijections for the Schröder Numbers*
Mathematics Magazine 73, 369-376 (2000)

Stanley R. P. *Hipparchus, Plutarch, Schröder, and Hough*
American Mathematical Monthly 104, 344-350 (1997)

Luby M., Randall D., Sinclair A. *Markov Chain Algorithms for Planar Lattice Structures*

Hanusa C. *A Gessel-Viennot Type Method for Cycle Systems*
(2006)

Benjamin A. T., Cameron N. T., Quinn J. J. *Fibonacci Determinants – A Combinatorial Approach*

Tartalomjegyzék