BDG Matektábor

A Berzsenyi Dániel Gimnázium matematika munkaközössége

2005

Csonka Dorottya: Érdekes számok

Mikor alakulhatott ki a szám fogalma? Mióta tud az ember számolni? Már az ősembernek is tudnia kellett, hogy mennyi állatot kell a vadászaton elejtenie ahhoz, hogy a családja elég élelemhez jusson. Így aztán nyilvánvalóan képes is volt összeszámolni a családja tagjait éppúgy, mint az elejtett állatokat. Vajon mit használhatott ehhez akkoriban az ősember? Először is ott volt már akkor is a kezén az a néhány ujj. Aztán ha az ujjak már nem voltak elegendőek, lehetett rovátkákat rajzolni a földre, a fába vagy a falra. Ezeken kívül ott voltak még a kövek, kavicsok is, amelyekkel szintén nagyon egyszerűen lehet összeadni, vagy akár kivonni is.

Régészeti leletek bizonyítják, hogy egyes ókori népek kis kövecskéket helyeztek agyagedényekbe, hogy így jegyezzék fel valaminek a mennyiségét. Fontos volt tudni például, hogy mennyi birkánk van, és hogy a legelésből hazatérve, mind megjött-e? Ahogy egy birka kiment reggel a karámból, egy követ tettek az agyagedénybe. Így amikor visszajöttek, csak ki kellett venni minden egyes beérkező birkánál egy követ. Ha elfogytak a kövek, de volt még birka, az azt jelentette, hogy több birka jött be, mint amennyi kiment. Viszont ha volt még kő, de elfogytak a birkák, az azt jelentette, hogy annyi birka hiányzik, mint amennyi kő a tálkában van. Azaz egy kőhöz egy számot rendeltek, még ha nem is mondták ki.

De hogyan lehet a kövekkel számolni? Mi mindent olvashatunk ki a kövekből? Hogyan segítenek a kövek megismerni a számokat? Mindenkinél van egy doboz kavics/go készletből kő. Kezdjétek el kirakosgatni a számokat, és gyűjtsetek össze minél több tulajdonságot!

Kiderült, hogy:

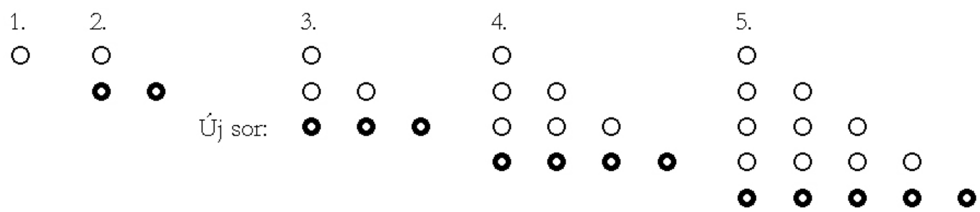
- Azok a számok, amiket csak egy sorba lehet elhelyezni, azokat hívtuk eddig **prím**eknek.
- Ha egy számot téglalap alakzatba ki tudunk rakni, akkor az oldalainak a hossza a szám osztóit adja meg. Közösen elneveztük ezeket téglalapszámnak.
- Ha a számból négyzetet tudunk formálni, akkor az pont **négyzetszám**. Itt kicsit megdöbbentünk azon, hogy már értjük, honnan jön a kifejezés.
- Ha derékszögű háromszög formálható belőle, azokat **háromszögszám**nak nevezzük.

Háromszögszámok

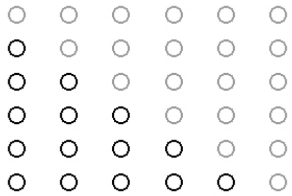
Itt álljunk is meg egy kicsit. Gyűjtsük össze a háromszög-számokat!
$1, 3, 6, 10, 15, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105$, stb.

Keressünk olyan tulajdonságokat, amik a háromszögszámokra igazak! Hogyan segítenek kavicsok bebizonyítani ezeket a tulajdonságokat?

- A háromszög számok egymás utáni egészek összegei: $1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6$, stb. Ha van már egy háromszögszámunk, akkor a legnagyobb oldala alá pont eggyel több kavics kerül, mint amennyi eddig ott volt:

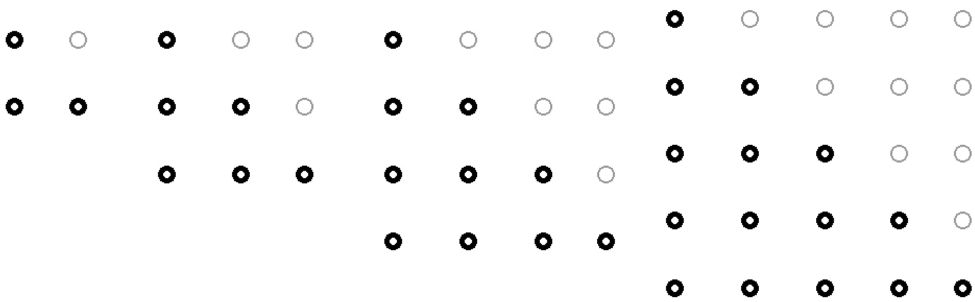


- A háromszögszám oldala pont olyan hosszú, mint ahányadik háromszögszámról van szó. Itt be is vezethetjük a $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, stb. jelölést az első, második, stb. háromszögszámra.
- Az első észrevételt így átírthatjuk ilyen alakba: $\Delta_n + (n+1) = \Delta_{n+1}$ ahol n a sorszám.
- Néhányan gyorsan látták, hogy az n. háromszögszámot csak az n segítségével felírhatjuk ilyen alakban is: $\Delta_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Néhányan rávágták, hogy a bizonyítás Gauss módszerrel egyszerű. Megkértem őket, hogy próbáljuk a köveket használni a bizonyításhoz. Rá is jöttek, hogy két Δ_n-t egymás felé fordítva egy $n \cdot (n+1)$-es téglalapot kapunk, aminek a területe pont a két oldal szorzata, így a Δ_n területét ennek feleként kapjuk.

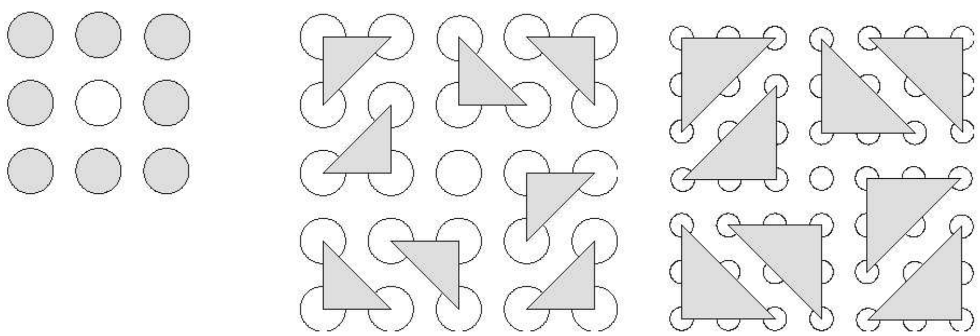


A háromszögszámok és a négyzetszámok kapcsolata

Az előző bizonyításnál észrevette valaki, hogy ha nem két ugyanolyan háromszögszámot illesztünk egymáshoz hanem két egymás utánit, akkor pont négyzetet tudunk létrehozni. Azaz $\Delta_{n-1} + \Delta_n = n^2$. Megbeszéltük, hogy az észrevétel mindig igaz lesz, nem függ a háromszögszámtól.



Igaz-e, hogy egy háromszögszám nyolcszorosánál eggyel nagyobb szám is négyzetszám? Hogyan bizonyítanád ezt be? Az állítás igaz: $8\cdot\Delta_n+1 = (2n+1)^2$. Bizonyítani könnyen lehet, ha a háromszögeket megfelelően elhelyezzük a négyzetben. Növelve a háromszögek méretét, a négyzet is a sejtés szerint nő.



Feladatok

1. 12-en vannak egy társaságban. Mindenki mindenkivel koccint. Hány koccintás hallatszott?

2. Egy 3×3-as négyzetben hány téglalap van? (3×3×3-as kockában hány téglatest? Mennyi kisebb téglalap van egy tetszőleges téglalapban? És egy tetszőleges téglatestben hány kisebb téglatest?)
3. A háromszögszámokat módosítsuk egy kicsit. Csak a kerületén lévő köveket hagyjuk meg. Milyen számokat kapunk ekkor? Miért?
4. Vannak ötszög számok és hatszögszámok is. Keress párat! Mit vettél észre?

A feladatok megoldásai, röviden

1. A 12 ember mindegyike 11 másikkal koccint, de egy koccintást így "két oldalról" számoltunk, ezért csak $\frac{12 \cdot 11}{2} = 6$ koccintást hallhatunk.
2. A téglalap függőleges oldalait a 3×3-as négyzet függőleges oldalai közül választhatjuk ki. A 4 lehetséges közül, ha egyet kiválasztunk, akkor már csak a maradék 3 függőlegesből választhatunk, de persze a függőlegesek szerepe felcserélhető, ezért ennek a szorzatnak a fele lesz a lehetőségszám. Ezt hasonlóan a vízszintes oldalakra is elvégezhetjük, tehát: $\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 36$. Hasonlóan okoskodhatunk a téglatestek esetén is, csak ott síkokat választunk ki.
3. A kapott számok: $1, 3, 6, 9, 12, \ldots$ stb a hárommal osztható számok, hiszen az oldalak mindegyike a következő lépésben eggyel nő.
4. Hatszögszámok például: $7, 19, 37, 61, \ldots$

Zsófi az előző óra végén azt a sejtést fogalmazta meg, hogy a hatszögszámok mindig prímszámok lesznek. Ez az első néhány szám esetén tényleg igaz: 7, 19, 37, 61, 91, 127. De sajnos a következő hatszögszámnál a sejtés megdőlni látszik, mert az a szám a 169, ami a 13 négyzete. Az eset kapcsán arról kezdtünk beszélni, hogy mi a bizonyítás lényege. Mire jó az ellenpélda, és hogy a bizonyításainkkal azt akarjuk elérni, hogy minden egyedről belássuk, hogy rá igaz az a tulajdonság, ne találhassunk ellenpéldát. Ne legyünk könnyelműek, és csak sejtést fogalmazzunk meg ... stb

A tökéletes számok

Tökéletes számnak nevezzük azokat a számokat, amelyek előállnak a náluk kisebb pozitív osztóik összegeként. Ezeket a számokat már az ókori egyiptomiak is ismerték. Szent Ágoston azt mondta, hogy Isten azért teremtette a Világot 6 nap alatt, mert a 6 tökéletes szám, és nem fordítva.

Keressétek meg a következő tökéletes számot! (Segítség: 50 alatt van.)
A következő tökéletes szám a 28, hiszen $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

Ekkor szóba hoztuk azt, hogy hogyan lehet az osztók számát a prímtényezős felbontásból kitalálni. Nem mentünk bele a levezetésbe, akik már tanulták, azok emlékeztek rá, akik nem, azoknak el kellett fogadniuk a képletet. Lényegében később nem használtuk nagyon, csak az osztók keresésénél segített nekik, és a végén egy feladatnál.

A pitagoreusok csak az első négy tökéletes számot ismerték:
$2 \cdot (2^2 - 1) = 6$
$2^2 \cdot (2^3 - 1) = 28$
$2^4 \cdot (2^5 - 1) = 496$
$2^6 \cdot (2^7 - 1) = 8128$

Szendrei Peti észrevette, hogy ez a négy tökéletes szám mindegyik kettőhatványszor prím alakú. Itt segítettem nekik, és felírtuk, a prímet is a fenti alakban. Rögtön jött a sejtés, hogy a következő tökéletes szám a $2^{10} \cdot (2^{11} - 1) = 1024 \cdot 2047 = 2096128$. Sz.Peti arra is rájött - vagy már ismerte, hogy a 2^n típusú számoknak könnyű kiszámolni az osztóinak az összegét, mert az pont az n-nél kisebb kettő-hatványok összege, ami $2^{n+1} - 1$. Majd elmondtam Hudalrichus Regius történetét, és hogy a $2047 = 23 \cdot 89$. Ekkor kiderült, hogy a sejtés nem igaz.

Időszámításunk előtt 100 körül Nicomachus öt állítást tett a tökéletes számokról:

1. Az n. tökéletes számnak n jegye van.
2. Minden tökéletes szám páros.
3. A tökéletes számok felváltva 6-ra és 8-ra végződnek.
4. Minden tökéletes szám $2^{p-1} \cdot (2^p - 1) = 8128$ alakú, ahol a $2^p - 1$ prím.
5. Végtelen sok tökéletes szám van.

Ha csak ezt a négy számot látjuk, akkor úgy tűnik, hogy állításai igaznak. De nézzük meg, az azóta felfedezett tökéletes számokat:

Tökéletes számok táblázata

$$T = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

Ssz.	**Kitevő**	**Érték**	**Felfedező**
1.	2	6	Pitagorasz
2.	3	28	Pitagorasz
3.	5	496	Pitagorasz
4.	7	8128	Pitagorasz
5.	13	33 550 336	Regiomontanus:1461
6.	17	8 589 869 056	Johann Schebyl, 1555 és Cataldi, 1603
7.	19	137 438 691 328	
8.	31	2 305 843 008 139 952 128	Euler, 1732
9.	61	2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176	
10.	89		1911
11.	107		
12.	127		
13.	521		
14.	617		
15.	1279		
16.	2171		
17.	2203		
...			
38.	6 972 593		Nayan Hajratwala, 1999. jún. 1. GIMPS
39.	13 466 917		Michael Cameron, 2001. nov. 14. GIMPS
40.	20 996 011		Michael Shafer, 2003. nov. 17. GIMPS
41.	24 036 583	Majdnem 1 millió számjegyű	Josh Findley, 2004. máj. 15. GIMPS
42.	25 964 951	7 816 230 számjegyű	Dr. Martin Nowak, 2005. febr. 18. GIMPS

Rögtön láthatjuk, hogy Nicomachus 3. állítása hamis, bár tényleg minden tökéletes szám 6-ra és 8-ra végződik, de nem felváltva. Ez a tulajdonság már a 6. számnál megdől. Hasonlóan az első állítás is hamis, az ellenpélda az ötödik tökéletes szám, aminek 8 számjegye van. Az még mindig nyílt kérdés, hogy végtelen sok és csak páros tökéletes számok léteznek. A sejtés az, hogy az állítás igaz, de még nem bizonyította be senki. De majd ti!

Annyit mindenesetre kiderítettek, hogyha létezik páratlan tökéletes szám, akkor annak $(4n+1)^{4k+1} \cdot b^2$ alakúnak kell lennie, és 10300-nál biztosan nagyobb. Ezentúl az is biztos, hogy legalább 8 különböző prímosztóval kell rendelkeznie, melyek közül egy 10 milliónál, kettő ezernél, 3 pedig száznál nagyobb kell, hogy legyen.

Johann Scheybl 1555-ben egy könyvet fordított, amiben a tökéletes számok is szerepelnek. A fordítás lábjegyzeteként megemlítette, hogy a 8 589 869 056 és a 137 438 691 328 is tökéletes számok. Sajnos ez az észrevétel egészen 1977-ig rejtve maradt. Ekkor találták ugyanis meg a könyvet.

Euler is foglalkozott a tökéletes számokkal. De térjünk vissza Euklideszhez, aki mintegy 2000 évvel megelőzve Eulert olyan megállapításokra jutott a tökéletes számok vizsgálata közben, hogy ha $2^p - 1$ prím, akkor p is az, de ez fordítva nem feltétlenül igaz. Észrevette, hogy ha $2^p - 1$ prím, akkor a $2^{p-1}(2^p - 1)$ tökéletes. De az állítás megfordításával mégiscsak meg kellett várni Eulert, aki belátta, hogy ha $2^{p-1}(2^p - 1)$ tökéletes, az azt is jelenti, hogy $2^p - 1$ prím.

A matematika történelem tele van nagy prím-lebuktatásokkal. Később látni fogjuk, hogy eldönteni egy számról, hogy prím-e nem olyan nehéz, de felbontani prímtényezőkre már annál inkább. A számítógépek kora előtt igen nagy számolási bravúr volt egy-egy nagyobb számot prímtényezőire bontani. Így történhetett az , hogy 1536-ban Hudalrichus Regius azzal írta be magát a matematika történelembe, hogy felbontotta a $2^{11} - 1$-et, azaz a 2047-et a 23 és 89 szorzatára. De még 1903-ban is elegendő volt Cole-nak csak felírni a táblára hogy $2^{67} - 1 = 147573952589676412927 = 761838257287 \cdot 193707721$ és az iménti cselekedetét fél órás vastaps követte.

Ma bárki bekapcsolódhat a "Nagy Internetes Mersenne-prím Keresés"-be (The Great Internet Mersenne-Prime Search). Itt az internetre kapcsolódott gép processzorának szabad kapacitásait használják ki a prímek keresésére. (www.mersenne.org)

Nem nagy sikerélmény tehát a tömegeknek tökéletes számot vadászni. Csak keveseknek engedtetehetik meg, hogy egy-egy szám felfedezője lehessen. Ellenben barátságos számpárokat könnyebb keresni. Ezeknek a számpároknak az a tulajdonsága, hogy az egyik nálánál kisebb osztóinak összege a másik szám, amelynek osztóinak összege az előző szám.
Ilyen számpárok a $(120, 284); (1184, 1210); (2620, 2924); (5020, 5564)$.

De sok ilyen számpárt találhatunk az alábbi -kissé bonyolult - módszerrel is: Készítsünk el két sorozatot úgy, hogy $a_1 = 5$, $b_1 = 17$ és az $a_{i+1} = 2a_i + 1$ illetve a $b_{i+1}74b_i + 3$ szabály adja meg a sorozat elemeit. Ekkor ha az a_i sorozatban az $n-1$. és az n. elem is prím, és a b_i sorozatban az n. elem is prím, akkor a $(2^n a_n a_{n-1}; 2^n b_n)$ barátságos számpár. Az alábbi táblázat kiszámolta előre a sorozat elemeit, és a lehetséges barátságos számpárokat. (Vastagon a biztos számpárok.)

Keresd meg prímtáblázat segítségével a prímeket az első két oszlopban, és akkor a harmadik és negyedik oszlop kiadja a barátságos számpárt.

i	a_i	b_i	Lehetséges barátságos számpárok	
1	5	17	**220**	**284**
2	11	71		
3	23	287	**17296**	**18416**
4	47	1151		
5	95	4607		
6	191	18431	**9363584**	**9437056**
7	383	73727		
8	767	294911	602800640	603979264
9	1535	1179647	4827120640	4831837184
10	3071	4718591	38635833344	38654703616
11	6143	18874367	309162151936	309237641216
12	12287	75497471	2473599180800	2473901154304
13	24575	301989887	19790001356800	19791209283584
14	49151	1207959551	158324842594304	158329674366976
15	98303	4831838207	1266618067910660	1266637395132420
16	196607	19327352831	10133021852303400	10133099161452500
17	393215	77309411327	81064484055285800	81064793292406800
18	786431	309237645311	648517109391294000	648518346340827000
19	1572863	1236950581247	5188141822929530000	5188146770729760000
20	3145727	4947802324991	41505154374639300000	41505174165844400000
21	6291455	19791209299967	332041314161939000000	332041393326768000000
22	12582911	79164837199871	2656330829954840000000	2656331146614170000000
23	25165823	316659348799487	21250647906276000000000	21250649172913400000000
24	50331647	1266637395197950	170005188316758000000000	170005193383307000000000

Barátságos láncnak hívjuk azt a sorozatot, ahol minden elem az előtte lévő elem nálánál kisebb osztóinak összege. Nyitott kérdés, hogy van-e végtelen hosszú barátságos-lánc.

Feladatok gondolkodásra

1. Készítsd el a 20, 48, 26, 143, 562, 25, 1336 láncait!
2. Az 1! osztóinak a száma 1.

   A 2! osztóinak száma 2.

   A 3! osztóinak a száma 4. Mit gondolsz, mi lesz a következő? Mi a sejtésed? Bizonyítsd be!
3. Piramis számok azok a számok, amikből 3 alakú gúlát építhetünk. Keress piramis-számokat. Mi a kapcsolat a piramis-számok és a háromszögszámok között? Meg tudnád adni az n. piramis-szám nagyságát?
4. Bizonyísd be Nicomachus azon állítását, hogy minden tökéletes szám 6-ra és 8-ra végződik, bár azt már tudjuk, hogy nem felváltva.

A feladatok megoldásai, röviden

1. 20-22-14-10-8-7

   48-76-64-63-41

   143-25-6

   26-16-15-9-4-3

   562-(284-220)

   25-6

   1336-(1184 -1210)

   Azaz vannak prímben, tökéletes számban, vagy barátságos szám-párban végződőek.
2. A sejtés az lehetne, hogy az n! osztóinak a száma 2^{n-1}. Ez egészen jól működik $n = 5$-ig. De a sejtés megdől $n = 6$ esetén, mert akkor $6! = 2^4 3^2 5 \Rightarrow d(6!) = 30$.
3. Piramis számok: $1, 4, 10, 20, \ldots, P_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$, tehát $P_n = P_{n-1} + \Delta_n$. Csak n-től függő képlet házi feladat.
4. 2^p-en (mivel p páratlan) 2-re vagy 8-ra végződik, a 2^{p+1} rendre 6-ra vagy 4-re, hiszen a kettő hatványai ciklikusan $2, 4, 8, 6$-ra végződnek. Tehát $(2 - 1)6 = 6$ és $(8 - 1)4 = 28$. Az állítás igaz.

Irodalomjegyzék

[1.] Surányi János: *Érdekes számok*

(megjelent Hódi Endre szerkesztésében a Matematikai mozaik-ban 1999, TypoteX Kiadó Budapest)

[2.] J J O'Connor and E F Robertson : *Perfect Numbers*

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PrintHT/Perfect_numbers.html`

[3.] Freud Róbert: *Százezer dolláros prímek*

`http://www.komal.hu/cikkek/2004-02/freud.h.shtml`

[4.] Bölcsföldi József - Balázs Géza: *Barátságos láncok és hurkok a természetes számok halmazában*

`http://www.komal.hu/cikkek/bolcsfoldi/lancok.h.shtml`

[5.] Jakab Tamás: *Amikor a sejtés hamisnak bizonul*

(Közös nevezőnk a Matematika, 2003, Kőszeg)

Erben Péter: Kombinatorikai algoritmusok

Bevezetés

A következő néhány pontban elemi kombinatorikus algoritmusokat mutatunk be, példákon keresztül. Vizsgálódásaink középpontjában különböző halmazk elemeinek felsorolása áll. Külön figyelmet szentelünk a Gray-kódoknak, melyek lényege az, hogy a felsorolásban a szomszédos elemek "távolsága" minimális.

A táborban megbeszélt feladatok: 1.1, 1.2, 1.3, 1.8, 1.9, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.8, 2.9, 5.2, 5.3

1. Variációk

A legegyszerűbb kombinatorikai algoritmus az n hosszú $0-1$ sorozatokat állítja elő. Meglepő módon ez a triviálisnak tűnő feladat is többféle módon kezelhető, és komoly alkalmazásokhoz elvezető variációi vannak.
A közvetlen alkalmazások közül néhány: analóg-digitális jelátalakítás, logikai áramkörök tervezése, hibajavító kódok készítése.

1.1. Soroljuk fel az összes n hosszú 0-1 sorozatot!

1.2. Soroljuk fel az összes n hosszú 0-1 sorozatot úgy, hogy a szomszédos elemek pontosan egy helyen különbözzenek! (*16 szektorra osztott tárcsa*)

1.3. Tekintsük a következő rekurzív definíciót:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \epsilon; \\ \Gamma_{n+1} &= 0\Gamma_n, 1\Gamma_n^f \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy Γ_n Gray-kódot definiál!

1.4. Legyen $\Gamma_n = g(0), g(1), g(2), \ldots, g(2^n-1)$! Mutassuk meg, hogy ha

$$g((\ldots b_2b_1b_0)_2) = (\ldots a_2a_1a_0)_2,$$

akkor $a_j = b_j \oplus b_{j+1}$ $(j \geq 0)$!

1.5. Bizonyítsuk be, hogy $g(k) = k \oplus \lfloor k/2 \rfloor$!

1.6. Mutassuk meg, hogy ha

$$g^{-1}((\ldots a_2a_1a_0)_2) = (\ldots b_2b_1b_0)_2,$$

akkor $b_j = a_j \oplus a_{j+1} \oplus a_{j+2} \oplus \ldots$!

1.7. Bizonyítsuk be, hogy $g^{-1}(l) = l \oplus \lfloor l/2 \rfloor \oplus \lfloor l/4 \rfloor \oplus \ldots$!

1.8. Karnaugh a 4-bites kódokat olyan módon írta fel egy 4×4-es táblázatba, hogy a táblázatot tórusszá hajtva teljesül, hogy a szomszédos kódszavak legfeljebb 1 bitben különböznek.

0000	0001	0011	0010
0100	0101	0111	0110
1100	1101	1111	1110
1000	1001	1011	1010

Készítsük el a 6-bites kódszavak hasonló tulajdonságú táblázatát!

1.9. Legfeljebb hány 6-bites kódszó adható meg úgy, hogy bármely kettő legalább 3 bitben különbözzön?

2. Permutációk

2.1. Soroljuk fel n különböző elem összes permutációját!

2.2. Írjuk fel egy csonkolt oktaéder csúcsaira az $\{1, 2, 3, 4\}$ számok permutációit úgy, hogy bármelyik él két végpontjához tartozó permutációk egy szomszédos elempár cseréjével egymásba vihetők legyenek!

2.3. Írjuk fel egy kör mentén n elem permutációit úgy, hogy a szomszédos elemek megkaphatók legyenek egymásból két szomszédos elem felcserélésével!

2.4. A G_n gráf csúcsai legyenek az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok permutáció, és két csúcsot akkor kössön él össze, ha a csúcsokhoz tartozó permutációk megkaphatók egymásból két szomszédos elem felcserélésével. Bizonyítsuk be, hogy G_n-ben van Hamilton-kör!

Igaz-e az állítás akkor is, ha ismétléses permutációkkal címkézzük a gráf csúcsait?

2.5. Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok minden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ permutációjához hozzárendelhetünk egy $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *inverziós táblát*. Az inverziós tábla c_i elemének értéke azon a-k száma, amelyek kisebbek i-nél, és i-től jobbra vannak az adott permutációban. Például:

```
a: 612543
c: 000125
```

A definícióból következik, hogy $0 \leq c_j < j$, minden $1 \leq j \leq n$ esetén.

Mutassuk meg, hogy az inverziós tábla ismeretében a permutáció egyértelműen megadható.

2.6. Írjuk fel a permutációkhoz tartozó inverziós táblákat, a 2.3.-ban megadott sorrendben! Mit tapasztalunk?

2.7. Hogyan állítható elő egyenletes eloszlású véletlen permutáció?

2.8. (*Josephus probléma*) Egy kör mentén felírtuk az $1, 2, 3, \ldots, n$ számokat. Az 1-estől indulva kihúzunk minden második számot, egészen addig, amíg egyetlen szám marad. Jelöljük a megmaradó számot $J(n)$-nel! Határozzuk meg a $J(n)$ függvényt!

2.9. Kilenc madarat kell – egy üres kalitka segítségével – úgy átköltöztetni, hogy mindegyik madár előírt kalitkába kerüljön. Megengedett művelet bármely madár átköltöztetése az éppen üres kalitkába. Legalább hány átköltöztetésre van szükség az alábbi esetekben? A madarak sorrendjét az 1 2 3 4 5 6 7 8 9 kalitkasorrendhez képest adtuk meg.

a) 7 9 4 5 1 2 6 3 8;

b) 3 7 8 5 6 4 1 9 2;

c) 3 8 4 1 7 5 6 9 2.

3. Kombinációk

3.1. Soroljuk fel egy 6-elemű halmaz 3-elemű részhalmazait!

3.2. Írjuk fel egy kör mentén a 4-elemű halmaz összes részhalmazát úgy, hogy a szomszédos halmazok megkaphatók legyenek egymásból egy elem hozzáadásával vagy elvételével!

3.3. Két szobát egy forgóajtó választ el egymástól. Az első szobában 5, a másodikban 10 ember van kezdetben. A forgóajtó úgy használható, hogy mindkét szobából egy-egy ember egyszerre halad át rajta.

Lehetséges-e olyan áthaladási sorrendet alkotni, hogy az első szobában minden lehetséges ötös csoport pontosan egyszer forduljon elő?

3.4. Bontsuk fel a 15-öt minden lehetséges módon 4 pozitív egész összegére úgy, hogy a tagok sorrendje is számít!

3.5. Bizonyítsuk be, hogy egy 15 elemű halmaz nemüres részhalmazok uniójaként kevesebb, mint 15!-féle módon írható fel!

3.6. Egy közvéleménykutató cég a 10 millió lakosú ország 1000 lakóját szeretné megkérdezni. Hogyan választhatják ki a célszemélyeket, ha azt szeretnék, hogy bármelyik "minta" egyenlő valószínűséggel fordulhasson elő?

4. Fák

4.1. Hány címkézett fagráf van n ponton?

4.2. Hány címkézett erdő van n ponton?

5. Táblák

5.1. A sakktáblán úgy vannak elhelyezve figurák, hogy minden sorban és minden oszlopban *legalább* 2 bábú található. Biztosak lehetünk-e benne, hogy ebben az esetben le lehet venni a tábláról néhány figurát úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan 1 figura álljon?

És ha eredetileg minden sorban és oszlopban *pontosan* 2 bábú állt?

5.2. Ki lehet-e jelölni a 13×13-as táblázatban néhány mezőt úgy, hogy a táblázat minden mezője pontosan egy kijelölt mezővel legyen oldalával határos?

5.3. A Bergengóc Országgyűlés 100 képviselője a Parlament nagytermének 10 padsorában 10 oszlopban foglal helyet. A küldötteknek mind különböző a fizetése. Minden képviselő megkérdezi szomszédait (a maga mellett, előtt, mögött ülőket és az átlós szomszédait is, összesen tehát legfeljebb 8-at), hogy mennyi a fizetésük. A küldöttek meglehetősen irigyek: csak azok elégedettek a bérükkel, akiknek legfeljebb egy olyan szomszédja van, aki többet keres náluk. Legfeljebb hány olyan képviselő lehet a Parlamentben, aki meg van elégedve a fizetésével?

5.4. A 4×4-es táblázatban legalább hány mezőbe kellene csillagot rajzolni, hogy két tetszőleges sor és két tetszőleges oszlop elhagyása után is maradjon még csillag a táblán?

5.5. Egy 10×10-es sakktábla minden egyes mezőjét kiszíneztük úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban legfeljebb 5 különböző színű mező található. Legfeljebb hány színt használhattunk?

5.6. A számítógép 98×98-as képernyője kezdetben sakktáblaszerűen színezett. Egy-egy lépésben az egérrel a képernyő bármely téglalap alakú részét kijelölhetjük, s az ott lévő mezők színét ellentétesre változtathatjuk. Legkevesebb hány lépésben érhető el, hogy minden mező egyszínű legyen?

6. Pakolgatós problémák

6.1. A 8×8-as sakktábla bal alsó 3×3-as sarkában 9 dámafigura áll. Mit gondolsz, el lehet juttatni ezt a 9 bábut a jobb felső 3×3-as sarokba, ha lépni csak úgy lehet, hogy a figurával egy másik figurát vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan átugrasz?

6.2. Egy asztalnál $2n + 1$ ember ül egymás mellett. Kezdetben a középső ember előtt van $2n$ tányér, egymásra helyezve. A következő módon próbálják szétosztani a tányérokat: egy lépésben egy tetszőleges ember aki előtt legalább két tányér van, leveszi a két legfelső tányért, egyet bal, egyet pedig jobb szomszédja kupacának tetejére helyez.

a) Befejeződik-e mindig az eljárás?

b) Mi lehet a végállapot?

c) Előfordulhat-e, hogy valamelyik szélső ember elé egynél több tányér kerül?

d) Hány lépés után fejeződhet be az eljárás?

6.3. (*bolgár szoliter*) Adott néhány kupac, mindegyikben véges sok kavics. Egy lépésben elveszünk mindegyik kupacból egy kavicsot és az elvett kavicsokból egy új kupacot csinálunk.

Mi történik, ha sokáig ismételgetjük ezt a lépést?

6.4. (*Conway katonái*) Egy végtelen négyzethálós mezőt kettévágunk egy vízszintes vonallal. A vonal alatt néhány (tetszőleges sok) mezőn áll egy-egy figura. Egy lépésben vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan átugorhatunk egy figurát, ha üres mezőre érkezünk. Az átugrott figurát levesszük.

a) Milyen messze tudunk a vonal fölé figurát juttatni, ha tetszőlegesen választhatjuk meg a kiinduló állást?

b) Legkevesebb hány figura kell ahhoz, hogy az első, második, harmadik, ... vonal feletti sorba eljussunk?

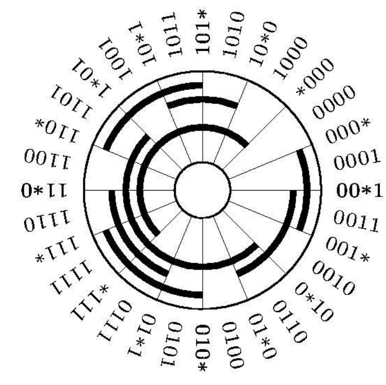
7. Történeti megjegyzések

1. Frank Gray a Bell laboratórium mérnökeként szabadalmaztatta 1953-ban a róla elnevezett kódot, melyet digitális információ analóg átviteléhez tervezett. Γ_5 már sokkal korábban megjelent. Az adatátvitel hőskorában, amikor Emile Baudot 1875-ben feltalálta az ábécé ötbites kódolását, ezek az 5 bites minták ténylegesen egy szimbólumot jelentettek. Az ő tiszteletére nevezték el a szimbólumátvitel sebességének mértékegységét Baudnak (1 Baud = 1 szimbólum/s).
2. Maurice Karnaugh szintén a Bell mérnöke volt, és szintén 1953-ban talált fel egy a mai napig használt módszert logikai áramkörök tervezéshez.
3. A legenda szerint Josephus Flavius, az első században élt történetíró, a zsidó-római háború idején tagja volt a lázadók egy 41 fős csapatának, amelyet tőrbe csaltak a rómaiak. A felkelők úgy gondolták, hogy inkább az öngyilkosságot választják, semmint fogságba essenek. Elhatározták, hogy körbeállva, és köröskörül haladva megölik minden harmadik, mmég élő szemlyt, amíg senki nem marad életben. Josephus és egy barátja hallani sem akartak az öngyilkosságról, ezért gyorsan kiszámolták, hova álljanak ebben az ördögi körben.

Megoldások

1.1. Elszámolunk kettes számrendszerben 0-tól $(2^n - 1)$-ig.

1.2. Az 1.3.-ban megadott konstrukció egy lehetséges megoldás. Az ábrán látható, hogy ha egy szektorokra osztott tárcsa segítségével végzünk analóg-digitális átalakítást, akkor a szomszédos szektorokhoz rendelt kódok bit-eltéréseinél hibázhat az átalakító. Ezért optimális, ha a szomszédos kódszavak csak egyetlen bitben különböznek.



1.3. Indukcióval bizonyítunk. Csak "középen" kell figyelni.

1.4. Legyen $k = 2^n + r$, ahol $0 \le r < 2^n$. Ekkor $g(k) = g(2^n + r) = 2^n + g(2^n - 1 - r)$. Ez az észrevétel lehetővé teszi, hogy teljes indukcióval bizonyítsunk. Jelölés: $\bar{b} = b \oplus 1$.

Ha $g((0b_{n-1} \dots b_1 b_0)_2) = (0(b_{n-1}) \dots (b_2 \oplus b_1)(b_1 \oplus b_0))_2$,

akkor $g((1b_{n-1} \dots b_1 b_0)_2) = 2^n + g((0\bar{b}_{n-1} \dots \bar{b}_1 \bar{b}_0)_2) = (1(\bar{b}_{n-1}) \dots (\bar{b}_2 \oplus \bar{b}_1)(\bar{b}_1 \oplus \bar{b}_0))_2$.

1.5. Ha $k = (\dots b_2 b_1 b_0)_2$, akkor $\lfloor k/2 \rfloor = (\dots b_2 b_1)_2$.

1.6. Mivel $b \oplus b = 0$, és $b \oplus 0 = b$, ezért az 1.4.-ben felírt egyenletek összegzésével kapjuk az állítást:

$$a_j \oplus a_{j+1} \oplus a_{j+2} \oplus \cdots = (b_j \oplus b_{j+1}) \oplus (b_{j+1} \oplus b_{j+2}) \oplus (b_{j+2} \oplus b_{j+3}) \oplus \cdots = b_j.$$

1.7. Kettes számrendszerben a 2^k-nal való osztás megfelel k-szori jobbra léptetésnek.

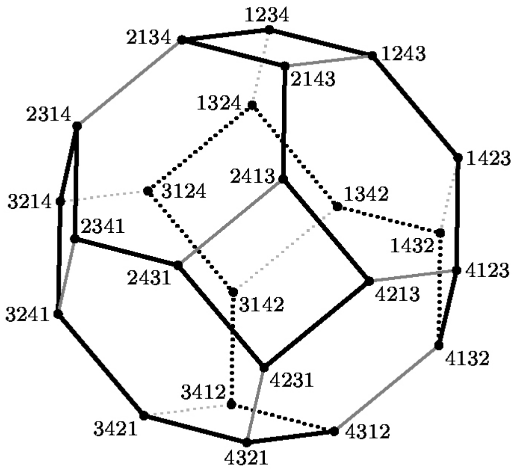
1.8. A 8×8-as táblázat (i, j) koordinátájú eleme legyen $g(i)g(j)$. $(0 \le i, j < 8)$

1.9. Nyolc kódszó megadható, például: $0, 15, 21, 26, 38, 41, 51, 60$. (Binárisan: `000000, 001111, 010101, 011010, 100110, 101001, 110011, 111100`)

Kilenc már nem. Indirekt bizonyíthatunk, a Kiss-féle táblán. Ha lenne valamelyik sorban két elem, akkor az egyiket "beforgatjuk" `000000`-ba, így két 4×4-es négyzetet lefoglal ez a két kódszó és három kód adott: `000000, 000111, 111111`. Ezután már csak 4 oszlopba tehetünk egy-egy kódszót, ami nem elég.

2.1. Vesszük $n-1$ elem összes permutációját, és mindegyikbe beszúrjuk minden lehetséges módon az n. elemet.

2.2. Egy lehetséges megoldás.



2.3. Ha az $n-1$ permutációkra már van jó sorrendünk, akkor az n. elemmel kiegészíthető a felsorolás. Pl. az (`123, 132, 312, 321, 231, 213`) sorrendől $n = 4$-re az alábbi módon kapunk megoldást:

```
1234 1324 3124 3214 2314 2134
1243 1342 3142 3241 2341 2143
1423 1432 3412 3421 2431 2413
4123 4132 4321 4321 4231 4213
```

Az első oszlopot felülről lefelé, a másodikat alulról felfelé, és így tovább váltakozó irányban kell kiolvasni.

2.4. Az előző megoldás sorrendje Hamilton kört jelöl ki G_n-ben.

Az ismétléses esetben már nem feltétlenül találunk kört. Például az $\{1, 1, 2, 2\}$ halmaz ismétléses permutációinak gráfjában nincs Hamilton kör.

2.5. Letesszük az 1-et. Ezután c_2 értéktől függ, hogy a 2 jobbra vagy balra kerül 1-től. Általában, ha már felírtuk az 1, 2, $\dots, k$ számokat, akkor c_{k+1} egyértelműen kijelöli, hogy hova kell $(k+1)$-et beszúrni, hiszen az eddig leírt számok mind kisebbek $(k+1)$-nél.

2.6. Az inverziós táblák Gray-kódot alkotnak.

2.7. A következő algoritmus előállít egy véletlen permutációt. Minden permutáció egyenlő valószínűséggel jön létre.

```
Ciklus i := 1..n
   ai := i
Ciklus vége
Ciklus i := 1..(n-1)
   j := Véletlen(i,n)
   Csere( ai,aj )
Ciklus vége
```

Az algoritmus helyességének bizonyításához megmutatjuk, hogy a_i minden i-re egyenlő eséllyel veszi fel az $1, 2, \ldots, n$ értékek valamelyikét. Az első csere után $P(a_1 = k) = 1/n$, és a_1 később már nem változik.

A második csere után $P(a_2 = k) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1} = 1/n$. A többi elemre hasonlóan folytatható a gondolatmenet.

2.8. Először belátható, hogy $J(1) = 1, J(2n) = 2J(n) - 1, J(2n+1) = 2J(n) + 1$. Ezután indukcióval igazolható, hogy $J(2^m + r) = 2r + 1$, ha $0 \leq r < 2^m$. Végül egyszerű számolással adódik, hogy

$$J((b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0)_2 = (b_{m-1} b_{m-2} \ldots b_1 b_1 b_m)_2.$$

2.9. Felírjuk a permutációk ciklikus alakját. Ha c ciklusból áll a permutáció, akkor $n + c$ lépésben végezhető el a rendezés.

3.1. Lexikografikus felsorolás. A `000111` részhalmazból indulunk. Jobbról balra haladva visszaléptetjü a kezdőpozícióba azokat az 1-eseket, akiktől balra áll 1-es, az első olyan aki tud lépni, az egyet balra lép.

`000111, 001011, 001101, 001110, 010011, ...`

3.2. Ez nem más, mint a 4-hosszú Gray-kód.

3.3. A Gray-kód szerint rendezett 15-hosszú 0–1 sorozatok közül kihagyjuk azokat, amelyekben nem 5 darab 1-es van.

3.4. 15 darab 1-es meghatároz 14 ”közt”. Ide kell betenni a 3 ”elválasztó” 0-t.

3.5. n elem egy tetszőleges permutációja meghatároz egy partíciót: A ciklikus alak ciklusai adják a halmazokat. Így minden partíciót megkapunk, és a legtöbbet többször is.

3.6. Egy algoritmus a véletlen kombináció előállítására:

```
sz := k, i := 0
Ciklus j := 1..n
   Ha Véletlen < sz /(n - j + 1)
   akkor i := i + 1, ai := j, sz := sz - 1
   Elágazás vége
Ciklus vége
```

4.1. A Prüfer kód segítségével megmutatható, hogy n^{n-2} címkézett fa van. A Prüfer kód kiszámítása: vesszük a legkisebb indexű elsőfokú csúcsot (mindig van legalább kettő), töröljük a belőle induló éllel együtt, és felírjuk a szomszédja indexét. Mivel végül mindig az n marad, így az első $n - 2$ index érdekes, ezek pedig az összes variációt kiadhatják.

4.2. Teljes indukcióval igazolható, hogy

$$T_{n,k} = kn^{n-k-1}$$

címkézett erdő van, melyek pontosan k fából állnak. Az indukció lépés lényege a

$$T_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} T_{n-1,k-1+i}$$

egyenlőség, az 1 pont és i darab szomszédjának törlésével adódik.

5.1. (a) Nem. Pl. ha a "keret" mezőin állnak a bábuk. (b) Igen. A figurák köröket képeznek a "vízszintes sortárs" / "függőleges oszloptárs" elv szerint lépegetve. A körök minden második elemét kell elvenni.

5.2. Nem. Az (1,1) szomszédai – (1,2) és (2,1) – közül pontosan az egyik színezett. Tehát (2,2)-nek megvan a színezett szomszédja, ezért (2,3) és (3,2) nem lehet színezett. Továbbhaladva azt kapjuk, hogy (13,13) egyik szomszédja sem lehet színezett.

5.3. Minden második sorban üljenek a "gazdagok", vagyis 51, 52, ..., 100. így lesz 50 elégedett képviselő. Ennél több nem lehet, mert egy 2×2-es részben legfeljebb két képviselő lehet boldog.

5.4. 7 elég.

```
XX--
X-X-
-XX-
---X
```

6 kevés, mert lenne két sorban 2-2, azokat levéve marad 2, ami két oszloppal levehető.

5.5. 41 szín lehet:

```
01 02 03 04 -- -- -- -- -- --
-- 05 06 07 08 -- -- -- -- --
-- -- 09 10 11 12 -- -- -- --
...
37 38 39 -- -- -- -- -- -- 40
```

A 42 szín már nem érhető el. Mivel $9 \cdot 4 + 5 = 41$, 41-nél több szín esetén legalább két sorban 5-5 színt kell felhasználnunk. Ekkor viszont minden oszlopban legfeljebb 3-3 további szín jöhet szóba, s $10 + 10 \cdot 3 < 42$.

5.6. Csak a keret egyszínűsítéséhez kell 98 lépés, és ez elég is.

6.1. Nem. Színezzük a sorokat felváltva feketére és fehérre. A kezdő- és végállapotban különböző számú bábu állna fehér mezőn, pedig a megengedett lépések nem változtathatják meg ezt a számot.

6.2. Az eljárás mindig befejeződik és a végállapotban a középső helyen nincs tányér, az összes többi helyen pedig pontosan egy van. (Bővebben: [4.] 18.36.)

6.3. Véges sok állapot van, ezért előbb-utóbb biztosan belefutunk egy ciklusba. Meglepő módon az tapasztalható, hogy ha a kavicsok száma az n. háromszögszám ($\Delta_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$), akkor véges sok lépés után az $(1, 2, 3, \ldots, n)$ fixpontba érkezünk.

6.4. Legfeljebb a 4. sorba juthat el bábu. ([8.] 151. oldal)

Források

[1.] Knuth D. E., *The Art of Computer Programming 4., Pre-fascicles*,
`http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/taocp.html`

[2.] Orosz Gyula, *Külföldi középiskolai matematikai versenyek*,
`http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/`

[3.] Hraskó András, Paulin Roland, *Kvant válogatás*,
`http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/`

[4.] Hajnal Péter, *Elemi kombinatorikai feladatok*

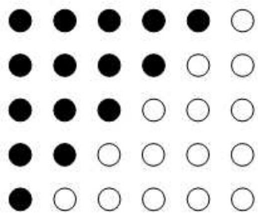
[5.] Aigner M., Ziegler M., *Bizonyítások a könyvből*

[6.] Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O., *Konkrét matematika*

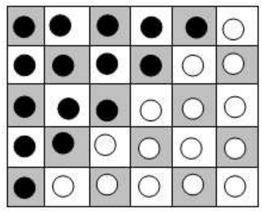
[7.] Orosz Gyula, *Sokszögek, testek színezése*

[8.] Csákány Béla, *Diszkrét matematikai játékok*

Gál Györgyné: Feladatok a sakktáblán

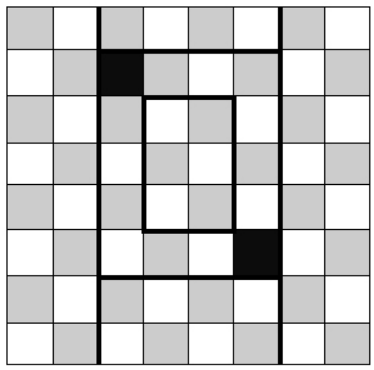


F: Az ábrán feketével jelzett 15 kör helyén érmék vannak. Az a célunk, hogy valamennyi érme átkerüljön a fehérrel jelzett körök helyére. Egy lépésben bármely érmével vízszintesen vagy függőlegesen átugorhatunk egy szomszédos érmét, ha annak a túlsó oldalán éppen nincs érme. Legalább hány lépésre van szükség a cseréhez?



M: Az érmék áthelyezése nem lehetséges. Helyezzük ugyanis sakktáblára az érméket! Az eredeti felállásban 9 sötét és 6 világos korong van, az áthelyezés után 9 világos és 6 sötét, pedig a lépések során a korong megtartja a színét.

F: A 8x8-as sakktábla bal alsó és jobb felső sarkát kivágtuk. Ezt a táblát le lehet-e fedni hézagmentesen, átfedés nélkül 1x2-es dominókkal? A sakktábla mely mezőinek hiánya esetén valósítható meg ez a lefedés?



M: Nem lehet lefedni, hisz a sakktábla két azonos színű mezőjét vágtuk ki, és egy dominó ellentétes színű mezőket fed le. Minden olyan estben van lefedés, amikor ellentétes színű mezőket vágtunk ki. A két mező ugyanis egy ptlan $\times$ ps oldalú téglalap átlója. A páratlan oldal egyenese mentén levágott részek nyilván lefedhetők (Teljes oszlopok maradtak meg.) A maradék téglalapon kívüli részét a páros oldal mentén vághatjuk le, ez nyilván lefedhető. Belül egy ptlan $\times$ ps oldalú téglalap van, ami lefedhető, a kerületen megmaradt két L alakú részben páros db négyzet van, ez is lefedhető.

F: Egy 2x30-as sakktábla hányféleképpen fedhető le 1x2-es dominókkal?

M: A lefedés kétféleképpen kezdődhet. Vagy egy függőleges dominóval, vagy két vízszintes dominóval. Az első eset annyiszor fordul elő, ahányféleképpen a 2×29-es sakktábla lefedhető, a második eset annyiszor, ahányféleképpen a 2×28-es sakktábla lefedhető. Tehát általánosan $h_{n+2} = h_n + h_{n+1}$, ahol h_i jelöli a $2 \times i$-es sakktábla lefedéseinek számát. $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, így láthatóan a Fibonacci-számokat kaptuk. $h_i = F_{i+1}$. Tehát $h_{30} = F_{31} = 1\ 346\ 369$.

F: A 8×8-as sakktábla egyik sarokeleme hiányzik. Le lehet-e fedni 1×3 –as dominókkal? A sakktábla mely mezőjének hiánya esetén valósítható meg a lefedés?

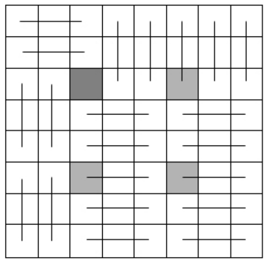
M: Színezzük ki a táblát három színnel az ábra szerint. Így minden dominó az 1, 2, 3 színeket takarja. Az ábrán azonban 22 db 1-es, 21 db 2-es és 20 db 3-as szerepel, tehát a 21 db dominó nem fedheti le a táblát.

1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
	1	2	3	1	2	3	1

A táblának a fenti módon két lehetséges színezése van. Az elsőn 22 db 1-es, a másodikon 22 db 2-es van. Csak azon mezők kivágása esetén lehetséges a lefedés, ahol az első táblán 1-es, a másodikon 2-es van. Ez a harmadik táblán látható 4 mező. Ezek kivágása esetén tényleg van lefedés, amit a bal felső mező kivágására az ábra mutat.

1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3



F: Egy 55 × 39-es táblát lefedhetünk-e 5 × 11 –es dominókkal?

M: Nem, mert a 39 = 5k + 11m egyenlet nem oldható meg a természetes számok halmazán.

F: 1 × 2 –es dominókkal lefedtünk egy 6 × 6 –os sakktáblát. Mutassuk meg, hogy van olyan függőleges vagy vízszintes rácsegyenes, melyet dominó nem keresztez.

M: A táblán összesen 10 rácsegyenes va. Ha egy rácsegyenest keresztez egy dominó, akkor mindenképpen keresztezi egy másik dominó is, hisz különben páratlan lefedetlen mező maradna mindkét oldalon. Így a 10 rácsegyenes keresztezéséhez 20 dominó kellene, de a 36 mező lefedéséhez csak 18 dominó kell.

F: A 8 × 8 –as sakktábla összes mezőjét egy kivételével átfesthetjük-e fehérre, ha egy lépésben valamely sor **vagy** valamely oszlop mezőinek színét ellentétesre változtatjuk.

M: Nem lehetséges, hiszen egy átfestés során a fehér ill. fekete mezők száma párossal változik (ps + ps, vagy ptlan + ptlan), 32 − 1 pedig páratlan.

F: A 8 × 8 –as sakktábla összes mezőjét egy kivételével átfesthetjük-e fehérre, ha egy lépésben valamely sor **és** valamely oszlop mezőinek színét ellentétesre változtatjuk.

M: Igen, megoldható, mert néhány lépéssel elérhető, hogy csak egyetlen mező színe változzon ellentétesre: Fessük át az őt tartalmazó keresztet, majd minden olyan keresztet, aminek metszéspontja az előbbi kereszt sorának eleme. A kijelölt sorban ez még ptlan db változás. (A sorban most minden szín eredeti, a tábla többi részén ellentétes.) Most fessük át az összes olyan keresztet, aminek középpontja a kijelölt oszlopban van, ez még ptlan db átfestés az oszlop elemeire. (Az oszlopban most minden szín eredeti, a metszéspontban ellentétes, a tábla többi részén eredeti) A kereszt metszéspontját 15–ször, a kereszt többi elemét 8–szor, a tábla többi részét 2–szer festettük át.

F: Kirakható-e egy 7 × 9 × 11 –es tégla 3 × 3 × 1 –es téglákból?

M: Nem, mert vegyünk egy olyan réteget, ami 7 × 11 –es méretű. Ezt kell lefedni 3 × 3 –as, ill. 3 × 1 –es téglalapokkal. A téglalapok összterülete tehát osztható 3-mal, míg a 7 × 11 –es téglalap területe nem.

F: Be lehet-e egy huszárral járni a 8 × 8 –as sakktáblát úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépjen?

M: Igen, pl. az alábbi módon.

1	48	17	44	15	46	51	30
18	43	2	47	50	31	14	53
3	64	49	16	45	52	29	32
42	19	8	59	24	37	54	13
63	4	23	38	9	58	33	28
20	41	60	7	36	25	12	55
5	62	39	22	57	10	27	34
40	21	6	61	26	35	56	11

F: El tudunk-e jutni egy sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarokba egy huszárral úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépünk?

M: Nem, mert ez 63 lépés, a huszárral minden lépésnél ellenkező színre lépünk, és a két átellenes sarok azonos színű.

F: A sakktábla bal alsó sarkát kivágtuk. A jobb felső sarokból indulva egy huszárral be lehet-e járni ezt a táblát, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk?

M: Nem, mert a 62 lépés mindegyike színt vált, és a két átellenes sarkot leszámítva pl. 30 sötét és 32 világos mező marad.

F: Egy 8×8 –as sakktábla bal alsó sarkából el lehet-e jutni egy huszárral a jobb felső sarokba úgy, hogy közben minden sorba pontosan egyszer lépünk?

M: Nem. Itt is ptlan (7) számú lépést teszünk, így kellene azonos színű mezőre jutnunk, pedig minden lépés színt vált.

F: Egy 8×8 –as sakktáblán egy bábu léphet a szomszédos mezőre vagy jobbra, vagy felfelé, vagy átlósan balra lefelé. Bejárható-e vele a tábla úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lép, s útja azon a mezőn ér véget, ami jobb oldali szomszédja az induló mezőnek? Mi a helyzet $n \times n$ –es táblán?

M: Legyen a felfelé lépések száma f, a jobbra lépéseké j, a balra lefelé lépéseké b. Ekkor $n \times n$ –es sakktábla esetén $j + b + f = n^2 - 1$, $f = b$, $j = b + 1$, amiből $3b + 2 = n^2$, ami semmilyen b –re nem teljesül.

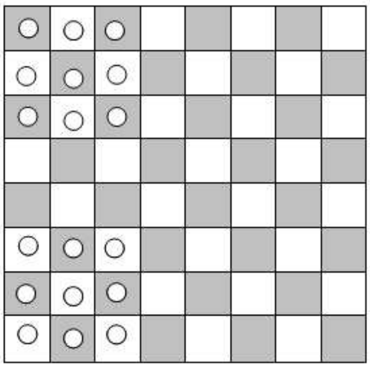
F: A 8×8 –as sakktábla bal alsó 3×3 –as sarkában 9 dámafigura áll. El lehet-e juttatni ezt a 9 bábut

a) a bal felső

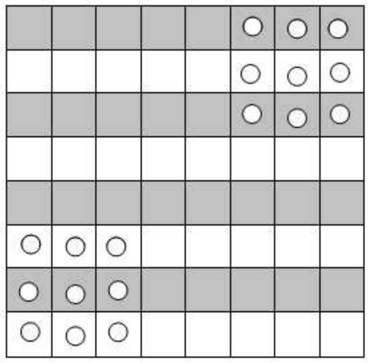
b) a jobb felső 3×3 –as sarokba,

ha lépni csak úgy lehet, hogy egy másik figurát vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan átugorva üres mezőre lépünk?

M: a) A dámafigura lépése során a szín nem változik, míg az ábrán látható módon a mozgatás előtt 5 fehér és 4 fekete, a mozgatás után 4 fehér és 5 fekete mezőn áll bábu. Így az eljuttatás lehetetlen.

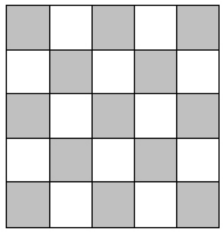


b) Ezzel a színezéssel a dámafigura lépése során a szín nem változik, míg az ábrán látható módon a mozgatás előtt 6 fehér és 3 fekete, a mozgatás után 3 fehér és 6 fekete mezőn áll bábu. Így az eljuttatás lehetetlen.



F: Egy 5×5 –ös sakktábla minden mezőjén áll egy bogár. Egy–egy perc elteltével mindegyik bogár átmászik valamelyik oldalszomszédos mezőre. Igaz-e, hogy minden órában van olyan perc, amikor valamelyik mező üresen áll?

M: Igen, hisz színezzük ki a sakktáblát! Minden perc elteltével minden bogár ellentétes színű mezőre lép. Eredetileg 13 sötét és 12 világos mezőn állnak. A mezők száma nem változik, viszont az első lépésnél, ha minden bábu külön mezőre kerül, 13 világos és 12 sötét mezőre lenne szükség. Ez lehetetlen.



F: A 8×8 –as sakktábla mezőibe sorfolytonosan beírtuk 1-től 64-ig a számokat. Kiválasztunk 8 számot úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból választottunk. Milyen határok között mozoghat ezen számok összege? (Könnyebb először 10×10 –re, majd lehet $n \times n$ –re is.)

M: Vonjunk le minden számból 1-et, majd írjuk át 8-as számrendszerbe, így a táblázat a következő lesz. A kiválasztott számokból adjuk össze először a „nyolcasokat”, majd az egyeseket. Mivel minden sorból és minden oszlopból választottunk, ezért 0+1+2+3+4+5+6+7=28 db „nyolcas”-ból és 28 db 1-esből áll az összeg, azaz $28 \cdot (8 + 1) = 252$. Ehhez hozzá kell adjunk 8-at, hisz minden számból elvetünk 1-et, az összesen 260. $n \times n$ –es tábla esetén:

$$(n-1) \cdot n/2 \cdot (n+1) + n = (n^2+1) \cdot n/2$$

0	1	2	3	4	5	6	7
10	11	12	13	14	15	16	17
20	21	22	23	24	25	26	27
30	31	32	33	34	35	36	37
40	41	42	43	44	45	46	47
50	51	52	53	54	55	56	57
60	61	62	63	64	65	66	67
70	71	72	73	74	75	76	77

F: Egy 5×5 –ös táblázatba lehet-e úgy számokat írni, hogy e számok összege pozitív, ám a táblázat bármely 2×2 –es részében a számok összege negatív?

M: Igen, lehet, pl. így. Minden kis négyzetben az összeg -1, az egész táblázat összege 31.

-1	10	-1	10	-1
10	-20	10	-20	10
-1	10	-1	10	-1
10	-20	10	-20	10
-1	10	-1	10	-1

A feladatokat
Róka Sándor: *1000 feladat az elemi matematika köréből* c. könyv Feladatok a sakktáblán fejezetéből, ill.
Hajnal Péter: *Elemi kombinatorikai feladatok* c. könyve sakktáblás feladataiból (1.23, 3.14, 6.7, 6.18, 8.1, 8.2, 10.22, 14.19, 14.29, 14.30, 15.5, 15.6, 15.7, 15.9, 16.10, 17.24, 17.27, 17.28, 17.29, 17.30, 17.31, 17.32, 17.33, 17.36) válogattam.

Hubert Györgyné: Kúpszeletek elemi módon

1.1 Ellipszis, hiperbola és parabola definíciója távolság-korlátozással. (Utalás a kör definíciójára is.)

Külső pont, belső pont...

Pontok szerkesztése → a görbék szimmetriái.

1.2 Feladat (vagy egyenértékű definíció is lehetne): rögzített kört vagy egyenest érintő és rögzített ponton átmenő körök középpontjainak mértani helye...

2.1 A kúpszeletek érintői: egy közös pontjuk van a görbével, az egyenes többi pontja külső pont.

Állítás: a vezérsugarak külső (vagy belső) szögfelezői érintők.

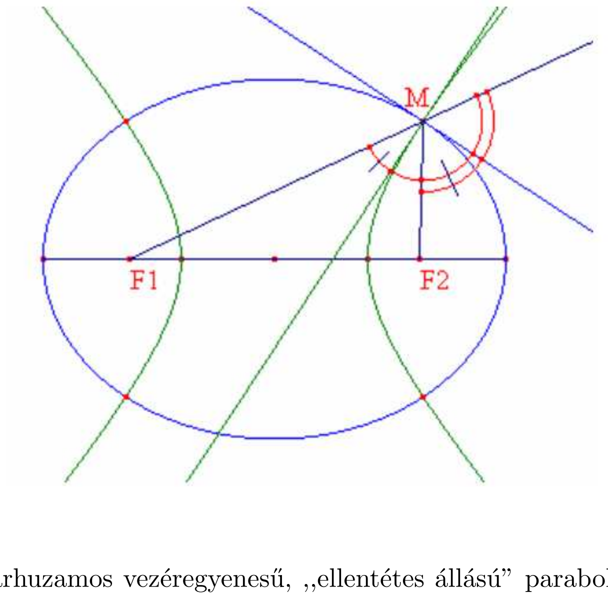
(azt nem bizonyítottuk, hogy egy görbe- pontban csak egy érintő húzható.)

2.2 Vezéralakzatok, főalakzat mindhárom görbénél

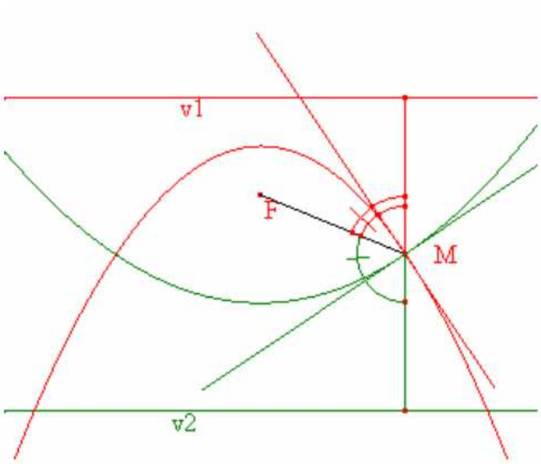
(A hiperbola esetében a ,,problémás pontokra" csak utalás történt, az idő rövidsége miatt egyáltalán nem foglalkoztam a hiperbola aszimptotáival, sőt a továbbiakban elsősorban csak az ellipszis és parabola néhány szép tulajdonságával...)

3. Feladatok:

3.1 Két közös fókuszú ellipszis és hiperbola derékszögben metszi egymást.



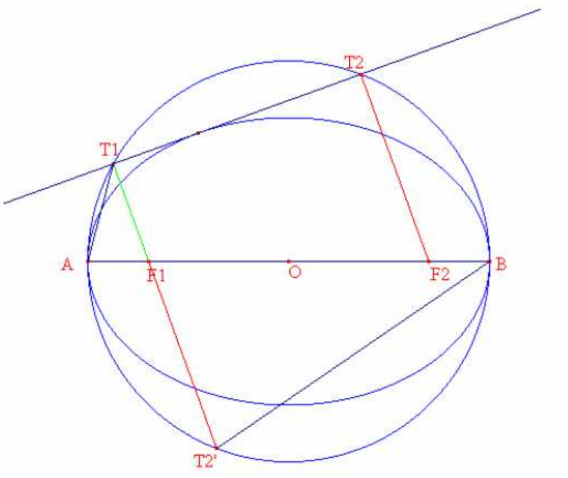
3.2 Két közös fókuszú, párhuzamos vezéregyenesű, ,,ellentétes állású" parabola derékszögben metszi egymást.



3.3 *Feladat lehetne: Ha két közös vezéregyenesű parabola két pontban metszi egymást, a metszéspontokat összekötő egyenes a fókuszok szakaszfelező merőlegese.*

3.4 Ellipszisnél és hiperbolánál a két fókusz egy tetszőleges érintőtől mért távolságának szorzata konstans. *(ez, mint ,,kedvenc" feladatom, ,,csokis" házi feladat.)*

A feladat megoldása:



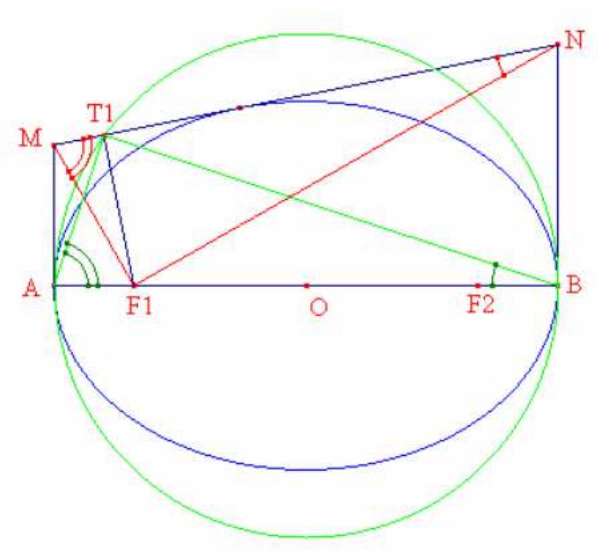
Tükrözzük az F2T2 szakaszt O-ra. A tükörkép (az ellipszis és a főkör szimmetriája és a centrális tükrözés tulajdonságai miatt) a T1F1 egyenesre esik.

Így a két távolság szorzata az F1 pont főkörre vonatkozó hatványának abszolút értéke. (Ha ezt a tételt nem ismerik, úgy az AT1F1 és T2BF1 háromszögek hasonlóságából is következik az állítás.)

A tétel bizonyítása hiperbola esetén ugyanígy történhet.

3.5 Kör, ellipszis, hiperbola esetében a két ,,csúcsérintő" által tetszőleges érintőből kimetszett szakasz bármely fókuszból derékszögben látszik.

E feladat megoldásában az a szép, hogy mindhárom görbére a bizonyítás szinte ugyanaz. Kör esetében e feladat viszont közismert. (A másik két görbénél felhasználjuk, hogy a fókusz tetszőleges érintőre vett merőleges vetülete a főkörre esik.)

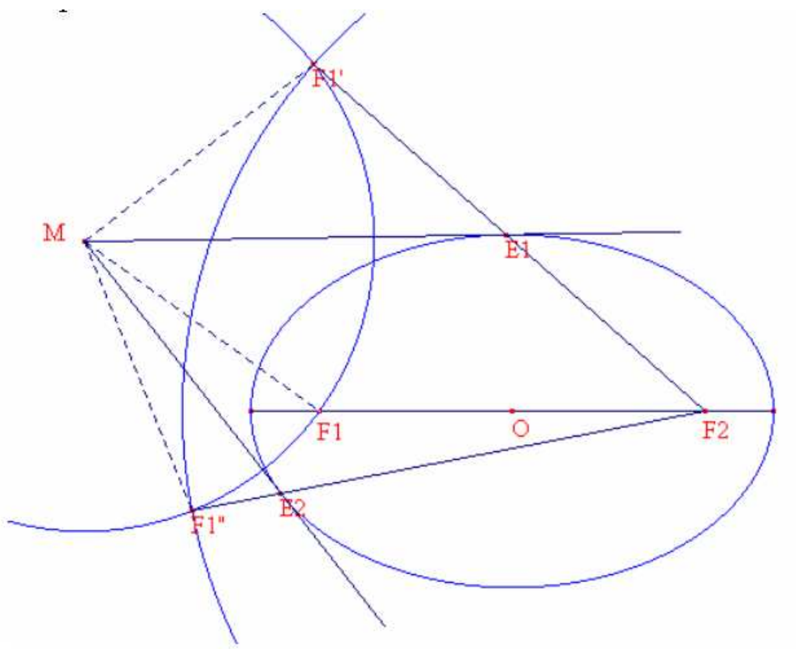


3.6 *Idetartozó feladat lehetne még: a tetszőleges érintő által a ,,csúcsérintőkből" lemetszett szakaszok szorzata konstans.)*

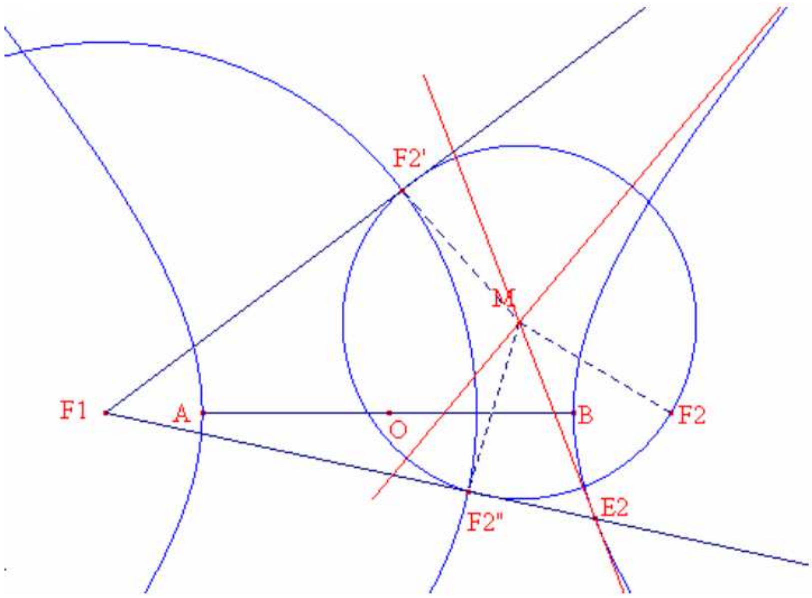
4. Szerkesszünk külső (M) pontból a görbékhez érintőt!

4.1 Az M középpontú, MF1 (vagy MF) sugarú kör az F2 középpontú vezérkörből (vagy a vezéregyenesből) kimetszi az F1(vagy F) fókusz érintőkre vett tükörképeit. Ezek után az F1F1' és F1F1" (vagy FF' és FF") szakasz szakaszfelező merőlegeseként szerkeszthető az érintő. Az érintő és a tükörképhez tartozó vezérkör-sugár (vagy a tükörképben a vezéregyenesre állított merőleges) metszéspontja az érintési pont.

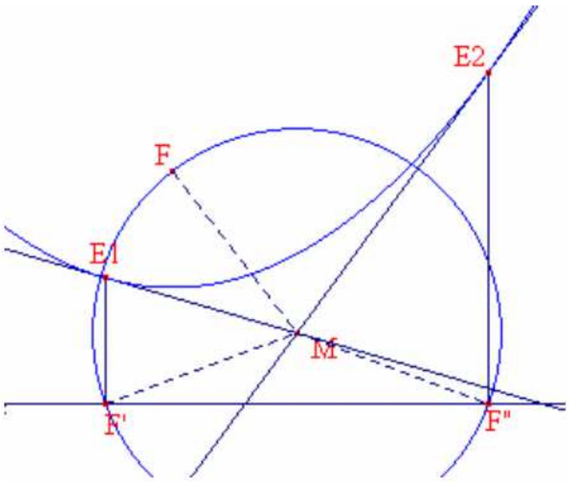
Ellipszisnél:



Hiperbolánál:



Parabolánál:



4.2 *Másként is menne – de ezt az előadáson nem tárgyaltuk: MF Thalész köre a főalakzatból kimetszi az érintők egy-egy pontját.*

4.3 *Feladat lehetne: Külső pontból a kúpszelethez (hiperbolánál: egyik ágához) húzott két érintőszakasz egy fókuszból azonos szög alatt látszik.*

5. A paraboláról:

5.1 A parabola társérintői azok, melyeknél a fókusz (F) illeszkedik az érintési pontok (E1, E2) által meghatározott szakaszra.

Feladat: - a társérintők (M) metszéspontja illeszkedik a vezéregyenesre.

- a társérintők merőlegesek egymásra.

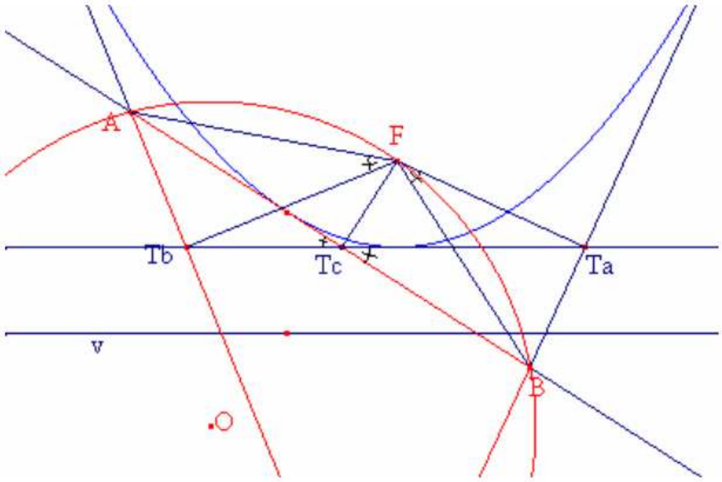
- MF merőleges az E1E2 szakaszra.

A tétel megfordítható. Azaz: ha két érintő merőleges, vagy ha két érintő metszéspontja rajta van a vezéregyenesen, akkor társérintők.

(Tehát: azon pontok mértani helye, melyekből a parabola derékszögben látszik, a vezéregyenes.)

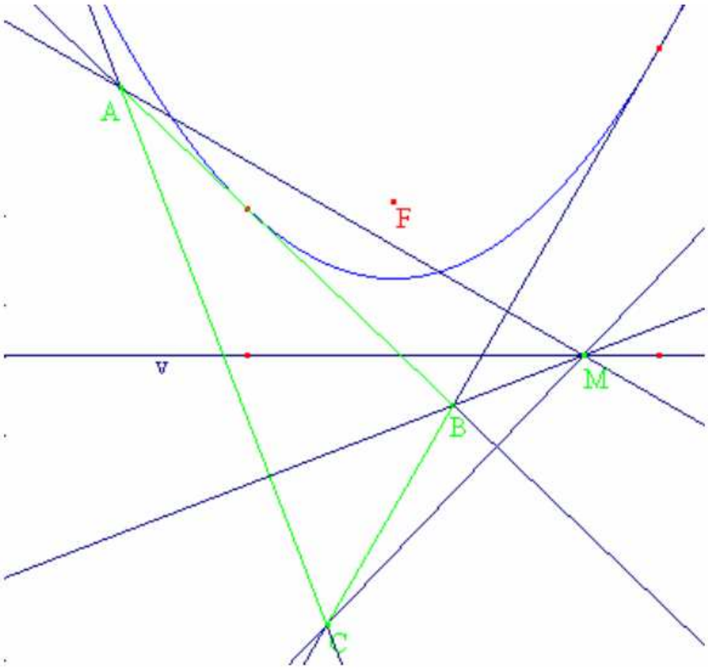
5.2 A parabola három érintője által meghatározott háromszög körülírt köre átmegy a fókuszon.

E tételt egyszerűen húrnégyszögekkel bizonyítottuk, majd röviden kitértünk a háromszög Simson egyenesére és a rá vonatkozó tétel megfordítására.



5.3 E háromszögek magasságpontjainak mértani helye a vezéregyenes.

E tételt nem bizonyítottuk, csak rajzon megmutattam.

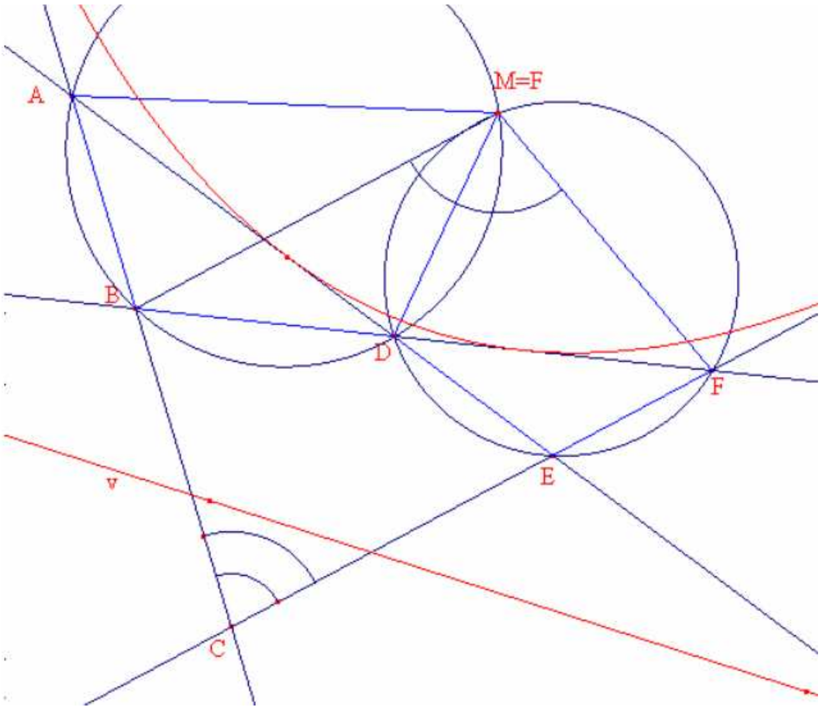


5.4 Szerkesztendő parabola, ha adott négy érintője.

Az egyenesek között nem lehetnek párhuzamosak.

Csak akkor lehet megoldása a feladatnak, ha a négy egyenes által meghatározott négy háromszög körülírt köre egy ponton megy át – ez igaz is. (E –szerintem- közismert tétel húrnégyszögekkel bizonyítható.)

Ezek után: két háromszög körülírt körének (csúcsoktól különböző) közös pontja a parabola fókusza, ennek két egyenesre vonatkozó két tükörképe meghatározza a parabola vezéregyenesét.



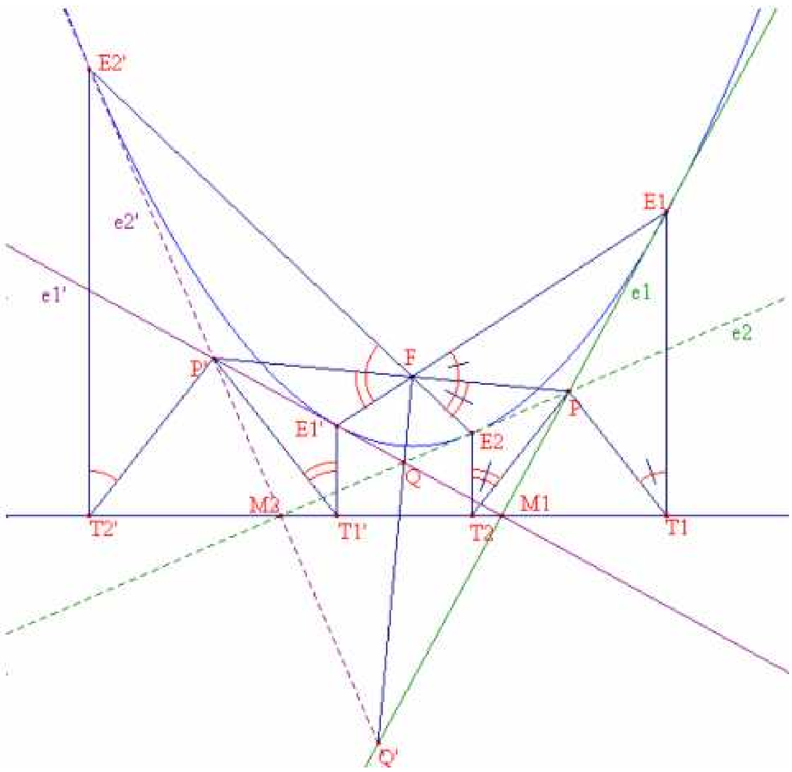
5.5 Egy parabolához P pontból húzott két érintő e1 és e2. Társérintőik e1' és e2', metszéspontjuk P'. Az e1 és e2' metszéspontja Q', e2 és e1' metszéspontja Q.

Állítás: PP' és QQ' átmegy F-en, sőt F-ben merőlegesen metszik egymást.

A feladat szintén ,,csokis" házi feladat maradt. Az előtte elhangzottakból két szép megoldás is következik.

I. megoldás:

P'F az E2'FE1' szög, PF pedig az E1FE2 szög szögfelezője, de E2', F, E2 és E1, F, E1' egy-egy egyenesbe esik, így P', F, P is egy egyenesre illeszkedik.



Hasonlóképpen belátható, hogy FQ és FQ' az E1' FE2 szög szögfelezője (tehát F, Q, Q' egy egyenesbe esik), s mint mellékszögek szögfelezői, PP' és QQ' merőlegesek egymásra.

II. megoldás (szerintem ez sokkal szebb):

A parabolához négy érintőt húztunk, de kettő-kettő társérintő (tehát merőlegesek egymásra), így a P'PQ' háromszög magasságpontja Q. Ebből következik, hogy QQ' merőleges PP'-re. Már csak azt kell belátni, hogy a Q'Q magasság talppontja azonos a parabola fókuszával. Bizonyítottuk, hogy a négy érintő által alkotott négy háromszög körülírt köreinek közös pontja a parabola fókusza, de pl. a Q'M2P és a Q'PM1 háromszögek körülírt körei átmennek a Q'-ből induló magasság talppontján, tehát csak az lehet a fókusz.

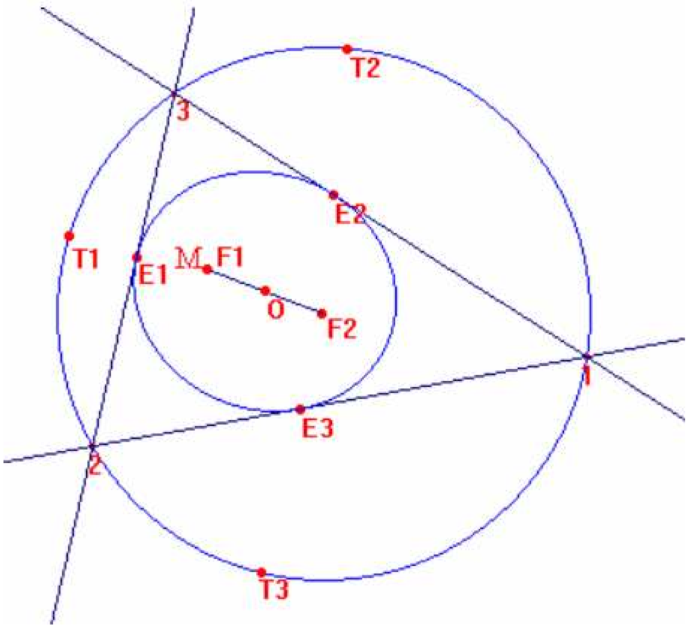
5.6 *Feladat lehetne: Ha az M pontból egy parabolához két érintőt húzunk, úgy MF mértani közepe az FE1 és FE2 szakaszoknak.*

6. Egy háromszög érintő kúpszeletei

6.1 Egy hegyesszögű háromszögnek van olyan beírt ellipszise, melynek két fókusza a magasságpont és a körülírt kör középpontja.

A tétel következik abból, hogy a magasságpontnak a három oldal egyenesére vett tükörképe a körülírt körre esik.

Ráadásul ezen ellipszis főköre a háromszög Feuerbach-féle köre.



érdemes meggondolni, hogy tompaszögű háromszög esetében a háromszög oldal-egyeneseit érintő hiperbolát kapunk, melynek fókuszai a háromszög magasságpontja és körülírt körének középpontja.

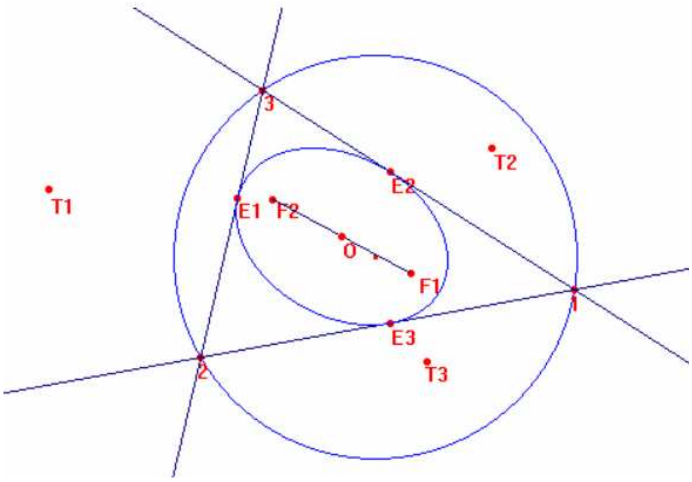
6.2 Ráadásul nézzük meg a rajzon, hogy milyen kúpszelet érinti a hegyesszögű háromszög három oldal-egyenesét, ha a kúpszelet egyik fókusza bejárja a síkot.

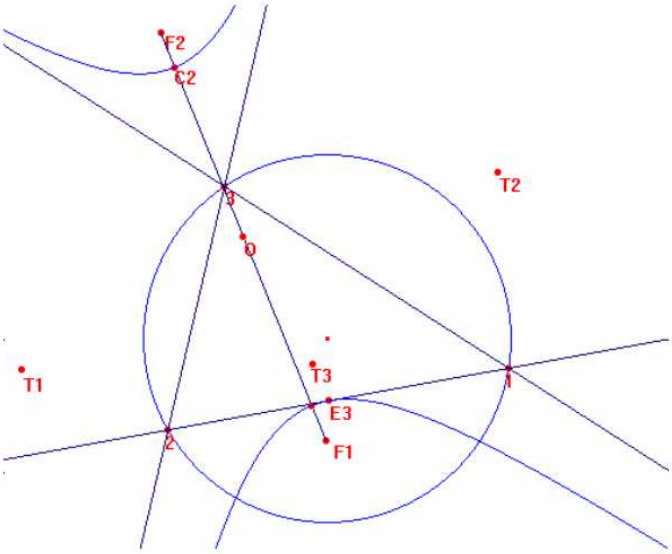
Azt pontosan tudjuk, hogy: ha az F1 fókuszt a körülírt körön rögzítjük, az oldal-egyeneseit érintő parabolát kapunk.

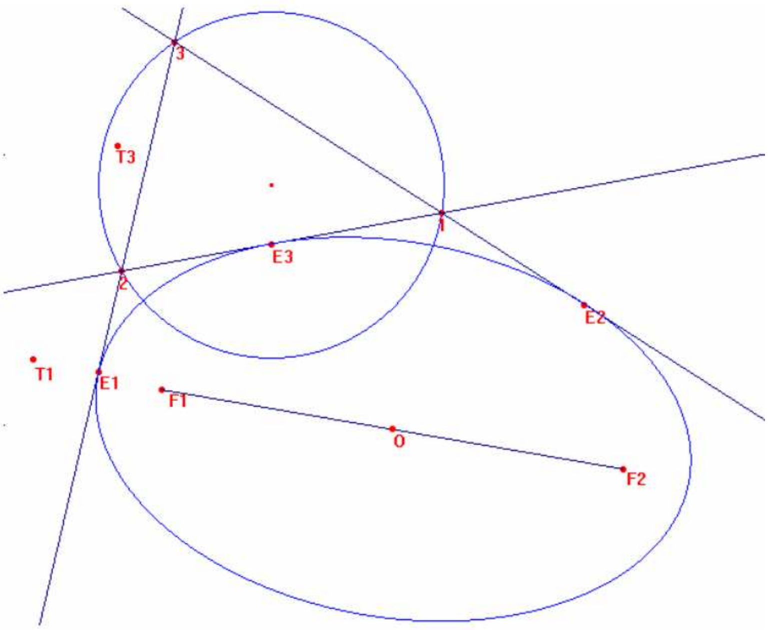
A rajz azt mutatja, hogy: ha az F1 fókusz a háromszög belsejében van, beírt ellipszishez,

ha az F1 fókusz a háromszögön kívül, de a körülírt körön belül van, hozzáírt hiperbolához,

ha az F1 fókusz a körülírt körön kívül van, hozzáírt ellipszishez jutunk.







Van mit bizonyítani.

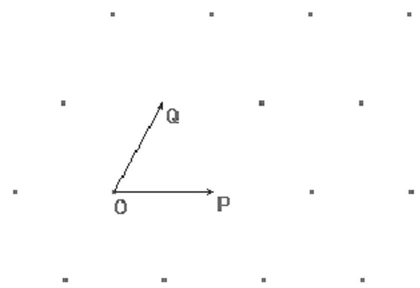
Nemecskó István: Rácsgeometria

1. Alapfogalmak

Legyen O, P és Q a sík három pontja, melyek nincsenek egy egyenesen. Jelöljük **p**-vel és **q**-val az O-ból P-be, illetőleg Q-ba mutató vektorokat. Azoknak a pontoknak a halmazát, amelyeknek helyvektorai

$$x\mathbf{p} + y\mathbf{q}$$

alakúak -ahol x és y egész számok- *paralelogrammarácsnak* nevezzük, magukat a pontokat pedig *rácspontoknak.* Az O pont, továbbá a **p**; **p**+**q**; **q** helyvektorú pontok egy úgynevezett elemi rácsparalelogramma csúcsai. A *rácssokszög* csúcsai rácspontok.



1.1. Két rácspontot összekötő szakasz a *rácsszakasz.* A rácsszakaszok felezőpontja általában nem rácspont, de egy rácspontnak tetszőleges rácsszakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe szintén rácspont.

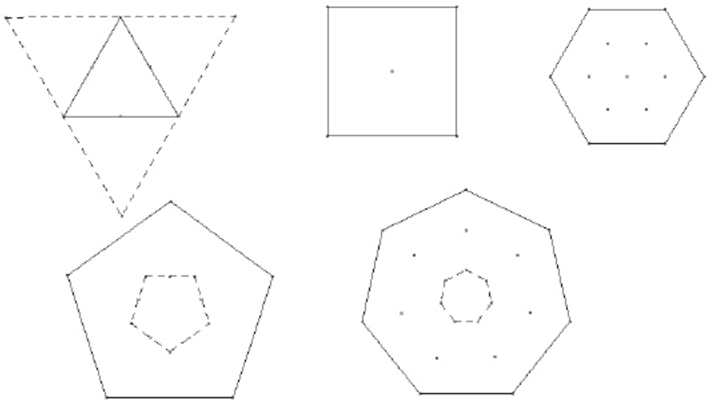
Legyen a rácsszakasz két végpontja $A(a_1; a_2)$, és $B(b_1; b_2)$. Ennek a szakasznak a felezőpontja $F\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}; \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$. Az $R(x; y)$ rácspont tükörképe $R(a_1 + b_1 - x; a_2 + b_2 - y)$ ami szintén rácspont.

F 1.1. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan adunk meg 5 rácspontot a síkon, mindig ki tudunk közülük választani kettőt, melyeknek felezőpontja is rácspont.

Megoldás: Az 5 rácspont között biztosan van kettő olyan, melynek mindkét koordinátája azonos paritású-a skatulya-elv miatt- és ezek felezőpontja egész koordinátájú, tehát rácspont.

2. Szabályos rácssokszögek

2.1. Vizsgáljuk meg milyen szabályos rácssokszögek fordulhatnak elő a paralalogrammarácsban. Az 1.1.-es állítást felhasználva, ha egy szabályos rácssokszögben minden csúcsot tükrözünk a vele szomszédos két csúcs közötti szakasz felezőpontjára, akkor újra rácspontot kapunk.



Háromszög esetén ezek a tükörképek egy olyan szabályos háromszög csúcsai lesznek, melynek az eredeti háromszög csúcsai az oldalfelező pontjai. Négyzet esetén minden csúcs a szemköztibe megy át; hatszögnél mindegyik csúcs tükörképe a hatszög középpontja lesz. Más oldalszám esetén a tükörképek a sokszög belsejében egy ugyanolyan oldalszámú szabályos rácssokszög csúcsai lesznek. Ez azonban nem lehetséges, mert akkor az eljárást újra és újra megismételve végtelen sok rácspontot kapnánk az eredeti sokszög belsejében. (A rácsnak egy korlátos alakzaton belül csak véges sok pontja lehet, hiszen a rácspontok koordinátái is az egész számok egy korlátos, tehát véges halmazából valók.)

Tehát egy paralelogrammarácsban csak rácsnégyzet, szabályos rácsháromszög, vagy szabályos rácshatszög lehet. Általában szabályos rácsháromszög és szabályos rácshatszög egyidejűleg lép fel egy rácsban. Szabályos rácshatszög minden második csúcsa ugyanis szabályos rácsháromszöget alkot. Ha pedig ABC szabályos rácsháromszög akkor B, C, továbbá B-nek A-ra és az AB szakasz felezőpontjára való tükörképe, és C-nek A-ra és az AB szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe rácspont, és ezek egy szabályos rácshatszög csúcsait alkotják.

A továbbiakban rácson négyzetrácsot fogunk érteni, az ettől eltérő esetetekben külön jelezzük.

3. Egyenlő oldalú rácssokszögek

F 3.1. Bizonyítsuk be, hogy ha a sakktábla bármely pontjából kiindulva huszárral visszatérünk a kiindulási mezőre, akkor páros lépést tettünk!

F 3.2. Bizonyítsuk be, hogy ha a sakktábla bármely pontjából kiindulva egy 4x2-es huszárral (ez a huszár is L alakban lép de 3 egység helyett először 4-et) visszatérünk a kiindulási mezőre, akkor páros lépést tettünk!

3.1. Az egyenlőoldalú rácssokszög oldalszáma páros.

Az előbbi állításnál általánosabb tételt bizonyítunk: az egyenlő oldalú zárt töröttvonal oldalszáma páros. Legyenek az n-oldalú zárt töröttvonal valamilyen körüljárás szerint irányított oldalvektorai rendre $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i$ koordinátái $(x_i; y_i)$ egészek.

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

és

$$\mathbf{v}_1{}^2 = \mathbf{v}_2{}^2 = \dots = \mathbf{v}_n{}^2 = a^2.$$

Ezekből:

$$(1.) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0; \quad y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0,$$

$$(2.) \quad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = \dots = x_n^2 + y_n^2 = a^2.$$

Az a^2 egész. A négyzetszámok $4k$ vagy $4k + 1$ alakúak (k egész) ezért két négyzetszám összege $4k, 4k + 1$ vagy $4k + 2$.

Az a^2 csak akkor $4k + 1$ alakú, ha x_i és y_i közül az egyik páros a másik páratlan, az (1.) miatt az x_i-k és y_i-k között is páros számú páratlannak kell lennie, különben nem lenne összegük páros, ezért

x_i-k és y_i-k között is összesen páros számú a páratlan. A (2.)-ben minden négyzetösszegben pontosan egy páratlan van, tehát a négyzetösszegek száma, azaz n páros.

Ha az a^2 $4k{+}2$ alakú, akkor a (2.)-es négyzetösszegekben két páratlan szám szerepel, ezért valamennyi x_i páratlan, tehát összegük csak úgy lehet páros, ha n páros.

Ha a^2 $4k$ alakú, akkor a (2.)-ben a négyzetösszeget mindenütt két páros szám állítja elő, vagyis az összes x_i, y_i páros. Válasszuk ki az összes x_i, y_i közül azt , amelyik a 2-nek legalacsonyabb hatványával osztható, és oszszuk le a koordinátákat evvel a kettő hatvánnyal. Így lekicsinyítettük a zárt rácstöröttvonalat, melynek továbbra is minden csúcsa rácspont, de ezek között már van páratlan így az előző két eset egyikét alkalmazhatjuk rá, vagyis ebben az esetben is páros az oldalszám.

A bizonyított állítás egyszerű következménye, hogy nincs páratlan oldalszámú szabályos rácssokszög a négyzetrácsban, vagyis nincs szabályos rácsháromszög sem. Az állításból nyilvánvalóan adódik, hogy egy rácspontból kiindulva, mindig ugyanakkora távolságú rácspontra lépve, csak páros számú lépés után érkezhetünk vissza a kiindulási pontba. (Ez az oka, hogy a sakktáblán a huszár csak páros számú lépéssel tud visszajutni a kiindulási mezőre.)

Beláttuk, hogy ha egy rácsban van rácsnégyzet, akkor nem lehet szabályos rácsháromszög, (sem hatszög).

A következő ismert bizonyítás a táborban nem hangzott el, mert a diákok egy része még nem ismerte az addíciós tételeket:

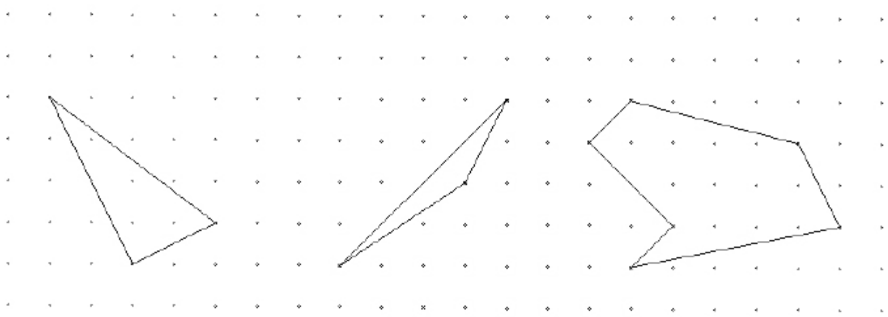
Válasszuk koordinátatengelyeknek egy rácsnégyzet két szomszédos oldalának egyeneseit, egységül pedig a négyzet oldalhosszát. Így a tengelyek rácsegyenesek. Az x tengellyel párhuzamos rácsegyenesek a négyzet y tengelyen lévő oldalát egyenlő részekre osztják, tehát a szomszédos osztópontok távolsága racionális szám. Mivel minden rácspont ezeken az egyeneseken van, ezért az ordinátájuk az előző racionális szám többszörösei, vagyis szintén racionális számok. Ugyanígy racionális szám a rácspontok abszcisszája is. Ezek alapján a rácsegyenesek meredeksége (iránytangense) is racionális. Legyen két egyenes iránytangense tg α, tg β, ekkor

$$\mathrm{tg}\ (\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\ \alpha-\mathrm{tg}\ \beta}{1+\mathrm{tg}\ \alpha\cdot\mathrm{tg}\ \beta}$$

formula szerint bármely két rácsegyenes hajlásszögének tangense is racionális. Ha létezik szabályos rácsháromszög, akkor lennie kell két olyan rácsegyenesnek, melyek hajlásszöge $60°$-os, de tg $60° = \sqrt{3}$ nem racionális, ezért ha egy rácsban létezik rácsnégyzet, akkor szabályos rácsháromszög (és hatszög) nem.

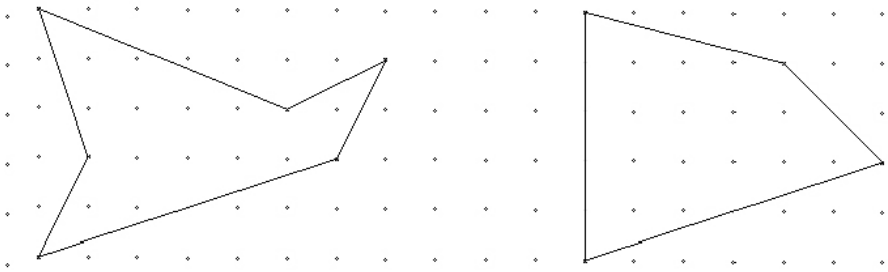
4. A rácssokszögek területe

F 4.1. Határozd meg az ábrákon látható síkidomok területét!

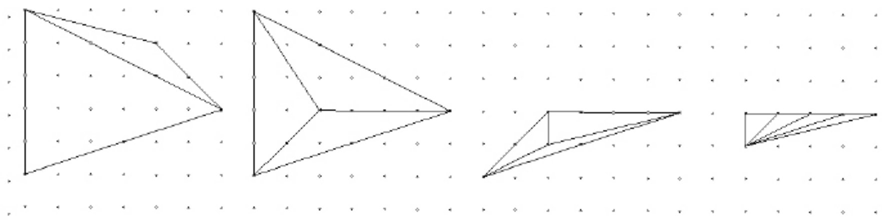


Egy rácsháromszöget *üresnek* nevezünk, ha a csúcsokon kívül sem a határán, sem a belsejében nem tartalmaz rácspontot.

F 4.2. Bontsd fel a következö alakzatokat többféleképpen üres rácsháromszögekre!



4.1. Minden rácssokszög felbontható üres rácsháromszögekre. Minden sokszög felbontható átlókkal háromszögre, melyek rácssokszög esetén rácsháromszögek, ezért elég ha azt bebizonyítjuk, hogy minden rácsháromszög felbontható üres rácsháromszögekre. Ha van a rácsháromszögnek belső rácspontja, akkor azt kössük össze a csúcsokkal, ezáltal 3 olyan rácsháromszöget kapunk, amelyekben a belső rácspontok száma kisebb az eredetinél. Folytatva ezt az eljárást véges sok lépés után elfogynak a belső rácspontok. Most már elég azt belátnunk, hogy ha egy háromszögnek csak a határán van rácspont, akkor az felbontható üres rácsháromszögekre. Kössük össze az egyik oldalon lévő belső rácspontokat a szemközti csúccsal az így kapott háromszögek közül legfeljebb a két szélső tartalmazhat legfeljebb az egyik oldalán belső rácspontokat, ezekre az előző módszert alkalmazva már a teljes háromszög üres rácsháromszögekre bomlik.



4.2. Az üres rácsháromszögekre bontás, mint láttuk általában többféle módon is lehetséges, de megvizsgálva az üres rácsháromszögek számát a következőt állapíthatjuk meg: egy rácssokszög üres rácsháromszögekre való felbontásánál a háromszögek száma független a felbontás módjától. Legyen ugyanis az $n-$oldalú rácssokszögben a belső pontok száma b, a határán lévők száma a csúcsokkal együtt pedig h. Tegyük fel, hogy a rácssokszöget N üres rácsháromszögre bontottuk fel. Az összes rácsháromszög belső szögeinek összege $N \cdot 180°$. A sokszögnél ha 180°-os szöget is megengedünk, akkor sokszögünk h oldalú és belső szögeinek összege $(h-2) \cdot 180°$. A részháromszögek szögei részben a sokszög belső szögeit töltik ki részben pedig a belső rácspontok körüli 360°-os szögeket, ezért:

$$N \cdot 180° = (h-2) \cdot 180° + b \cdot 360°;$$

Ebből rendezés után adódik, hogy:

$$N = h - 2 + 2b,$$

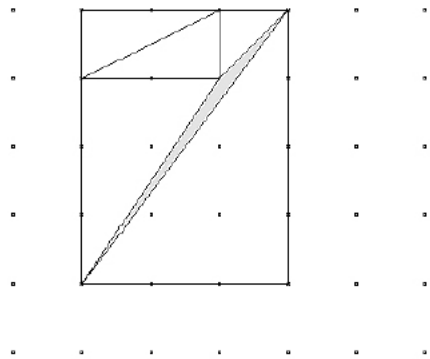
s ez független a felbontás módjától.

Ennek az eredménynek a felhasználásával lehetőségünk nyílik arra, hogy meghatározzuk a rácssokszögek területét.

F 4.3. Rajzolj üres rácsháromszögeket! Határozd meg a területüket!

4.3. Bizonyítsuk be, hogy az üres rácsháromszög területe $\frac{1}{2}$

Foglaljuk ugyanis a tetszőleges üres rácsháromszöget egy főegyenesekkel határolt téglalapba úgy , hogy a háromszögnek legalább két csúcsa a téglalap határán legyen.A téglalap oldalai legyenek a és b. Ha a téglalapból levágunk néhány olyan derékszögű háromszöget, melynek befogói főegyenesen vannak, tehát egész a hosszuk, maradékul az üres rácsháromszöget kapjuk. Mivel a téglalap területe egész, az említett derékszögű háromszögeké is egész vagy egész szám fele.Ebből következik, hogy az üres rácsháromszög területe legalább $\frac{1}{2}$. A 4.2-es állítást felhasználva a téglalap $2ab$ számú üres rácsháromszögre bontható fel, melyek között szerepel a vizsgált háromszög is. A téglalap területe ab, tehát az üres rácsháromszögek területének átlaga $\frac{1}{2}$. Ha lenne a $2ab$ háromszög között $\frac{1}{2}$-nél nagyobb területű, akkor kellene lennie $\frac{1}{2}$-nél kisebb területűnek is, ami az előbbi eredményünk miatt nem lehetséges.



4.4. Ebből már következik, hogy h számú határponttal és b számú belső ponttal rendelkező rácssokszög területe:

$$T = b - 1 + \frac{h}{2}.$$

Ezt az összefüggést **Pick-tételnek** nevezik.

A tételre elegáns bizonyítás adható a gráfelméletből ismert Euler-formula segítségével. A bizonyítás megtalálható Martin Aigner, Günter M. Ziegler: Bizonyítások a könyvből című könyvben

Megjegyzés: Négyzetrács helyett tetszőleges paralelogrammarácsban is hasonló módón bizonyítható, hogy ha egy paralelogrammarácsot származtató paralelogramma területe d, és egy rácssokszög belsejében b számú rácspont van, a határán h számú, akkor a sokszög területe:

$$T = \left(b - 1 + \frac{h}{2}\right) \cdot d.$$

Feladatok

A táborban a Pick-tételt bebizonyítottuk, de alkalmazására már nem maradt idő. Néhány érdekes feladat a témához kötődően:

F 5.1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy rácsháromszög oldalain a csúcsokon kívül nincs rácspont, a belsejében pedig egy van, akkor az a háromszög súlypontja.

F 5.2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex négyszög nem tartalmaz a belsejében és a határán (a csúcsokon kívül) rácspontot, akkor ez a négyszög paralelogramma.

F 5.3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy rácsháromszög oldalain a csúcsokon kívül nincs rácspont, a belsejében pedig kettő van, akkor az a háromszög egyik súlyvonala.

F 5.4. Létezik-e olyan konvex rácsötszög, mely nem tartalmaz belsejében rácspontot?

Az utolsó két feladatból következik, hogy konvex, üres rácssokszög csak háromszög vagy paralelogramma lehet.

F 5.5. A 8×8-as sakktáblát bejárjuk a királlyal úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk, visszatérünk a kiindulási mezőre és soha nem metszük a már megtett útvonalat. Tekintsük a mezők középpontjait rácspontoknak. A bejárást megrajzolva egy rácssokszöget kapunk. Határozzuk meg a sokszög területének és kerületének maximumát.

F 5.6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy rácsparalelogrammának a csúcsain kívül nincs több határpontja és a belsejében csak egy pontot tartalmaz, akkor az a paralelogramma szimmetria középpontja.

F 5.7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy rácsparalelogramma páratlan számú rácspontot tartalmaz, akkor a középpontja rácspont.

F 5.8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy rácsparalelogramma a csúcsain kívül legfeljebb 3 rácspontot tartalmaz, akkor azok az egyik átlón vannak.

F 5.9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy rácsháromszög oldalain a csúcsokon kívül nincs rácspont, a belsejében pedig kettő van, akkor az a háromszög egyik súlyvonala.

Ökördi Péterné: Csoportelmélet a számelméletben

Csoportelméleti alapok

Definíció: Adott egy G halmaz és egy egyértelmű művelet. A G halmazt a műveletre nézve csoportnak nevezzük, ha

1. $\forall a, b \in G \ : \ a \circ b \in G$
2. a művelet asszociatív
3. létezik egységelem, azaz $\exists e \in G \ : \ \forall a \in G \ : \ e \circ a = a$
4. $\forall a \in G$-hez $\exists a^{-1} \in G$, hogy $a^{-1} \circ a = e$

Tulajdonságok

T1: A baloldali egység=jobboldali egységgel. Egységelem egyértelmű.

B1: $e_b \circ e_j = e_b$ vagy e_j

T2: A baloldali inverz=jobboldali inverzzel

B2: $(a_b \circ a) \circ a_j = a_b \circ (a \circ a_j) \Rightarrow e \circ a_j = a_b \circ e \Rightarrow a_j = a_b$

T3: Az inverz elem egyértelmű.

B3: $a_1^{-1} \circ a \circ a_2^{-1} = a_1^{-1}$ vagy a_2^{-1}

T4: A 3. és 4. axióma helyettesíthető az $a \circ x = b$ és $x \circ a = b$ egyenletek G-beli megoldhatóságával.

Definíció: Véges csoport rendje a csoport elemeinek a száma. $O(G)$

Definíció: Részcsoport: azt mondjuk, hogy $K \subset G$ a G csoportnak részcsoportja, ha K a G-beli műveletre nézve csoportot alkot.

Tulajdonságok

T5: K egységeleme azonos G egységelemével, K minden elemének inverze azonos a G-beli inverzével.

Legyen H részcsoportja G-nek. Tekintsük a következő halmazt: $a \circ H$, ahol a a G-nek eleme.

T6: Ha $h \in H$, akkor $h \circ H = H$.

B6: Tetszőleges $b \in H$-ra $h \circ x = b$ megoldható H-ban, mert H csoport. Valamint $h \circ H$ nem lép ki H-ból.

T7: Ha $g \in a \circ H$, akkor $a \circ H = g \circ H$.

B7: $g = a \circ b$, ahol $b \in H$, így $a \circ H = a \circ (b \circ H) = (a \circ b) \circ H = g \circ H$.

T8: Ha $g \notin a \circ H$, akkor $a \circ H \cap g \circ H = \varnothing$.

B8: Indirekt: tfh $g \circ h_1 = a \circ h_2$, ahol $h_1, h_2 \in H$. Ekkor h_1^{-1}-zel balról "szorozva" $g = a \circ h_2 \circ h_1^{-1}$-et kapjuk, azaz $g \in a \circ H$-nak.

T9: $O(a \circ H) = O(H)$

B9: ha $a \neq e$ és $h_1 \neq h_2$, akkor $a \circ h1 \neq a \circ h2$.

Definíció: G csoport H szerinti baloldali mellékosztálya: $a \circ H$.
Definíció: A G H szerinti baloldali mellékosztályainak a száma: $\mathrm{ind}(h)$.

T10: Lagrange tétel: $O(G) = O(H)\mathrm{ind}(h)$.

Definíció: Ciklikus csoport: $\{e = (g^n), g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$, jelölés: $\{g\}$, a g elem által generált ciklikus csoport.

Definíció: Elem rendje: $o(g)$, az a legkisebb kitevő, amire g-t emelve e-t kapjuk.

T11: Ha $g \in G$, akkor $\{g\}$ részcsoportja G-nek.

Következmény: $o(g) \mid O(G)$.

T12: Ha $a^n = e$, akkor $o(a) \mid n$.

B12: $n = ko(a) + r$, ahol $0 \leq r < o(a)$, így $a^n = a^{ko(a)+r} = a^{ko(a)}a^r = a^r = e$, ami csak $r = 0$ esetén lehet.

T13: $o(g^k) = \dfrac{o(g)}{(o(g), k)}$

T14: Ha a G kommutatív csoport összes elemét "szorozzuk", akkor a másodrendű elemek szorzatát kapjuk.

(mod n) redukált maradékrendszer

A szorzásra nézve csoportot kapunk. Rendje $\varphi(n)$.

Kis Fermat tétel: Ha $(a, n) = 1$, akkor $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

A fentiekből az is következik, hogy $o(a) \mid \varphi(n)$.
Következmény: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, ha $(a, p) = 1$; valamint $o(a) \mid p - 1$.

Wilson tétel: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, ahol p prím.

Feladatok

1. Biz.be, hogy $101 \mid 100! + 1$.
2. Mennyi 4353804 szám utolsó 3 számjegye?
3. Milyen n-re lesz $3^{156}n - 1$ osztható 200-zal?
4. Biz. be, hogy tetszőleges p prímre $p^2 \mid (2p-1)! - p$.
5. Biz.be, hogy ha p 2-nél nagyobb prímszám, akkor
$$(p^2 - 1)! \cdot (p^2 - 4)! \cdot (p^2 - 9)! \cdot \ldots \cdot (p^2 - (p-1)^2)! \equiv 1 \pmod{p}$$
6. Biz.be, hogy ha $r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}$ redukált maradékrendszer (mod m), akkor $(r_1 r_2 \dots r_{\varphi(m)})^2 \equiv 1 \pmod{m}$.
7. Biz.be, hogy ha p prímre $p \mid 10n - 1$, akkor $p \mid 10^{p-2} - n$.

Ciklikus csoport pl. a komplex n-edik egységgyökök. Generáló elemek, stb.

Urbán János: Összegek és szorzatok

I. Összegek és szorzatok

(1.) $1 + 1 + \cdots + 1 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n;$

(2.) $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$

(3.) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = ?;$

(4.) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = ?;$

(5.) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = ?;$

(6.) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = ?;$

(7.) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = ?;$

(8.) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = ?;$

(9.) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) = ?;$

(10.) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = ?;$

(11.) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = ?;$

(12.) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = ?;$

(13.) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1} = ?;$

(14.) $\sum_{k=0}^{n} q^k = ?;$

(15.) $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = ?;$

(16.) $\sum_{k=1}^{n} k^2 q^{k-1} = ?;$

(17.) $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = ?;$

(18.) $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = ?;$

(19.) $\prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{2}{(k-1)k}\right) = ?;$

(20.) $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = ?;$

II. Binomiális együtthatókkal kapcsolatos összegek

(1.) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n;$

(2.) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0;$

(3.) $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=?;$

(4.) $\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\ldots+(-1)^n n\binom{n}{n}=?;$

(5.) $1\cdot 2\binom{n}{2}+2\cdot 3\binom{n}{3}+\ldots+(n-1)n\binom{n}{n}=?;$

(6.) $\binom{k}{0}\binom{l}{n}+\binom{k}{1}\binom{l}{n-1}+\ldots+\binom{k}{n}\binom{l}{0}=\binom{k+l}{n};\ (k,l\geq n)$

(7.) $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n};$

(8.) $\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\ldots+\binom{n}{1}=?;$

(9.) $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=?;$

(10.) $\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\ldots+\binom{n}{3}=?;$

Eredmények

(I.3.) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; (I.4.) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$; (I.5.) $\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;
(I.6.) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; (I.7.) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$; (I.8.) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$;
(I.9.) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{6}$;
(I.10.) $1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$;
(I.11.) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;
(I.12.) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)=\frac{n^3+6n^2+11n}{18(n^3+6n^2+11n+6)}$;
(I.13.) $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}$;
(I.14.) $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}:=S_n$; (I.15.) $\frac{nq^{n+1}-q^n(n+1)+1}{(q-1)^2}:=R_n$;
(I.16.) $\frac{1}{q-1}\left(n^2q^n-S_{n-1}-2qR_{n-1}\right)=\frac{-1-q+(1+n)^2\,q^n+\left(1-2\,n-2\,n^2\right)\,q^{1+n}+n^2\,q^{2+n}}{(-1+q)^3}$;
(I.17.) $\frac{1}{n}$; (I.18.) $\frac{n+1}{2n}$; (I.19.) $\prod_{k=3}^{n}\frac{(k+1)(k-2)}{k(k-1)}=\frac{n+1}{3(n-1)}$; (I.20.) $\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$;
(II.3.) $n2^{n-1}$; (II.4.) 0, ha $n>1$; (II.5.) $n(n-1)2^{n-2}$;
(II.8.) $\frac{n(n+1)}{2}$; (II.9.) $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$; (II.10.) $\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{24}$

Urbán János:
A generátorfüggvény-módszer

Definíció: Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat generátorfüggvénye az

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad |x| < r$$

függvény.

Feladatok:

(1.) Adjuk meg a következő sorozatok generátorfüggvényét:

a.) $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, azaz $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$

b.) $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, azaz $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$

c.) $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0, \ldots$

(2.) Egy kockával addig dobunk, amíg hatost nem dobunk. Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy ehhez n dobás szükséges. Adjuk meg a a $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ sorozat generátorfüggvényét és ennek felhasználásával a várható dobásszámot.

(3.) Melyik sorozat generátorfüggvénye a következő függvény:

a.) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$;

b.) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$?

Definíció: Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{n} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}, \ (n \geq 1, n \in \mathbb{Z})\\ \binom{\alpha}{0} &= 1.\end{aligned}$$

Bizonyítható a Newton-féle binomiális tétel általánosítása:

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \ldots \ ; |x| < 1.$$

(4.) Adjuk meg azt a sorozatot, amelynek generátorfüggvénye:

a.) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$;

b.) $\sqrt{1+x}$.

(5.) A Fibonacci sorozat definíciója:

$$\begin{aligned} u_0 = u_1 &= 1, \\ u_{n+2} &= u_n + u_{n+1}. \end{aligned}$$

Adjuk meg a Fibonacci sorozat generátorfüggvényét, és ennek alapján adjunk képletet u_n-re.

(6.) Egy kör kerületén adott $2n$ számú pont. Jelölje a_n azt a számot, ahányféleképpen ezeket páronként össze lehet kötni húrokkal úgy, hogy a húrok nem metszik egymást a kör belsejében. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 1$, akkor

$$a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \ldots + a_{n-2} 1 + a_{n-1} a_0, \ (a_0 = 1).$$

Adjuk meg a sorozat $f(x)$ generátorfüggvényét és ennek segítségével adjunk képletet a_n-re.

(7.) Péter szerencsejátékot játszik. Minden játszmában p valószínűséggel nyer, $1-p = q$ valószínűséggel veszít 1 eurot. Jelölje p_n annak valószínűségét, hogy Péter nyereménye először az n-edik játszmában lesz pozitív ($p_0 = 0$ legyen). Ha S_n jelöli az n-edik játszmáig Péter össznyereményét, akkor p_n a következő esemény valószínűsége:

(*) $S_1 \leq 0$, és $S_2 \leq 0$, …, és $S_{n-1} \leq 0$, és $S_n = 1$.

A (*) összefüggés $n > 1$ esetén akkor és csak akkor teljesül, ha

(1) az első játszmában Péter veszít;

(2) pontosan további $k-1$ játszma után kerül Péter először olyan helyzetbe, mintha akkor kezdene;

(3) további $n-k$ játszma után lesz a nyeresége először pozitív.

Igazoljuk az állítást.

Határozzuk meg a $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ generátorfüggvényét és ennek segítségével adjunk képletet p_n-re.

Tartalomjegyzék