Tehetséggondozó tábor, Tata
2004. ősz, 11-12. évfolyam

1. A derékszögű koordinátarendszer rácspontjait három színnel színeztük, mindegyik szín legalább egyszer szerepel. Mutassuk meg, hogy van olyan derékszögű rácsháromszög, melynek csúcsai különböző színűek.

2. A sík pontjait két színnel színeztük. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan szabályos háromszög, melynek mindhárom csúcsa azonos színű.

3. A nemnegatív racionális számok $a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozatára $a_m + a_n = a_{mn}$ teljesül, minden m, n természetes szám esetén. Mutassuk meg, hogy nem lehet a sorozat összes eleme különböző.

4. A pozitív egészek $a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozata szigorúan monoton növő. Ha n és m relatív prímek, akkor $a_n \cdot a_m = a_{n \cdot m}$. Mi lehet az a_n sorozat, ha $a_2 = 2$?

5. Legyen $A = \{n, n+1, \dots, n+17\}$, ahol n természetes szám. Van-e olyan n, amire A elemei két diszjunkt halmazba oszthatók, melyekben megegyezik a számok szorzata?

6. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan, akkor a $H = \{n, n+1, \dots, n+32\}$ halmaz elemeit fel lehet írni két kör kerületére úgy, hogy

   a) a körökön 14, illetve 19 elem legyen és

   b) a körökön szomszédos számok relatív prímek legyenek.

7. Léteznek-e olyan különböző $n_1, n_2, \dots, n_{2004}$ természetes számok, hogy
$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_{2004}}?$$

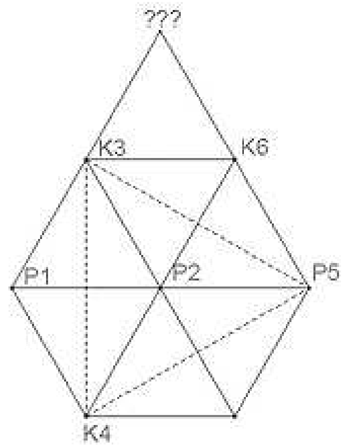
8. Léteznek-e olyan különböző $n_1, n_2, \dots, n_{2004}$ természetes számok, hogy
$$1 = \frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} + \dots + \frac{1}{n_{2004}^2}?$$

Megoldások

1. Van két "szomszédos" rácspont (mondjuk P és K), melyek különböző színűek. Legyen P piros és K kék, továbbá legyen egyenesük e. Ha a P-re vagy K-ra illeszkedő és e-re merőleges p illetve k rácsegyenesen van egy Z zöld pont, akkor kész vagyunk (PKZ). Ha nincs, akkor egy Z zöld pont e-n vett merőleges vetülete legyen Z_1. Ha Z_1 piros vagy kék, akkor ZZ_1K illetve ZZ_1P jó. Ha zöld, akkor p és k egyszínű, különben kész vagyunk. Végül a Z_1-ből induló, e-vel $\pm 45°$-os szöget bezáró egyenesek p-ből és k-ból kimetszik a P_1 és K_1 pontokat, a $Z_1P_1K_1$ háromszög jó.

2. Megmutatjuk, hogy a sík megfelelően megválasztott hét pontját kiszínezve is keletkezik egyszínű szabályos háromszög.

   Egy szabályos háromszögrács pontjait vizsgáljuk, feltesszük, hogy P_1 és P_2 piros. Megpróbáljuk elkerülni az egyszínű szabályos háromszög kialakulását. A pontok száma szerint haladva egyértelműen adódnak a színek, a hetedik lépésben elakadunk, vagy P_1P_5??? piros, vagy K_3K_6??? kék lesz.



3. Mivel $a_1 + a_n = a_{1 \cdot n} = a_n$, ezért $a_1 = 0$. Ha a_2, a_3 valamelyike nulla, kész vagyunk. Ha nem, akkor legyen $a_2 = \frac{p}{q}, a_3 = \frac{r}{s}$, ahol $(p;q) = (r;s) = 1$. Feltételeink alapján $pr = a_2 \cdot qr = a_3 \cdot ps$. Innen

$$\underbrace{a_2 + a_2 + \cdots + a_2}_{qr \text{ darab}} = \underbrace{a_3 + a_3 + \cdots + a_3}_{ps \text{ darab}},$$

   tehát $a_{2^{qr}} = a_{3^{ps}}$. De $2^{qr} \neq 3^{ps}$, vagyis két különböző indexű tag egyenlőségét bizonyítottuk.

4. Az rögtön látszik, hogy az $a_n = n$ sorozat megfelel. Bebizonyítjuk, hogy nincs más eset. Ehhez elég megmutatni, hogy $a_3 = 3$. Ugyanis ekkor $a_6 = a_2 \cdot a_3 = 6$, így a szigorúan monoton növekedés miatt $a_4 = 4$, $a_5 = 5$, tehát $a_{10} = 10$, stb.

   Az $a_3 = 3$ bizonyítása:

   $a_{15} < a_{18}$ vagyis $a_3 \cdot a_5 < 2a_9 < 2a_{10} = 4a_5$, tehát $a_3 < 4$.

5. Nincs. Ha a számok között van 19-cel osztható, akkor pontosan egy van. Tehát az egyik csoportban osztható, a másikban nem osztható a számok szorzata 19-cel.

   Ha nincs 19-cel osztható szám a halmazban, akkor egy redukált maradékrendszert kapunk (mod 19), így alkalmazható a Wilson tétel ($(p-1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p)$), vagyis a 18 szám szorzata -1 maradékot ad 19-cel osztva. Ha lenne jó kettébontás, és a csoporotok szorzata m maradékot adna 19-cel, akkor a két csoport szorzatára $m^2 \equiv -1 \pmod{19}$ adódna. Ez azonban lehetetlen, nincs olyan szám, aminek négyzete 19-cel osztva -1 maradékot ad.

6. Az $n, n+1, \ldots, n+32$ sorozat belsejéből kivesszük az $a, a+1, \ldots, a+13$ részsorozatot ($n < a < n+19$). A két kör: $a, a+1, \ldots, a+13$ és $n, n+1, \ldots, a-1, a+14, a+15, \ldots, n+32$. Az utolsó és első elemek is szomszédosak a körökön.

   Megmutatjuk, hogy van megfelelő a. Elég három számpárt vizsgálni.

   $(a, a+13) = 1$, ha $13 \not| a$.

   $(n, n+32) = 1$, mert n páratlan.

   $(a-1, a+14) = 1$, ha $3 \not| a-1$ és $5 \not| a-1$.

   a-t 18 szám közül választhatjuk ki. Az első feltétel két számot, a harmadik pedig legfeljebb $6+4=10$ számot zár ki, tehát mindig találunk megfelelő a-t.

7. Igen. Kiindulunk az $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ azonosságból, majd ismételten alkalmazzuk az utolsó törtre az $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ formulát. Ezzel az összeg nem változik, a tagok száma egyesével nő, és minden nevező különböző marad, mert mindig a legnagyobb nevezőt cseréljük két nagyobbra.

8. Nem. Az 1 nem szerepelhet a nevezők között, mert akkor túl nagy lenne az összeg. Egy kis analízis jön.

$$\sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{a_i^2} < \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1.$$

   Felhasználtuk, hogy a nevezők különböznek.