

**Tehetséggondozó tábor, Tata**  
**2004. ősz, 11-12. évfolyam**

1. A derékszögű koordinátarendszer rácspontjait három színnel színeztük, mindegyik szín legalább egyszer szerepel. Mutassuk meg, hogy van olyan derékszögű rácsháromszög, melynek csúcsai különböző színűek.
2. A sík pontjait két színnel színeztük. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan szabályos háromszög, melynek mindhárom csúcsa azonos színű.
3. A nemnegatív racionális számok  $a_1, a_2, a_3, \dots$  sorozatára  $a_m + a_n = a_{mn}$  teljesül, minden  $m, n$  természetes szám esetén. Mutassuk meg, hogy nem lehet a sorozat összes eleme különböző.
4. A pozitív egészek  $a_1, a_2, a_3, \dots$  sorozata szigorúan monoton növvő. Ha  $n$  és  $m$  relatív prímek, akkor  $a_n \cdot a_m = a_{n \cdot m}$ . Mi lehet az  $a_n$  sorozat, ha  $a_2 = 2$ ?
5. Legyen  $A = \{n, n + 1, \dots, n + 17\}$ , ahol  $n$  természetes szám. Van-e olyan  $n$ , amire  $A$  elemei két diszjunkt halmazba oszthatók, melyekben megegyezik a számok szorzata?
6. Bizonyítsuk be, hogy ha  $n$  páratlan, akkor a  $H = \{n, n + 1, \dots, n + 32\}$  halmaz elemeit fel lehet írni két kör kerületére úgy, hogy
  - a) a körökön 14, illetve 19 elem legyen és
  - b) a körökön szomszédos számok relatív prímek legyenek.
7. Léteznek-e olyan különböző  $n_1, n_2, \dots, n_{2004}$  természetes számok, hogy

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_{2004}}?$$

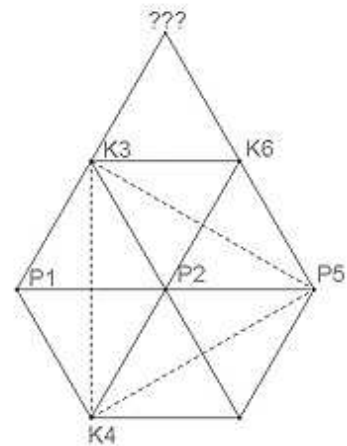
8. Léteznek-e olyan különböző  $n_1, n_2, \dots, n_{2004}$  természetes számok, hogy

$$1 = \frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} + \dots + \frac{1}{n_{2004}^2}?$$

## Megoldások

1. Van két "szomszédos" rácspont (mondjuk  $P$  és  $K$ ), melyek különböző színűek. Legyen  $P$  piros és  $K$  kék, továbbá legyen egyenesük  $e$ . Ha a  $P$ -re vagy  $K$ -ra illeszkedő és  $e$ -re merőleges  $p$  illetve  $k$  rácsegyenesen van egy  $Z$  zöld pont, akkor kész vagyunk ( $PKZ$ ). Ha nincs, akkor egy  $Z$  zöld pont  $e$ -n vett merőleges vetülete legyen  $Z_1$ . Ha  $Z_1$  piros vagy kék, akkor  $ZZ_1K$  illetve  $ZZ_1P$  jó. Ha zöld, akkor  $p$  és  $k$  egyszínű, különben kész vagyunk. Végül a  $Z_1$ -ből induló,  $e$ -vel  $\pm 45^\circ$ -os szöget bezáró egyenesek  $p$ -ből és  $k$ -ből kimetszik a  $P_1$  és  $K_1$  pontokat, a  $Z_1P_1K_1$  háromszög jó.
2. Megmutatjuk, hogy a sík megfelelően megválasztott hét pontját kiszínezve is keletkezik egyszínű szabályos háromszög.

Egy szabályos háromszögrács pontjait vizsgáljuk, feltesszük, hogy  $P_1$  és  $P_2$  piros. Megpróbáljuk elkerülni az egyszínű szabályos háromszög kialakulását. A pontok száma szerint haladva egyértelműen adódnak a színek, a hetedik lépésben elakadunk, vagy  $P_1P_5$  piros, vagy  $K_3K_6$  kék lesz.



3. Mivel  $a_1 + a_n = a_{1 \cdot n} = a_n$ , ezért  $a_1 = 0$ . Ha  $a_2, a_3$  valamelyike nulla, kész vagyunk. Ha nem, akkor legyen  $a_2 = \frac{p}{q}, a_3 = \frac{r}{s}$ , ahol  $(p; q) = (r; s) = 1$ . Feltételeink alapján  $pr = a_2 \cdot qr = a_3 \cdot ps$ . Innen

$$\underbrace{a_2 + a_2 + \cdots + a_2}_{qr \text{ darab}} = \underbrace{a_3 + a_3 + \cdots + a_3}_{ps \text{ darab}},$$

tehát  $a_{2^{qr}} = a_{3^{ps}}$ . De  $2^{qr} \neq 3^{ps}$ , vagyis két különböző indexű tag egyenlőségét bizonyítottuk.

4. Az rögtön látszik, hogy az  $a_n = n$  sorozat megfelel. Bebizonyítjuk, hogy nincs más eset. Ehhez elég megmutatni, hogy  $a_3 = 3$ . Ugyanis ekkor  $a_6 = a_2 \cdot a_3 = 6$ , így a szigorúan monoton növekedés miatt  $a_4 = 4, a_5 = 5$ , tehát  $a_{10} = 10$ , stb.

Az  $a_3 = 3$  bizonyítása:

$$a_{15} < a_{18} \text{ vagyis } a_3 \cdot a_5 < 2a_9 < 2a_{10} = 4a_5, \text{ tehát } a_3 < 4.$$

5. Nincs. Ha a számok között van 19-cel osztható, akkor pontosan egy van. Tehát az egyik csoportban osztható, a másikban nem osztható a számok szorzata 19-cel.

Ha nincs 19-cel osztható szám a halmazban, akkor egy redukált maradékrendszert kapunk (mod 19), így alkalmazható a Wilson tétel ( $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ ), vagyis a 18 szám szorzata -1 maradékot ad 19-cel osztva. Ha lenne jó kettébontás, és a csoportok szorzata  $m$  maradékot adna 19-cel, akkor a két csoport szorzatára  $m^2 \equiv -1 \pmod{19}$  adódna. Ez azonban lehetetlen, nincs olyan szám, aminek négyzete 19-cel osztva -1 maradékot ad.

6. Az  $n, n+1, \dots, n+32$  sorozat belsejéből kivesszük az  $a, a+1, \dots, a+13$  részsorozatot ( $n < a < n+19$ ). A két kör:  $a, a+1, \dots, a+13$  és  $n, n+1, \dots, a-1, a+14, a+15, \dots, n+32$ . Az utolsó és első elemek is szomszédosak a körökön.

Megmutatjuk, hogy van megfelelő  $a$ . Elég három számpárt vizsgálni.

$(a, a+13) = 1$ , ha  $13 \nmid a$ .

$(n, n+32) = 1$ , mert  $n$  páratlan.

$(a-1, a+14) = 1$ , ha  $3 \nmid a-1$  és  $5 \nmid a-1$ .

$a$ -t 18 szám közül választhatjuk ki. Az első feltétel két számot, a harmadik pedig legfeljebb  $6+4=10$  számot zár ki, tehát mindig találunk megfelelő  $a$ -t.

7. Igen. Kiindulunk az  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$  azonosságból, majd ismételten alkalmazzuk az utolsó törtre az  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$  formulát. Ezzel az összeg nem változik, a tagok száma egyesével nő, és minden nevező különböző marad, mert mindig a legnagyobb nevezőt cseréljük két nagyobbra.

8. Nem. Az 1 nem szerepelhet a nevezők között, mert akkor túl nagy lenne az összeg. Egy kis analízis jön.

$$\sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{a_i^2} < \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1.$$

Felhasználtuk, hogy a nevezők különbözőek.